

УДК 631.4:519.86 (086.5)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПРОДУКТИВНОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО УРОВНЯ ПОЧВЕННЫХ ФОСФАТОВ

А.В. ПУХОВСКИЙ

(ФГБОУ ВПО МГУП)

*Уже более 150 лет исследовательские коллективы разных стран ведут экспериментальные исследования и на их основе поиск оптимального способа описания влияния факторов на продуктивность растений — так называемых функций продуктивности (ФП). Интерес к ФП многогранен — они востребованы экономистами, агрономами, агрохимиками и экологами как основа для решения их профессиональных задач на основе моделирования. В статье рассмотрены развитие моделей функции продуктивности в агрохимии и подходы к их калибровке. Рассмотрено явление квазилинейности ( $R^2 > 0.998$ ) функций Митчерлиха и Богуславского в диапазоне от 30 до 90% максимальной продуктивности при логарифмировании аргумента и возможности его практического применения. Рассмотрены ограничения для использования рекомендаций в связи со свойствами шкал изучаемых факторов. Предлагаемый подход применим только к величинам, принадлежащим к абсолютным шкалам (шкалам отношений). Проведен анализ возможности и целесообразности оценки критических уровней подвижных фосфатов, выше которого применение удобрений нецелесообразно, на примере анализа недавно опубликованных экспериментальных данных Ротамстеда.*

*Ключевые слова: функция продуктивности, моделирование, выбор модели, логарифмирование аргумента, критический уровень, доступные фосфаты, продуктивность.*

На продуктивность растений одновременно влияет большое количество факторов (свет, температура, обеспеченность водой, элементами питания и т.д.), что чрезвычайно усложняет процесс познания в этой области. Уже более 150 лет исследовательские коллективы разных стран ведут экспериментальные исследования и на их основе поиск оптимального способа описания влияния факторов на продуктивность растений — так называемых функций продуктивности (ФП). Интерес к ФП многогранен — они востребованы экономистами, агрономами, агрохимиками и экологами как основа для решения их профессиональных задач на основе моделирования [1-65]. Подходы к нахождению ФП меняются по мере накопления знаний, появления новых идей, технических средств и потребностей. Приоритетной работой по ФП в области агрохимии считается работа Либиха (*Liebig, J. Von, 1855* [3,41]), хотя математический вид линейной функции с последующим плато, так называемая модель Либиха (ФПЛ) в линейном и частично сглаженном виде приобрела в более поздних рабо-

тах [10, 12, 16, 22, 24 и др.]. Начиная с 1909 г. в работах Митчерлиха (Mitscherlich) [2, 48-50] и, независимо, начиная с 1923 в работах Спиллмана (Spillman) [56], была предложена модель (ФПМС) на основе обратной экспоненты, которая тоже имеет плато как ФПЛ, но имеет затухающий отклик без точки излома. В дальнейшее развитие теоретических представлений о ФП внесли вклад в 1918 Бауле (Baule, многофакторная модель Митчерлиха-Бауле [13]), с 1944 Брей (Braу, концепция влияния подвижности элементов питания на ФП [18-21]), с 1962 Богуславский (Von Boguslawski E. & B. Schneider, уточнение модели Митчерлиха [63-65]) и многие другие исследователи [10, 12, 16, 17, 22-31, 33-34 и др.]. Следует признать техническую сложность калибровки ФП МС, особенно для 2 и более переменных. Поэтому с середины XX в. интенсивно развиваются методы и подходы к моделированию ФП на основе эмпирических регрессионных моделей [33]. Однако, как показывает анализ публикаций, в последние десятилетия усилился интерес к классическим ФПЛ и ФПМС, а также модификациям на их основе. Следует отметить, что Либшер (Liebscher) еще в 1895 предложил теорию, которая может теперь рассматриваться как ранний синтез понятий (моделей) Либиха и Митчерлиха. В 1971 Гринвуд (Greenwood et al. [30]) на основе известной в химической кинетике функции Михаэлиса-Ментена (Michaelis, L. & M.L. Menten, 1913) представили новую формализацию идей Либшера, получившую развитие в последующих работах [51]. В ранних работах [2, 18, 19 и др.], ввиду сложности получения необходимых массивов данных и их обработки, ФП в основном касались действия одного фактора (азота, фосфатов, калия). Однако, учитывая комплексный характер воздействия факторов на урожай, все больший интерес вызывают ФП с включением двух и более факторов, например, таких относительно динамичных факторов, как сочетание воды и азотных удобрений [28, 29, 31 и др.]. В данной работе основное внимание сфокусировано на факторе фосфора. Соединения фосфора часто являются одним из лимитирующих факторов продуктивности растений [1-3, 21]. Их малая подвижность в почве определяет длительное последствие внесенных фосфорных удобрений, что позволяет их вносить в «запас» [6, 20, 39]. Повышение содержания фосфатов в почве при использовании фосфорных удобрений увеличивает эффективность использования других удобрений, прежде всего азотных [1-3, 6, 7]. Однако на склоновых землях это также увеличивает риск их смыва в водоемы, приводя к эвтрофикации [32, 35, 39, 40, 44-46]. Второй важный аспект использования фосфорных удобрений — их более высокая стоимость по сравнению с другими видами удобрений. Таким образом, как экономический, так и экологические факторы способствуют экономному расходованию фосфорных удобрений и ограничению по дозам их внесения, если в почве достигнут так называемый критический уровень (КУ), когда дополнительное внесение фосфорных удобрений достоверно не приводит к повышению продуктивности, экономически нецелесообразно или экологически недопустимо [44]. Недавно опубликованы работы исследователей из Ротамстеда с данными многолетних исследований по влиянию остаточных почвенных фосфатов (по Олсену) на продуктивность ярового ячменя, озимой пшеницы на трех контрастных почвах с оценкой КУ на основе модели ФПМС [36-38]. Однако вызвала удивление значительная неопределенность (до 5-8 раз в величинах КУ фосфатов по годам), что вызвало потребность в дополнительном исследовании возможных причин таких колебаний в данной работе.

Один из первых приближенных методов определения КУ по агрономическому критерию был предложен Кейтом и Нелсоном (Cate, and Nelson [23]). Наличие моделей ФП формально упрощает определение КУ, но точность оценки КУ остается невысокой и в значительной мере зависит от выбранных критериев, качества ис-

ходных данных и вида ФП. Сравнение нескольких видов наиболее важных ФП для оценки КУ и разработка некоторых практических рекомендаций является основной целью данной работы. В работах [4-9] мы с различных позиций рассматривали ФП, в том числе в [4] представлены основные ФП и их развитие. Дополнительный обзор и библиографию по данному вопросу можно также найти в классических и недавно опубликованных работах [31, 51].

### Методы и объект исследования

В качестве основного метода исследования мы, как и в предыдущих работах [4-9], использовали моделирование ФП на основе ранее опубликованных данных полевых опытов по действию агрохимических факторов на продуктивность полевых культур с использованием Microsoft Excel.

В исследовании использованы недавно опубликованные работы исследователей из Ротамстеда с данными многолетних исследований по влиянию остаточных почвенных фосфатов (по Олсену) на продуктивность ярового ячменя [36-38].

### Результаты и их обсуждение

В современных работах большинство исследователей отдают предпочтение теоретически обоснованным моделям ФП, прежде всего ФПЛ, ФПМС и их модификаций. Однако ввиду сложности прямой калибровки таких ФП даже в однофакторном случае для практических целей нами был предложен новый способ калибровки на основе логарифмической трансформации данных [4]. Для иллюстрации этого подхода в табл. 1 приведены результаты модельного расчета для различных значений переменной X значений трансформированной переменной ( $\text{Log}(X)$ ) и функций ФПМС ( $Y/Y_0 = 1 - \exp(-aX)$  при  $a = 1$ ) и ФПМСБ ( $Y/Y_0 = \exp(-(\log X - 0.68)^2/2/\sigma^2)$ ) при  $\sigma^2 = 1$ ).

Т а б л и ц а 1

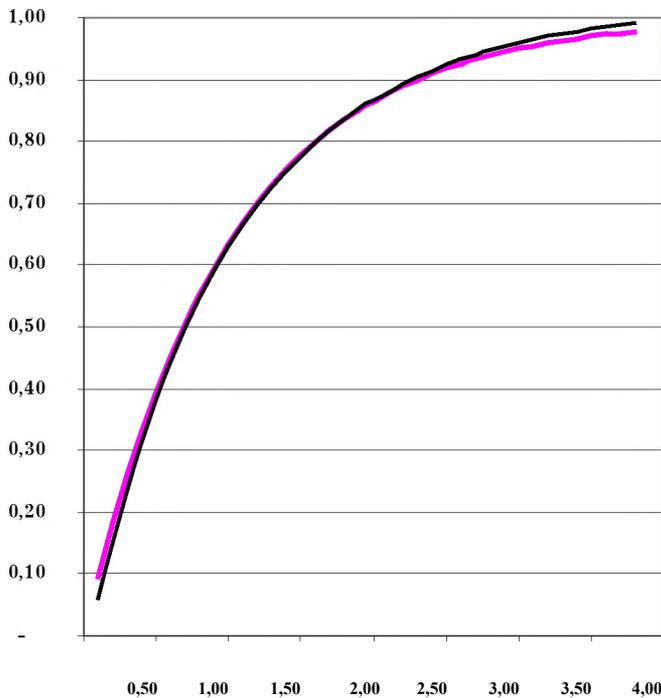
Результаты модельного расчета  $\lg(X)$ , ФПМС и ФПМСБ

X	$\lg(X)$	ФПМС	ФПМСБ	X	$\lg(X)$	ФПМС	ФПМСБ
0,10	-1,00	0,10	0,06	2,00	0,30	0,86	0,87
0,20	-0,70	0,18	0,15	2,10	0,32	0,88	0,88
0,30	-0,52	0,26	0,24	2,20	0,34	0,89	0,89
0,40	-0,40	0,33	0,31	2,30	0,36	0,90	0,90
0,50	-0,30	0,39	0,38	2,40	0,38	0,91	0,91
0,60	-0,22	0,45	0,44	2,50	0,40	0,92	0,92
0,70	-0,15	0,50	0,50	2,60	0,41	0,93	0,93
0,80	-0,10	0,55	0,55	2,70	0,43	0,93	0,94
0,90	-0,05	0,59	0,59	2,80	0,45	0,94	0,95
1,00	0	0,63	0,63	2,90	0,46	0,94	0,95
1,10	0,04	0,67	0,67	3,00	0,48	0,95	0,96

X	lg(X)	ФПМС	ФПМСБ	X	lg(X)	ФПМС	ФПМСБ
1,20	0,08	0,70	0,70	3,10	0,49	0,95	0,97
1,30	0,11	0,73	0,73	3,20	0,51	0,96	0,97
1,40	0,15	0,75	0,75	3,30	0,52	0,96	0,97
1,50	0,18	0,78	0,78	3,40	0,53	0,97	0,98
1,60	0,20	0,80	0,80	3,50	0,54	0,97	0,98
1,70	0,23	0,82	0,82	3,60	0,56	0,97	0,98
1,80	0,26	0,83	0,83	3,70	0,57	0,98	0,99
1,90	0,28	0,85	0,85	3,80	0,58	0,98	0,99

**Примечание.** Параметры ФПМС и ФПМСБ были подобраны таким образом, чтобы значения функций были максимально близки.

В традиционном формате (рис. 1) графики ФПМС и ФПМСБ практически сливаются, причем обе эти функции нелинейны, что и вызывает проблему их пря-



**Рис. 1.** Графики ФПМС и ФПМСБ в зависимости от значений переменной X

мой калибровки. При логарифмически преобразованном аргументе (рис. 2) участки значений функций ФПМС и ФПМСБ в интервале  $Y/Y_0$  от 0,3 до 0,9 имеют практически совпадающие по параметрам моделей квазилинейные участки. Отметим, что диапазон значений  $Y/Y_0$  от 0,3 до 1,0 является наиболее агрономически значимым, т.е. большинство экспериментальных данных не выходит за эти границы. При этом интервал от 0,3 до 0,9 адекватно описывается линейной функцией от логарифмически преобразованного аргумента, которая легко калибруется, и через ее параметры можно восстановить исходную модель для адекватного прогноза при выходе из зоны линейной аппроксимации [4].

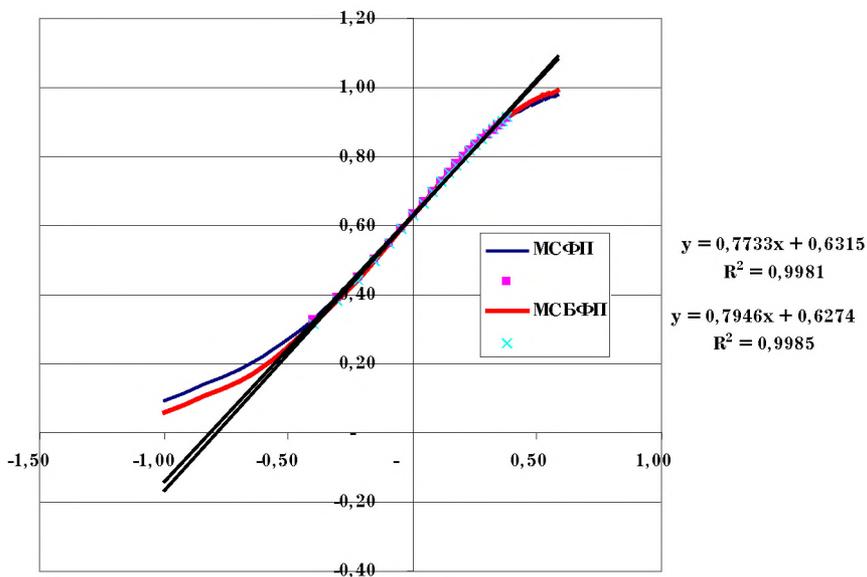


Рис. 2. Графики ФПМС и ФПМСБ в зависимости от значений  $1д(X)$

В таблице 2 и на рисунках 3-4 приведено сравнение экспериментальных данных, полученных в полевых опытах Ротамстеда [36-38], с результатами моделирования ФП

Адекватность модельных ФП может быть оценена по общепринятым статистическим критериям  $S$  (стандартное отклонение) и  $R^2$  (коэффициент детерминации) [29]. По этим критериям в данном примере наибольшую адекватность (табл. 3 и рис. 3-4) показала ФПМС, далее в порядке убывания ФПЛК, ФПМСБ (эти модели на рис. 4 практически совпадают, ФПЛМ, ФПЛ, ФПК (наихудшая адекватность). Здесь следует отметить высокую адекватность эмпирических ФПЛК и ФПЛМ (с логарифмически преобразованным аргументом), что подтверждает целесообразность логарифмического преобразования аргумента (ограничения будут рассмотрены ниже) и вероятную максимально высокую адекватность этих моделей в оценке КУ.

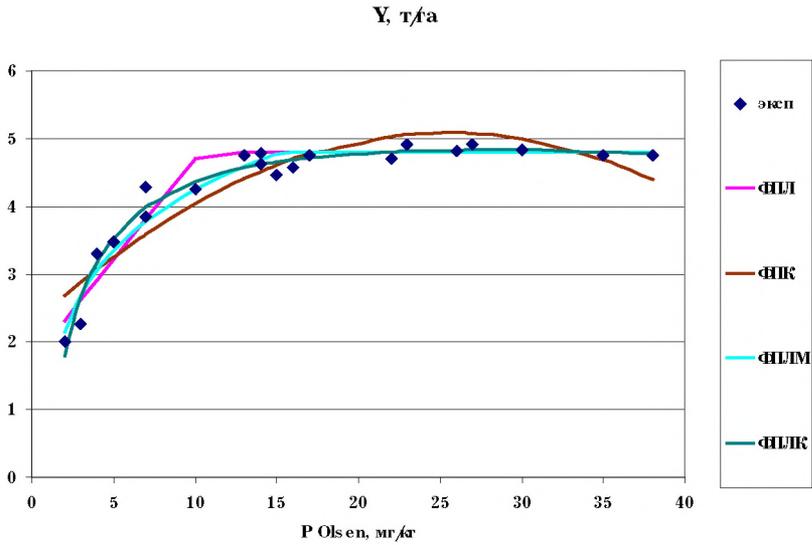
Оценка КУ, как выше отмечалось, не абсолютна. В зависимости от выбранной модели ФП и критериев результаты этой оценки могут иметь различную не-

Таблица 2

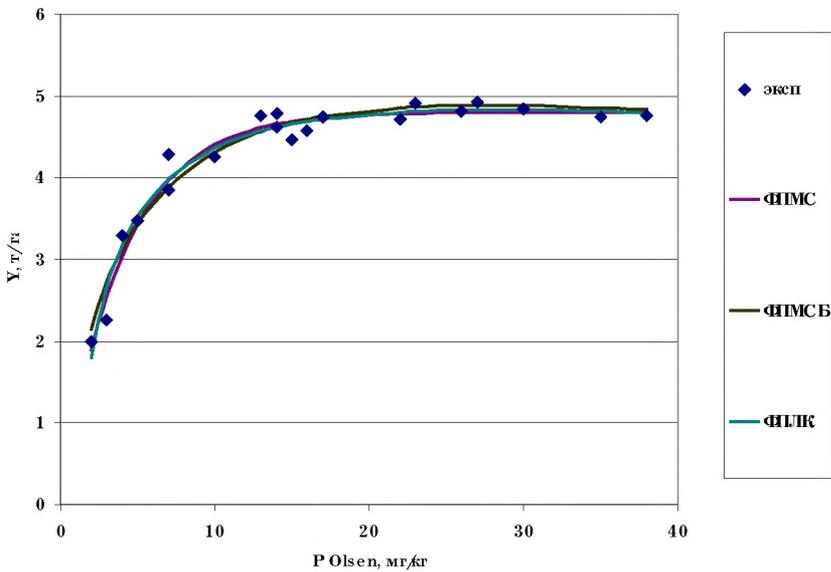
Экспериментальные данные по зависимости средней продуктивности озимого ячменя от содержания подвижных фосфатов и их сравнение с результатами моделирования с использованием различных ФП

Содержание подвижных фосфатов по Олсену, мг/кг	Средняя продуктивность ячменя, т/га	Результаты моделирования функции (модели) продуктивности					
		ФПЛ	ФПК	ФПЛМ	ФПМС	ФПМСБ	ФПЛК
2	2	2,32	2,68	2,14	1,89	2,15	1,79
3	2,26	2,62	2,88	2,67	2,54	2,72	2,65
4	3,3	2,92	3,07	3,05	3,04	3,13	3,18
5	3,47	3,22	3,26	3,34	3,43	3,45	3,53
7	3,85	3,81	3,60	3,78	3,97	3,90	3,99
7	4,28	3,81	3,60	3,78	3,97	3,90	3,99
10	4,25	4,71	4,04	4,25	4,41	4,32	4,36
13	4,76	4,81	4,41	4,59	4,62	4,56	4,57
14	4,79	4,81	4,52	4,69	4,66	4,62	4,62
14	4,62	4,81	4,52	4,69	4,66	4,62	4,62
15	4,46	4,81	4,61	4,78	4,69	4,67	4,66
16	4,57	4,81	4,70	4,81	4,72	4,71	4,69
17	4,75	4,81	4,78	4,81	4,74	4,75	4,72
22	4,71	4,81	5,04	4,81	4,79	4,86	4,80
23	4,91	4,81	5,06	4,81	4,79	4,87	4,81
26	4,82	4,81	5,09	4,81	4,80	4,89	4,83
27	4,92	4,81	5,08	4,81	4,80	4,89	4,83
30	4,84	4,81	5,00	4,81	4,80	4,89	4,83
35	4,75	4,81	4,68	4,81	4,81	4,86	4,81
38	4,76	4,81	4,39	4,81	4,81	4,84	4,79
	R <sup>2</sup> =	0,923	0,847	0,945	0,968	0,960	0,965
	s =	0,25	0,35	0,21	0,16	0,18	0,16

определенность. Например, при, казалось бы, правильных предпосылках — выборе для данных приведенных, в табл. 2, наиболее адекватной ФПМС — неопределенность КУ в [36-38] оказалась неожиданно слишком высокой. Анализируя ситуацию, мы пришли к выводу, что наряду с предлагаемыми в [36-38] агрономическими



**Рис. 3.** Сравнение экспериментальных данных (эксп) с ФПЛ (линейная функция с плато, ФП Либиха), ФПК (эмпирическая квадратичная модель), ФПЛМ (модифицированная нами ФП Либиха, линейная аппроксимация от логарифмированного аргумента с плато), ФПЛК (логарифмическая квадратичная ФП, эмпирическая квадратичная модель от логарифмически преобразованного аргумента)



**Рис. 4.** Сравнение экспериментальных данных (эксп) с ФПМС (ФП Митчерлиха-Спиллмана), ФПМСБ (ФП Митчерлиха-Спиллмана в модификации Богуславского [4]), ФПЛК (эмпирическая квадратичная модель от логарифмически преобразованного аргумента)

объяснениями могли сыграть свою роль еще 2 статистических фактора. Первый — выбор очень высокого уровня приближения к максимальной продуктивности ( $Y/Y_0 = 0,98$ ), что требует практически недостижимой в полевых опытах точности, так как  $Y_0$  оценивается с достаточно большой неопределенностью. В ранних работах (например, [23]) предлагалось  $Y/Y_0 = 0,90$ , что более реалистично с той точки зрения. Второй аспект. — асимптотическое стремление производной ФПМС к 0 вблизи выбранной точки, что наряду с пологим (неопределенным) максимумом ФПМС статистически предопределяет высокую неопределенность оценки КУ (рис. 5).

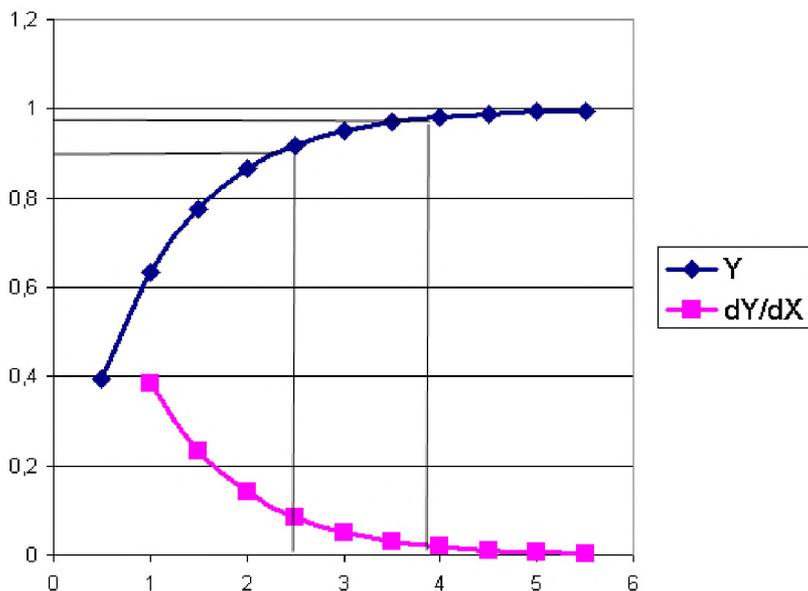


Рис. 5. Интегральная и дифференциальная формы ФПМС. Линиями показаны пересечения с графиками при  $Y/Y_0 = 0,9$   $Y/Y_0 = 0,98$

В этом отношении использование ФПЛ и ФПЛМ (с значительно более высоким значением производной до точки выхода на плато по сравнению с ФПМС) представляется более правильным с практической точки зрения для уменьшения величины неопределенности оценки до приемлемого значения.

При этом для выбора ФП следует учитывать, что рассчитанное значение КУ может оказаться для выбранного уровня значимости (если оно приближается к плато) более прецизионным, но менее правильным (в терминах стандарта ИСО 5725). Такую ситуацию следует ожидать для ФПЛ, менее вероятна такая ситуация для ФПЛМ, учитывая существенно различную степень адекватности для этих моделей в рассмотренном примере (табл. 2). Остаточная «неправильность» ФПЛМ в меньшей степени значима для правильно выбранного уровня  $Y/Y_0$ . Например, как следует из табл. 1 и рис.5, уровень правильности оценки КУ при  $Y/Y_0 = 0,90$  (что, на наш взгляд,

более реалистично, чем  $Y/Y_0 = 0,98$  с учетом экологических ограничений) для ФПМС и линейно-логарифмической аппроксимации окажется примерно одинаковым как с точки зрения прецизионности, так и правильности.

Касаясь вопроса оценки КУ, следует отметить, что в области агрономии получить КУ при  $Y/Y_0 = 0,98$  с небольшой определенностью практически невозможно. Причина этого для ФПМС рассмотрена выше. Если рассматривать эту проблему в рамках ФПМСБ или ее эмпирического приближения ФПЛК, то, согласно [5], максимум кривой максимальной продуктивности при увеличении уровня обеспеченности другим элементом питания увеличивается, и это явление проявляется в других работах, например [1, 23]. Скорее всего, говоря о КУ в современных условиях, приоритет в их оценке следует отдавать наиболее жестким из экономических или экологических ограничений [39, 40, 44, 45].

Заключительные примечания касаются возможности и целесообразности логарифмирования аргумента в ФП. В работе Sumner [57] при демонстрации метода «граничной кривой» использовал логарифмическую шкалу аргумента, что привело к более симметричному представлению ФП. Аналогичное явление было показано в [5]. Как показано в этой и ранее опубликованных нами работах [4-9, 55], логарифмирование аргумента — эффективный прием, если аргумент — адекватная в описании действующего фактора ФП физическая величина, измеряемая в абсолютных шкалах (так называемых шкалах отношений). Тогда логарифмическое преобразование имеет смысл, и однозначность, и, как показано в [8], высокую эффективность. Однако очень часто в полевых экспериментах аргументом ФП является, например, доза удобрений, которая накладывается на уже присутствующий в почве фон элемента минерального питания. В этой ситуации прямое логарифмирование некорректно, а приведение этих двух компонент к одному знаменателю не всегда легко реализуемо. Некоторые показатели, например почвенные и внесенные нитраты, могут достаточно корректно суммироваться, и этот фактор неопределенности будет снят. Однако очень часто сходные показатели в количественном отношении не согласованы. Например, содержание почвенных фосфатов, определяемых химическим методом, с дозами внесенных фосфорных удобрений не согласованы по шкалам и поэтому не могут суммироваться без дополнительных предположений (допущений) или соответствующих калибровок.

## Выводы

1. Агрономические ограничения для фосфатов в достаточной мере «размыты», что не позволяет получать оценки КУ с достаточной точностью. Поэтому приоритет в оценке КУ фосфатов в почве, по-видимому, следует отдавать наиболее жесткому из экономических или экологических ограничений.

2. В моделировании ФП логарифмирование аргумента (если оно корректно) является эффективным приемом.

3. Корректность логарифмирования аргумента в первую очередь определяется шкалой и ограничивается величинами, измеряемыми в шкале отношений.

Автор выражает благодарность коллегам из Ротамстеда, прежде всего доктору PR. Poulton, за любезно предоставленные материалы и за обсуждение основных вопросов данной работы, а также профессору Н.Ф. Хохлову за ценные критические замечания.

## Библиографический список

1. *Иванова Т.И.* Результаты применения возрастающих доз минеральных удобрений в севообороте // Применение математических методов в агрохимических исследованиях. Труды ВИУА. Вып. 56. М., 1977. С. 15-51.
2. *Митчерлих Э.А.* Почвоведение / Пер. с нем. Э.Н. Шконде / Под ред. Ф.В. Турчина. // М., 1957.417 с.
3. *Прянишников Д.Н.* Развитие взглядов на питание растений и роль Либиха в создании современного учения об удобрениях / Д.Н. Прянишников // Ю. Либих. Химия в приложении к земледелию и физиологии. М.;Л., 1936. С. 5-36.
4. *Пуховский А.В., Хохлов Н. Ф.* Метод аппроксимации и калибровки модели Митчерлиха-Спиллмана-Бауле-Богуславского // Доклады Россельхозакадемии. 2011. № 1. С. 31-34.
5. *Пуховский А.В., Ефремов В.Ф., Пуховская Т.Ю.* О методе граничной кривой в «координатном» земледелии // Плодородие. 2004. № 3. С. 25.
6. *Пуховский А.В.* Эффективность фосфорных удобрений с учётом их последствий // Мелиорация и вод. хоз-во. 2011. № 3. С. 12-14.
7. *Пуховский А.В.* К методике оценки окупаемости удобрений и химических мелиорантов // Агрохим. вестн., 2010. № 1. С. 35-40.
8. *Пуховский А.В.* Об особенностях статистической обработки результатов агрохимических исследований // Агрохимия. 2001. № 9. С. 66-74.
9. *Пуховский А.В.* Многоэлементные экстрагенты и методы в агрохимическом обследовании: концепции, принципы и перспективы. М., 2003. 102 с.
10. *Ackello-Ogutu, C, O. Paris, and W.A. Williams.* Testing a von Liebig Crop Response Function against Polynomial Specifications // Amer. J. Agr. Econ. 1985. V 67. P. 873-80.
11. *Altow, W, Rogers J.L., Raun W.R., Johnson G.V., Taylor S. L.* Long-Term Wheat-Ryegrass Forage Yields as Affected by Rate and Date of Applied Nitrogen. Journal of Production Agriculture. 1996. V 9. No 1.P 510-16'.
12. *Anderson R.L., Nelson L.A.* A family of models involving intersecting straight lines and concomitant experimental designs useful in evaluating response fertilizer nutrients // Biometrics. 1975. V 31. P. 303-318.
13. *Baule B.* Mitscherlich's law of physiological relations (In German) // Landwirtschaftliche Jahrbuecher. 1917. V. 51. P. 363-385.
14. *Belanger G., Walsh J.R., Richards J.E., Milburn P.H., Zaidi N.* Comparison of Three Statistical Models Describing Potato Yield Response to Nitrogen Fertilizer // Agronomy Journal. 2000. V 92. P. 902-8.
15. *Biermacher J.T., Brorsen B. W, Epplin F.M., Solie J.B., Raun W.R.* The Economic Potential of Precision Nitrogen Application with Wheat Based on Plant Sensing // Agricultural Economics. 2009.V. 40. P. 397-407.
16. *Berck P., Helfand G.* Reconciling the von Liebig and Differentiable Crop Production Functions // American Journal of Agricultural Economics. 1990. V. 72. P. 985-96.
17. *Bock B.R., Sikora F.J.* Modified-Quadratic Plateau Model for Describing Plant Response to Fertilizer. Soil Sci. Soc. Amer. J., 1990. V 54.P. 1784-89.
18. *Bray R.H.* Soil-plant relations. P. I. The quantitative relation of exchangeable K to crop yields and crop response to potash additions // Soil Sci., 1944. V 58. P. 305-324.
19. *Bray R.H.* Correlation of soil tests with crop response to added fertilizers and with fertilizer requirement // H.B. Kitchen, ed.) Diagnostic techniques for soil and crops. American Potash Institute, Washington, D. C. 1948. P. 53-86.
20. *Bray R.H.* A nutrient mobility concept of soil-plant relationships // Soil Sci. 1954. V 78. P. 9-22.
- Bray R.H., Kurtz L.T.* Determination of total organic, and available forms of phosphorus in soils // Soil Sci. 1945. V 59. P. 39-45.

22. *Borsen B.W., Richter F.G.C.* Experimental Designs for Estimating Plateau-Type Production Functions and Economically Optimal Input Levels // *Journal of Productivity Analysis*. 2011. P. 35.
23. *Cate R.B., Jr., Nelson L.A.* A simple statistical procedure for partitioning soil test correlation data into two classes. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 1971. V. 35. P. 658-659.
24. *Cox F.R.* Economic Phosphorus Fertilization Using a Linear Response and Plateau Function // *Commun. Soil Sci. Plant Anal.*, 1996. V 27. P. 531-43.
25. *Cox F.R.* Range in Soil Phosphorus Critical Levels with Time // *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 1992. V. 56. P. 1504-09.
26. *De Wit C.T., Goudriaan J.* Simulation of Ecological Processes (2nd edition). Pudoc, Wageningen, 1978. 175 p.
27. *De Wit C.T.* Resource use efficiency in agriculture // *Agricultural Systems*, 1992. V 40. P. 125-151.
28. *Frank M.D., Beattie B.R., Embleton M.E.* A Comparison of Alternative Crop Response Models // *American Journal of Agricultural Economics*. 1990. V. 72. P. 597-603.
29. *Grimm S. S., Paris O., Williams W.A.* Avon Liebig Model for Water and Nitrogen Crop Response // *Western Journal of Agricultural Economics*, 1987. V 12. No. 2. P. 182-192.
30. *Greenwood D.J., Wood J.T., Cleaver T.J., Hunt J.* A theory for fertilizer response. *Journal of Agricultural Science, Cambridge*. 1971. V. 77. P. 511-523.
31. *Harm sen K.* A modified Mitscherlich equation for rainfed crop production in semi-arid areas. P. 1. Theory // *Netherlands Journal of Agricultural Science*. 2000. V 48. P. 237-250.
32. *Hartz T.K., Johnstone R.R.* Relationship between Soil Phosphorus Availability and Phosphorus Loss Potential in Runoff and Drainage // *Communications in Soil Science and Plant Analysis* 2006. Volume 37, Issue 11-12. P. 1525-1536.
33. *Hexem R.W., Sposito I., Heady E.O.* Applications of a Two-Variable Mitscherlich Function in the Analysis of Yield-Water-Fertilizer Relationships for Corn // *Water Resour. Res.* 1976. 12. P. 6-10.
34. *Johnson G. I'* General-Model for Predicting Crop Response to Fertilizer. // *AGRON. J.*, 1991. V. 83. N. 2. Pp. 367-373.
35. *Johnston A. E., Poulton P.R.* Response of cereals to soil and fertilizer phosphorus // *HGCA Research Review No. 74 / Rothamsted Research Harpenden*, 2011. 54 p.
36. *Johnston A.E.* Efficient Use of Nutrients in Agricultural Production Systems // *COMMUN. SOIL SCI. PLANT ANAL.* 2000; V. 31. No 11-14. P. 1599-1620.
37. *Johnston A.E., Poulton P.R.* Plant available soil phosphorus. Part I. p. the response of winter wheat and spring barley to Olsen P on a silty clay loam / *Soil Use and Management*, 2012 — Wiley Online Library.
38. *Johnston A.E., Poulton P.R.* Plant available soil phosphorus. Part II. p. the response of arable crops to Olsen P on a sandy clay loam and a silty clay loam / *Soil Use and Management*, 2012 — Wiley Online Library.
39. *Jordan-Meille L., Rubcek. G.H., Ehlert P.A.I., Genot J', Hofman G., Goulding K., Recknagel J., Provolto G., Barraclough P.* An overview of fertilizer P recommendations in Europe. P. soil testing, calibration and fertilizer recommendations // *Soil Use and Management*. 2012. V. 28. Issue 4, P. 419-435.
40. *Kleinman P. JA, Bryant R.B., Reid W.S., Sharpley A.N., Pimentel D.* Using soil phosphorus behavior to identify environmental thresholds // *Soil Science*. 2000. V 165. P. 943-950.
41. *Liebig J. Von.* Die Grundsätze der Agrikulturchemie, mit Rücksicht auf die in England angestellten Untersuchungen. Vieweg, Braunschweig. 1855. 107 s.
42. *Liebscher G.* Untersuchungen über die Bestimmung des Düngungsbedürfnisses der Ackerböden und Kulturpflanzen. *Journal für Landwirtschaft* 43. 1895. S. 49-216.
43. *Mallarino A.P., Blackmer A.M.* Comparison of Methods for Determining Critical Concentrations of Soil Test Phosphorus for Corn // *AGRON. J.*, 1992. V. 84. N. 5. Pp 850-856.

44. *Matson P.A.* Integration of Environmental, Agronomic, and Economic Aspects of Fertilizer Management / P.A. Matson, R. Naylor, I. Ortiz-Monasterio // *Science*, 1998. V. 280. P. 112-115.
45. *McDowell R. W., Sharplev A.N.* Approximating Phosphorus Release from Soils to Surface Runoff and Subsurface Drainage // *Environ. Qual.* 2001. V 30. P. 508-520. // <http://www.ars.usda.gov/SP2UserFiles/Place/19020000/PhosphorousPubs/JEQ30p508.pdf>
46. *McDowell R., Sharplev A., Brookes R, Poulton P.* Relationship Between Soil Test Phosphorus and Phosphorus Release to Solution// *SOIL SCI.* 2001; 166.2. P. 137-149.
47. *Michaelis J., Menten M.L.* Die Kinetik der Invertwirkung. *Biochemische Zeitschrift.* 1913. 49. P. 337-369.
48. *Mitscherlich E.A.* The law of the minimum and the law of diminishing soil productivity (In German) // *Landwirtschaftliche Jahrbuecher*, 1909. V. 38. P. 537-552.
49. *Mitscherlich E.A.* Soil science for agriculture and forestry (In German). 2nd edition Verlag Paul Parey, Berlin. 1913. 317 p.
50. *Mitscherlich E.A.* Die Bestimmung des Dungerbedurfnisses des Bodens. Paul Parey. Berlin. 1924. 100 pp.
51. *Nijland G.O., Schouls Goudriaan J.* Integrating the production functions of Liebig, Michaelis-Menten, Mitscherlich and Liebscher into one system dynamics model // *NJAS — Wageningen Journal of Life Sciences.* 2008. V 55. No 2. P. 199-224. <http://library.wur.nl/ojs/index.php/njas/article/viewFile/1476/1127/>
52. *Paris O.* The Von Liebig Hypothesis. *American Journal of Agricultural Economics.* 1992. V. 74. P. 1019-1028.
53. *Paris O., Knap P K.* Estimation of von Liebig Response Functions. *Amer. J. Agr. Econ.* 1989. V 71. P. 178-86.
54. *Perrin R.K.* The Value of Information and the Value of Theoretical Models in Crop Response Research // *Amer. J. Agr. Econ.* 1976. V 58. P. 54-61.
55. *Pukhovskiv A.V.* Ability of Mitscherlich-Spillman model to estimate critical soil phosphate levels // *Int. J. of Nutrition and Food Sciences.* 2013. V. 2. No. 2. P. 45-51
56. *Spillman W.J.* Application of the Law of Diminishing Returns to Some Fertilizer and Feed Data. *Journal of Farm Economics.* 1923. V. 5. P. 36-52.
57. *Sumner M.E.* Field Experimentation: Changing to Meet Current and Future Needs // *Soil Testing: Sampling, Correlation, Calibration, and Interpretation.* / Ed. Brown J. R SSSA Special Publication Number 21 Soil Science Society of America, Inc. Madison, Wisconsin, USA. 1987. P. 119-132.
58. Status and Methods of Research in Economic and Agronomic Aspects of Fertilizer Response and Use // Publication 918, National Academy of Sciences — National Research Council, 1961. 89 p.
59. *Tembo G., Brorsen B.W., Epplin F.M., Tostao E.* Crop Input Response Functions With Stochastic Plateaus // *American Journal of Agricultural Economics.* 2008. V. 90. P. 424-34.
60. Trionfo Ernest M. The Relative Nutrient Requirements of Plants (Optimizing Nutrient Ratios in Mixed Fertilizers) // <http://www.trionfopublisliing.com/agron/agron2.htm>
61. *Timnisiime E., Brorsen B. W, Mosali J., Johnson J., Locke J., Biermacher J.T.* Determining Optimal Levels of Nitrogen Fertilizer Using Random Parameter Models // *Journal of Agricultural and Applied Economics.* 2011. V 43. No. 4. P. 541-552.
62. *Van Der Paauw P.* On the relation between growth factors and yield, and the principles that determine this relationship (In Dutch). *Landbouwkundig Tijdsclirift* 50. 1938. P. 795-830.
63. Von Boguslawski E. Die dritte Annäherung des Ertragsgesetzes. 1. Mitteilung / Von E. Boguslawski and B. Schneider // *Zeitsclirift fuer Acker- und Pflanzenbau* 114 (3). 1962. P. 221-236.
64. *Von Boguslawski E.* Die dritte Annäherung des Ertragsgesetzes. 2. Mitteilung / Von E. Boguslawski and B. Schneider // *Zeitsclirift fuer Acker- und Pflanzenbau* 116 (2). 1963. P. 113-128.
65. *Von Boguslawski E.* Die dritte Annäherung des Ertragsgesetzes. 3. Mitteilung/Von E. Boguslawski and B. Schneider // *Zeitsclirift fuer Acker- und Pflanzenbau* 119. 1964. P. 1-28.

# PRODUCTIVITY FUNCTION MODELLING AND DETERMINING OF CRITICAL LEVELS OF PHOSPHATES IN THE SOIL

A.V. PUKHOVSKIY

(Moscow State University of Environmental Engineering)

*More than 150 years many research groups from different countries studied the best ways to describe the effect of factors on the productivity of the plants — so-called productivity functions (PF). Interest to PF dealt with demands of economists, agronomists, agricultural chemists and environmentalists as it was considered as a basis for solving their problems with the use of modelling. The article describes the development of models of productivity features in agricultural chemistry and approaches to their calibration. The phenomenon of quasi-linearity ( $R^2 > 0.998$ ) of Mitscherlich and Boguslawski models within the range from 30 to 90% of efficiency after logarithmic transformation of the argument and its practical applications were considered. The limitations to the use of recommendations were discussed in relation to the properties of the scale of the studied factors. The approach proposed is applicable only to the values belonging to an absolute scale (ratio scale). The analysis of the possibility and feasibility assessment of so called critical levels of mobile phosphates was made on the base of modelling with recently published Rothamsted experimental data.*

*Key words: productivity function, modelling, model selection, the logarithm of the argument, the critical level of available phosphate, Olsen P.*

Пуховский Анатолий Владимирович — д. с.-х. н., проф. кафедры общей и инженерной экологии ФГБОУ ВПО МГУП. E-mail [pukhow\\_s-cinao@mail.ru](mailto:pukhow_s-cinao@mail.ru)