Известия ТСХА, выпуск 4, 1983 год

УДК 636.4.002.71:330.115

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ СВИНИНЫ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Т. В. БУГАЕВА

(Кафедра высшей математики)

Нерациональный выбор маршрутов при перевозках животных из репродукторных хозяйств в откормочные приводит не только к увеличению транспортных расходов, но и к значительному снижению живой массы животных в пути. В связи с этим в каждом конкретном случае требуется установить оптимальный маршрут. Разработка схемы перевозок может быть сведена к решению транспортной задачи линейного программирования. В данном сообщении мы приводим модификацию этой задачи, введя учет убытков от потери живой массы.

Пусть имеется m репродукторных хозяйств, расположенных в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Из них продукция в количествах соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ перевозится в n откормочных хозяйств, расположенных в пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, каждое из которых должно получать продукцию в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

При этом выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1}$$

соответствует транспортной задаче закрытого типа.

Стоимость перевозки 1 т продукции из пункта A_i в B_j обозначим $c_{ij}=kr_{ij}$, где k — стоимость 1 т-км, r_{ij} — расстояние в километрах. Количество перевозимой при этом продукции, которое необходимо определить, обозначим x_{ij}.

Производственная функция для потери живой массы в зависимости от расстояния $f(r_{ij})$ получается путем обработки опытных данных методом наименьших квадратов.

Из-за потерь массы j-е откормочное хозяйство получит из i-го репродукторного хозяйства уже не x_{ij} единиц продукции, а $x_{ij}[1-f(r_{ij})]$.

Если цена единицы продукции d, то убытки от потери массы по всем хозяйствам составят

$$Z_1 = d\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij})\,x_{ij}. \tag{2}$$

Затраты на перевозку продукции выражаются в виде

$$Z_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{3}$$

Условие оптимизации общих затрат $Z=Z_1+Z_2$ записывается следующим образом:

$$d\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij})\,x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{4}$$

Надо учитывать, что в связи с потерями массы транспортная задача перестает быть закрытой. Поэтому введем дополнительно фиктивный пункт отправления A_{m+1}, где количество продукции составляет

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} f(r_{ij}).$$

Далее применим аналогичный метод решения и для перевозок продукции из свинооткормочных хозяйств на мясокомбинаты. При этом будем учитывать также и потери массы животных в результате ожидания на самих мясокомбинатах.

Пусть имеем n откормочных хозяйств, расположенных в пунктах B_1, $B_2, \ldots, B_n$. Готовую продукцию этих хозяйств в количествах соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ нужно перевозить на мясокомбинаты $D_1, D_2, \ldots, D_r$, располагающие соответственно мощностями $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$. Стоимость перевозки 1 т продукции обозначим c_{ik}, среднее время ожидания на мясокомбинатах — соответственно $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Расстояние в километрах от i-го хозяйства до k-го мясокомбината r_{ik}, где $i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, r$; время перевозки продукции из i-го хозяйства на k-й мясокомбинат $t_{ik}=r_{ik}/v$, где v — скорость перевозок.

Потерю живой массы животных при транспортировке можно записать в виде производственной функции времени $f_1(t_{ik})$; при цене единицы продукции d убытки от потери живой массы Q_1 при перевозке составят

$$Q_1=d\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}f_1(t_{ik})\,x_{ik}. \tag{5}$$

Если учесть также потерю массы животных в период ожидания на мясокомбинатах, выражаемую в виде производственной функции времени $f_2(T_k)$, то убытки от общей потери живой массы Q_2 будут равны

$$Q_2=d\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}[1-f_1(t_{ik})]\,f_2(T_k)\,x_{ik}. \tag{6}$$

Затраты на транспортировку животных из откормочных хозяйств на мясокомбинаты Q_3 равны

$$Q_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}c_{ik}x_{ik}. \tag{7}$$

Условием оптимизации является минимизация суммарных затрат $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ или

$$d\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}f_1(t_{ik})\,x_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}[1-f_1(t_{ik})]\times\right.$$
$$\left.\times f_2(T_k)\,x_{ik}\right\}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}c_{ik}x_{ik}\to\min. \tag{8}$$

В связи с тем что получаемая суммарная масса меньше той, что была при отправлении, транспортная задача перестает быть закрытой. Но ее можно свести к закрытой путем введения фиктивного пункта отправления B_{n+1}, располагающего готовой продукцией в количестве

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}f_1(t_{ik})\,x_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}[1-f_1(t_{ik})]\,f_2(T_k)x_{ik}.$$

Рассмотрим далее вопрос об оптимальном выборе местоположения мясокомбината, исходя из необходимости снижения потерь живой массы животных при перевозках.

Пусть имеется n свиноводческих совхозов, каждый из которых производит продукцию в количестве m_i, предназначенную для перевозки. Совхозы расположены в точках A_i с координатами (x_i, y_i), где $i=1, 2, \ldots, n$. Требуется определить местоположение мясокомбината $M(x, y)$, перерабатывающего продукцию этих совхозов. Задачи такого рода рассматривались в [3]; здесь мы приводим решение с учетом потери живой массы перевозимых животных, зависящей от дальности перевозок.

Если считать, что снижение живой массы при перевозке происходит по линейному закону, вместо первоначальной массы m_{i0} к моменту доставки будем иметь

$$m_i=m_{i0}(1-\alpha r_i), \tag{9}$$

где r_i — расстояние от i-го совхоза до мясокомбината, а α — коэффициент пропорциональности, характеризующий потерю массы за 1 км.

При цене 1 т-км l затраты на перевозку продукции всех совхозов составят

$$Z_1 = l \sum_{i=1}^{n} m_{i0} r_i. \tag{10}$$

Далее, при цене 1 т продукции k на основании (9) денежные потери от уменьшения массы будут равны

$$Z_2 = k\alpha \sum_{i=1}^{n} m_{i0} r_i. \tag{11}$$

В сумме затраты на перевозку и убытки в результате снижения живой массы исчисляются следующим образом:

$$Z = Z_1 + Z_2 = (l + k\alpha) \sum_{i=1}^{n} m_{i0} r_i. \tag{12}$$

Так как значение коэффициента $l+k\alpha$ не зависит от местоположения мясокомбината, условие минимизации полных затрат можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i0} r_i \to \min. \tag{12'}$$

Заметим, что к тому же результату мы придем, если будем считать изменение массы не прямопропорциональным r_i, а линейной функцией r_i (например, при выравнивании опытных данных по методу наименьших квадратов). В этом случае имеем

$$Z_2 = k \sum_{i=1}^{n} m_{i0} (\alpha r_i + \beta) = k\alpha \sum_{i=1}^{n} m_{i0} r_i + k\beta \sum_{i=1}^{n} m_{i0}. \tag{13}$$

Второе слагаемое является постоянным и не влияет на минимизацию затрат.

Условие (12′) в развернутом виде записывается

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} m_{i0} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y + y_i)^2} \to \min, \tag{14}$$

где $F(x, y) = Z/(l+k\alpha)$.

Необходимые условия экстремума $\partial F/\partial x = 0$ и $\partial F/\partial y = 0$ дают систему уравнений для определения координат мясокомбината x и y

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i0} \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i0} \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0. \tag{16}$$

Решение уравнений (15) и (16) даже для не слишком больших n практически неосуществимо из-за наличия радикалов во всех слагаемых. В связи с этим в работах [3, 4] приведены методы решения таких уравнений при помощи механического моделирования системой блоков, а также метода векторного многоугольника. Хотя указанные методы применялись для задачи о перевозках без учета снижения живой массы животных, их можно использовать и в данном случае в связи с тем, что нам удалось привести задачу к условию (12′), т. е. к аналогичной математической схеме.

При решении задачи методом механического моделирования нужно на карте местности разместить в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ блоки с грузами на нитях с массами соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_n$, затем все нити скрепить в общей точке P, после чего система приводится в движение. Местоположение точки P в момент остановки системы будет соответствовать минимальным суммарным затратам на перевозку и убыткам от потери массы.

Это следует из того, что условия (15) и (16) можно записать также в виде

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i0} \cos \alpha_i = 0, \qquad (15')$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i0} \sin \alpha_i = 0, \qquad (16')$$

где α_i — углы, образуемые радиус-векторами $\bar{r}_i$ с осью абсцисс.

Условия (15′) и (16′) соответствуют равновесию системы сходящихся сил с модулями m_i.

Метод механического моделирования особенно удобен тем, что при изменении количества отдельных перевозимых грузов m_i новое решение задачи легко получается без всяких расчетов путем соответствующих увеличений или уменьшений грузов m_i.

Метод может быть распространен на случаи, когда точка P попадает на участки местности, по тем или иным причинам непригодные для строительства мясокомбината [4].

Если n достаточно велико (например, $n > 10$), то пользоваться методом механического моделирования не вполне удобно. И здесь наиболее эффективным представляется метод векторного многоугольника.

Перейдем далее к вопросам оптимизации перевозок пищевых отходов из районов г. Москвы для откормочных свиноводческих совхозов. В г. Москве и городах Московской области в 1981 г. заготовлено 894,2 тыс. т пищевых отходов общественного и индивидуального питания населения, а также отходов пищевой промышленности, овощных и продовольственных баз [1]. Наибольшую их часть потребляют 11 подмосковных свинооткормочных совхозов, причем в кормовом рационе свиней такие отходы занимают в этих хозяйствах в среднем около 30 % [1, 2], а в перспективе намечается довести использование пищевых отходов для свиней до 35—40 % питательности рациона.

Одним из важных путей снижения транспортных затрат является нахождение оптимальных транспортных связей между поставщиками и потребителями. Основной схемой для решения задач о перевозках также служит модель транспортной задачи линейного программирования.

Постановка задачи. Имеется 32 поставщика пищевых отходов (районы г. Москвы) и 11 потребителей. Требуется организовать систему перевозок пищевых отходов, обеспечивающую полное удовлетворение потребностей в них свинооткормочных хозяйств, при минимуме транспортных затрат.

Экономико-математическая модель для поставленной задачи имеет вид: найти значения x_{ij}, минимизирующие целевую функцию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (17)$$

при выполнении ограничений

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (19)$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \qquad (20)$$

Здесь x_{ij} — количество пищевых отходов, перевозимых из i-го района в j-й совхоз; r_{ij} — соответствующее расстояние; a_i — общее количество пищевых отходов, поставляемых i-м районом; b_j — потребность j-го совхоза в отходах.

Так как $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, необходимо условно ввести фиктивного

Объемы перевозок пищевых отходов для свиноводческих совхозов Московской области

Откормочные свиносовхозы	По оптимальному решению		По фактическим данным	
	тыс. т-км	среднее расстояние перевозок	тыс. т-км	среднее расстояние перевозок
«Белая Дача»	513,3	15	752,8	22
«Заря коммунизма»	788,4	56	704,0	50
«Знамя Октября»	868,1	32	997,4	37
«Им. Моссовета»	474,2	22	1034,7	48
«Им. 10-летия Октября»	1254,2	51	1486,6	60
«Им. 50-летия Октября»	1138,7	48	929,3	39
«Красный луч»	905,5	30	996,3	33
«Останкино»	1147,4	39	1192,0	41
«Подольский»	683,0	51	759,6	57
«Сафоновский»	605,5	45	645,6	48
«Серп и молот»	747,8	24	1646,6	53
Итого	9126,1	—	11144,9	—

потребителя и тем самым свести открытую модель транспортной задачи к закрытой.

Тогда экономико-математическая модель запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{32}\sum_{j=1}^{12} r_{ij}\bar{x}_{ij} \to \min, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{12} \bar{x}_{ij}=a_i \quad (i=1, 2,...,32), \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{32} \bar{x}_{ij}=b_j \quad (j=1, 2,...,12), \tag{23}$$

$$\bar{x}_{ij} \geqslant 0. \tag{24}$$

Потребности хозяйств в пищевых отходах, получаемых из районов г. Москвы, определялись по фактическим объемам их использования в среднем за период 1978—1981 гг. за вычетом отходов, доставленных из городов Московской области. Возможные объемы поставок пищевых отходов определены также исходя из сбора их в среднем за 1978—1981 гг.

Расчеты производились на ЭВМ «Минск-32» в вычислительном центре Тимирязевской академии.

В результате решения задачи получены данные (таблица), свидетельствующие о том, что общий объем перевозок пищевых отходов можно сократить на 18,1 %. При оптимизации перевозок для всех совхозов уменьшается, кроме того, число связей (район Москвы — совхоз). Так, в совхоз «Серп и молот» пищевые отходы доставляются из 9 районов, а согласно решению задачи, можно ограничиться поставками из 4 районов. Это позволит сократить общий объем транспортных затрат (т-км) в 2,2 раза, а среднее расстояние перевозок — с 53 до 24 км.

Выводы

1. При оптимизации схем перевозок животных из репродукторных хозяйств в откормочные и из последних на мясокомбинаты необходимо, используя при расчетах модель транспортной задачи линейного программирования, учитывать убытки от снижения живой массы в пути и при ожидании во время сдачи, что позволяет получить более точное ее решение.

2. При выборе оптимального местоположения мясокомбината одним из важных показателей, учитываемых при решении соответствую-

щих задач, должны явиться потери живой массы животных при транспортировке.

3. На основании указанной модели транспортной задачи линейного программирования составлена и решена задача оптимизации перевозок пищевых отходов из районов г. Москвы в откормочные совхозы Московской области. Результаты ее решения показывают, что объем транспортных затрат в этом случае можно значительно сократить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евтушенко В. И. Важный резерв пополнения кормовых ресурсов. — Экономика сельск. хоз-ва, 1981, № 10, с. 54—57. — 2. Рогожкина Л. В совхозе «Серп и молот». — Свиноводство, 1982, № 4, с. 4—7. — 3. Файнзильбер А. М. Математические методы в задачах экономики с.-х. производства. М.: ТСХА, 1976.— 4. Файнзильбер А. М., Фридлендер Б. И. Оптимизация и механические модели транспортных сетей при выборе центров обслуживания. — Тр. I Всесоюз. конфер. АН СССР по оптимизации и моделированию транспортных сетей. Киев, 1967, с. 113—123.

Статья поступила 18 января 1983 г.

SUMMARY

The work suggests the solution of the problem of optimization of hog breeding produce taking into account the loss in live mass of animals under transportation. It gives the calculation allowing to determine the optimal location of the packing house also with the account of losses of life mass. The authors composed and solved the problem of optimization of food waste transportation from the districts of Moscow city for hog fattening state farms of the Moscow region.