

УДК 63.001.4

**ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ПОЛЕВОГО ОПЫТА
И ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СХЕМ
ГЛАВНЫХ ЭФФЕКТОВ ФАКТОРОВ**

И. А. РУБАНОВ, А. М. ЛЫКОВ, Н. Н. КЛИМЕНКО
(Кафедра земледелия)

С интенсификацией сельскохозяйственного производства особое значение приобретают проблемы количественной оценки факторов жизнедеятельности растений и определения факторов, которые лимитируют урожайность сельскохозяйственных культур в конкретных природно-производственных условиях. Решение поставленной

задачи возможно только в полевом опыте, в условиях, максимально приближенных к хозяйственным.

В настоящее время в планировании полевого опыта выделяют следующие этапы:

1 — выбор факторов для изучения;

2 — выбор единиц измерений, в которых выражаются эффекты факторов;

3 — выбор участка, на котором проводится опыт, и ограничения на размер опыта;

4 — выбор схемы опыта, которая позволяет оценить эффекты факторов и характер их влияния на урожайность сельскохозяйственных культур;

5 — наблюдения за ростом растений и запись результатов;

6 — анализ результатов опыта, вычисленные эффекты факторов и других показателей;

7 — обобщение серии опытов.

Признавая важность каждого из названных выше этапов в планировании полевого опыта, остановимся только на двух: на выборе схемы опыта и анализе его результатов.

В основе статистического анализа экспериментальных данных лежит статистическая модель, вид которой определяется множеством теоретических предложений. Для модели полевого опыта общая посылка следующая: урожайность равна сумме общей средней урожайности по всем вариантам опыта, эффектов вариантов, эффектов сопутствующих факторов и остатка (ошибки).

К сопутствующим факторам можно, в частности, отнести различия между блоками, направленное изменение почвенного плодородия и т. п. Остаток в модели — это та часть урожайности, которая не учтена введенными ранее членами модели. Если опыт правильно спланирован, то остаток можно использовать для оценки стандартных ошибок эффектов изучаемых факторов. При планировании полевого опыта необходимо стремиться к уменьшению остатка в модели, т. е. к повышению точности опыта. Этого можно достигнуть, используя методы повторения, блокировки и ковариации.

Известно, что ошибка единичного наблюдения равна корню квадратному из числа повторений. Если точность опыта удвоилась, т. е. ошибка единичного наблюдения уменьшилась в 2 раза, то общее число делянок в полевом опыте должно увеличиться в 4 раза. Хотя повторение с экономической точки зрения невыгодно (увеличиваются затраты труда), оно необходимо для оценки ошибки опыта. В случае сложных многофакторных схем опыта (так называемых факториальных схем), в которых изучается несколько факторов одновременно, повторение для эффектов факторов уже учтено в самой схеме.

Рассмотрим полевой опыт, в котором изучаются три фактора — A , B и C , каждый на двух уровнях. В таком опыте 8 вариантов. Под эффектом фактора A будем понимать разность $A_1 - A_0$, где A_0 и A_1 — влияние данного фактора на урожайность соответственно на нижнем и верхнем уровнях. В таком опыте эффект фактора A рассматривается при четырех различных комбинациях факторов B и C . Следовательно, эффект фактора A в такой схеме повторен 4 раза. Отсюда появляется возможность при проведении опыта по сложной многофакторной схеме достичь минимального числа повторений при высокой точности оценки эффектов изучаемых факторов.

Обычно в сложных полевых опытах однородные по плодородию делянки группируют вместе, что и образует блок. В этом случае часть вариации из остатка в модели приписывается различиям между блоками. Если делянки, сгруппированные в одном блоке, более однородны по плодородию, чем сами блоки, то остаток в модели может быть уменьшен эквивалентно числу дополнительных повторений.

Использование дополнительной информации о свойствах делянок также позволяет уменьшить размер остатка в модели. Эту информацию можно получить из уравнительного посева, который дает некоторое представление о вариации почвенного плодородия. Для увеличения точности опыта можно использовать, в частности, данные о популяциях почвенных организмов перед посевом. Устранить влияние на результаты некоторой неоднородности участка, о которой известно до закладки опыта, можно, применив прием ковариации [2].

При планировании полевого опыта важно также обеспечить получение несмещенных оценок эффектов факторов и их стандартных ошибок. Это достигается с помощью метода рендомизации. Если используется рендомизированный экспериментальный план, то при статистическом анализе результатов можно полностью игнорировать наличие реального или подразумеваемого тренда в почвенном плодородии участка и мнение о том, что соседние участки более похожи, чем удаленные. Отсутствие рендомизации может привести к искажениям оценки эффектов изучаемых факторов в модели, и их стандартные ошибки не могут быть получены.

Понятие эффекта факторов. В модели полевого опыта оценка эффектов вариантов производится через оценку эффектов факторов. Рассмотрим полевой опыт, в котором изучается отзывчивость трех сортов пшеницы (V) на азотные (N) и фосфорные (P) удобрения на трех уровнях:

первый фактор: три сорта — V_1, V_2, V_3 ;
второй фактор три уровня $N - N_0, N_1, N_2$;
третий фактор: три уровня $P - P_0, P_1, P_2$.

Полная факториальная схема такого опыта состоит из 27 вариантов, т. е. существует 27 всевозможных комбинаций трех факторов на трех уровнях каждый. Опыт проведен в одном повторении со случайным размещением вариантов по делянкам.

Введем понятие главного эффекта фактора. Главный эффект, например, фактора V на уровне l равен:

$$(V_l) = \bar{y}(V_l) - \bar{y}, \quad (1)$$

где (V_l) — главный эффект фактора V ; \bar{y} — общая средняя урожайность по всем вариантам опыта; $\bar{y}(V_l)$ — средняя урожайность по всем вариантам с V_l .

Если не существует взаимодействий между факторами, то можно предсказать урожайность в варианте опыта, используя модель только из главных эффектов

факторов. Например, ожидаемая урожайность \hat{y} в варианте $V_2N_0P_2$ равна

$$\hat{y}(V_2N_0P_2) = \bar{y} + (V_2) + (N_0) + (P_2), \quad (2)$$

где (V_2) , (N_0) , (P_2) — главные эффекты соответствующих факторов, которые определены по уравнению (1).

Если, однако, существует взаимодействие между изучаемыми факторами (например, отзывчивость сортов пшеницы зависит от норм азотных и фосфорных удобрений), то будут наблюдаться большие расхождения между фактическими урожайными данными, которые получены в опыте, и данными, рассчитанными по уравнению (2).

Введем понятие эффекта взаимодействия двух факторов, например V_2 и N_0 . Эффект их взаимодействия $(V_2 \times N_0)$ равен

$$(V_2 \times N_0) = \bar{y}(V_2N_0) - \hat{y}(V_2N_0), \quad (3)$$

где $\bar{y}(V_2N_0)$ — средняя урожайность по всем вариантам, содержащим V_2 и N_0 ; $\hat{y}(V_2N_0)$ — средняя ожидаемая урожайность по всем вариантам с V_2 и N_0 , рассчитанная по уравнению (2).

Таким образом, можно предсказать урожайность в конкретных вариантах опыта, используя модель из главных эффектов факторов и их двухфакторных взаимодействий.

Различия между фактическими и ожидаемыми данными об урожайности, которые рассчитаны по модели с учетом двухфакторных взаимодействий, дают оценку трехфакторного взаимодействия изучаемых факторов.

Для упрощения вычислений эффектов факторов и их взаимодействий главные эффекты факторов разлагают на компоненты.

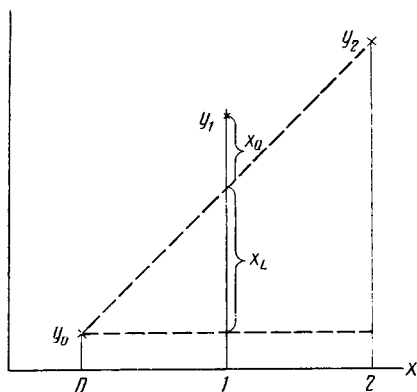
Рассмотрим трехуровневый фактор X . Главный эффект фактора X в случае равномерно возрастающих уровней можно разбить на две компоненты, каждой из которых будет соответствовать одна степень свободы в дисперсионном анализе.

Если обозначить урожайность трех последовательных уровней фактора X через y_0 , y_1 и y_2 , то разность $(y_2 - y_0)/2$ будем называть линейной компонентой главного эффекта фактора X .

Выражение $(y_0 + y_2 - 2y_1)/2$ назовем квадратичной компонентой главного эффекта фактора X .

Две компоненты главного эффекта фактора X обозначим X_L и X_Q соответственно для линейной и квадратичной компоненты. На рисунке представлена геометрическая интерпретация введенных выше компонент трехуровневого фактора X .

Удвоенное значение линейной компоненты есть та прибавка урожайности, которая получится, если вместо нормы X_0 будет использоваться норма X_2 , квадратичная компонента определяет кривизну линии урожайности. В этом случае модель полевого опыта будет представлять собой линейную комбинацию общей средней урожайности по всем вариантам опыта, линейных и квадратичных компонент эффектов факторов и их взаимодействий [3].



Геометрическая интерпретация линейной и квадратичной компонент главного эффекта трехуровневого фактора.

Каталог ортогональных схем главных эффектов факторов. Простейшими схемами опытов являются полные факториальные схемы, в которых изучаются различные комбинации факторов и их уровней. Статистический анализ таких схем с использованием модели полевого опыта описан в работе [3]. Но эти схемы имеют ряд существенных недостатков. Во-первых, с увеличением количества изучаемых факторов резко возрастает число вариантов. Например, если в опыте изучаются три фактора, каждый на трех уровнях, то полная факториальная схема содержит 27 вариантов. Если же изучаются четыре фактора, то число вариантов возрастает до 81. Во-вторых, полные факториальные схемы несут в себе информацию о взаимодействиях высокого порядка, которые не представляют практического интереса для исследователя. Поэтому возникла задача — уменьшить число вариантов в полной факториальной схеме, пожертвовав взаимодействиями высокого порядка. В ряде работ рассматриваются методы построения таких неполных факториальных схем [1, 4—6].

В сельскохозяйственной практике часто возникает необходимость в количественной оценке факторов жизнедеятельности растений и в определении факторов, которые лимитируют урожайность сельскохозяйственных культур. В этом случае не решается задача оценки оптимальных условий выращивания растений и, следовательно, предполагается отсутствие взаимодействий между изучаемыми факторами. Причем эти факторы могут быть количественными и качественными. Схема опыта для решения поставленной задачи должна содержать минимум вариантов. Плаккет [7] доказал: для независимой оценки главных эффектов любых факторов A и B в схеме опыта необходимо и достаточно, чтобы

$$n_{ij} = n_{A_i} n_{B_j} / N, \quad (4)$$

где n_{ij} — число вариантов, в которых факторы A и B встречаются вместе; n_{A_i} , n_{B_j} — число вариантов, в которых факторы A и B встречаются соответственно

на i -м и j -м уровнях; N — общее число вариантов в схеме опыта.

Если схема опыта допускает независимую оценку всех главных эффектов факторов, то для любой пары факторов должно выполняться условие (4). Если для некоторой схемы опыта справедливо условие (4), то эта схема позволяет получить ортогональную оценку всех главных эффектов факторов и их компонент.

Основываясь на условии (4), Аддельман [5] разработал каталог схем, которые позволяют оценить главные эффекты факторов и их компоненты для различного числа факторов и их уровней. Некоторые из таких схем приведены ниже. Каталог построен следующим образом. Он содержит пять так называемых основных планов, в которых факторы изучаются на одинаковом количестве уровней. Из этих планов по определенному правилу можно получить другие схемы опытов.

Максимальное число факторов (t) в схеме, которая содержит s^n вариантов, где s — простое число или степень простого числа, и которая позволяет получить ортогональные оценки главных эффектов факторов и их компонент, определяется по формуле

$$t = \frac{s^n - 1}{s - 1}. \quad (5)$$

В основном плане 1 восемь вариантов. Согласно соотношению (5), максимальное число факторов, которое может содержать схема из восьми вариантов, где каждый фактор изучается на двух уровнях, будет равно

$$t = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7.$$

Основной план 1:
2⁷; 8 вариантов

1234567
0000000
0001111
0110011
0111100
1010101
1011010
1100110
1101001

Основной план 2:
3⁴; 2⁴; 9 вариантов

1234	1234
0000	0000
0112	0110
0221	0001
1011	1011
1120	1100
1202	1000
2022	0000
2101	0101
2210	0010

В основном плане 2 девять вариантов. Согласно соотношению (5), он содержит ортогональные схемы главных эффектов для четырех факторов: 3⁴ 2⁴. Из этого плана можно получить ортогональные схемы главных эффектов вида 3^{t₁} × 2^{t₂}, где t₁ + t₂ = 4, т. е. 3⁴, 3³ × 2, 3² × 2², 3 × 2³, 2⁴, при использовании следующего соответствия между трехуровневыми и двухуровневыми факторами:

Правило 1

3-уровневый фактор	→	2-уровневый фактор
0	→	0
1	→	1
2	→	0

Например, ортогональная схема главных эффектов 2² × 3² может быть полу-

чена стягиванием первых двух трехуровневых факторов в двухуровневые по правилу 1. После соответствующих преобразований получим ортогональную схему главных эффектов 2² × 3².

0	0	0	0
0	1	1	2
0	0	2	1
1	0	1	1
1	1	2	0
1	0	0	2
0	0	2	2
0	1	0	1
0	0	1	0

Легко проверить, что полученная схема удовлетворяет необходимому и достаточному условию ортогональности главных эффектов факторов (4).

Основной план 3 содержит ортогональные схемы главных эффектов факторов 4⁵, 3⁵, 2¹⁵. Из этих схем можно получить ортогональные схемы главных эффектов 4^{t₁} × 3^{t₂} × 2^{3t₃}, где t₁ + t₂ + t₃ ≤ 5.

Основной план 3: 4⁵; 3⁵; 2¹⁵; 16 вариантов

12345	12345	00000	00001	11111
*****	*****	12345	67890	12345

00000	00000	00000	00000	00000
01123	01121	00001	10111	01110
02231	02211	00010	11011	10011
03312	01112	00011	01100	11101
10111	10111	01100	00110	11011
11032	11012	01101	10001	10101
12320	12120	01110	11101	01000
13203	11201	01111	01010	00110
20222	20222	10100	01011	01101
21301	21101	10101	11100	00011
22013	22011	10110	10000	11110
23130	21110	10111	00111	10000
30333	10111	11000	01101	10110
31210	11210	11001	11010	11000
32102	12102	11010	10110	00101
33021	11021	11011	00001	01011

1/000	2/000	3/000	4/111	5/111
*{123	*{456	*{789	*{012	*{345

В основном плане 3 четырех- и трехуровневые факторы обозначены

1	2	3	4	5
*	*	*	*	*

а двухуровневые факторы

0	0	1
1	2	15.

Внизу плана указывается порядок замещения столбца четырех- и трехуровневых факторов на соответствующие три столбца двухуровневых факторов. Например, ортогональную схему главных эффектов 2³ × 4⁴ можно получить следующим образом: заменить в схеме 4⁵ первый столбец на три первых столбца, т. е.

0 0 0	1 2 3
из схемы 2 ¹⁵	или второй столбец в схеме 4 ⁵
на три столбца	из схемы 2 ¹⁵ , т. е.
0 0 0	

Аналогично строится схема 4⁵ 6. Ортогональная схема главных эффектов 4² × 3² × 2³ может быть построена следующим образом: первый фактор в схеме 4⁵ замещается первыми тремя фак-

торами из схемы 2^{45} , второй и третий факторы в схеме 4^5 замещаются вторым и третьим факторами из схемы 3^5 . Получим схему:

A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	2	3
0	0	0	2	2	3	1
0	0	0	1	1	1	2
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	3	2
0	1	1	2	1	2	0
0	1	1	1	2	0	3
1	0	1	0	2	2	2
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	2	0	1	3
1	0	1	1	1	3	0
1	1	0	0	1	3	3
1	1	0	1	2	1	0
1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	1	0	2	1

Проверим выполнение условия (5).
Рассмотрим факторы A и D:

$$N = 16; n_{A_0} = n_{A_1} = 8; n_{D_0} = n_{D_2} = 4;$$

$$n_{D_1} = 8; n_{A_0 D_0} = n_{A_0 D_2} = 2; n_{A_0 D_1} = 4.$$

$$n_{A_0 D_0} = \frac{n_{A_0} n_{D_0}}{16} = \frac{8 \cdot 4}{16} = 2 \text{ (верно),}$$

$$n_{A_0 D_1} = \frac{n_{A_0} n_{D_1}}{16} = \frac{8 \cdot 8}{16} = 4 \text{ (верно),}$$

$$n_{A_0 D_2} = \frac{n_{A_0} n_{D_2}}{16} = \frac{8 \cdot 4}{16} = 2 \text{ (верно) и т. д.}$$

Если число изучаемых факторов $t_1 + t_2 + t_3 < 5$, то в соответствующих схемах отбрасываются лишние столбцы.

С основным планом 4 для построения ортогональных схем главных эффектов $3^{t_1} \times 2^{t_2}$, где $t_1 + t_2 \leq 7$, поступаем так же, как и с основным планом 1.

Основной план 4:
3⁷; 2⁷; 18 вариантов

1234567	1234567
0000000	0000000
0112111	0110111
0221222	0001000
1011120	1011100
1120201	1100001
1202012	1000010
2022102	0000100
2101210	0101010
2210021	0010001
0021011	0001011
0100122	0100100
0212200	0010000
1002221	1000001
1111002	1111000
1220110	1000110
2010212	0010010
2122020	0100000
2201101	0001101

Основной план 5 содержит 25 вариантов.

Основной план 5:
5⁵; 4⁵; 3⁵; 2⁵; 25 вариантов

123456	123456	123456	123456
000000	000000	000000	000000
011234	011230	011220	011110
022413	022013	022012	011011
033142	033102	022102	011101
044321	000321	000221	000111
101111	101111	101111	101111
112340	112300	112200	111100
123024	123020	122020	111010
134203	130203	120202	110101
140432	100032	100022	100011
202222	202222	202222	101111
213401	213001	212001	111001
224130	220130	220120	110110
230314	230310	220210	110110
241043	201003	201002	101001
303333	303333	202222	101111
314012	310012	210012	110011
320241	320201	220201	110101
331420	331020	221020	111010
342104	302100	220100	101100
404444	000000	000000	000000
410123	010123	010122	010111
421302	021302	021202	011101
432031	032031	022021	011011
443210	003210	002210	001110

Он позволяет получить большое число различных ортогональных схем главных эффектов факторов, используя правила стягивания факторов. Рассмотрим эти правила. Правило 1 введено ранее.

Правило 2

Правило 3

4-уровне- вый фак- тор		3-уровне- вый фак- тор	5-уровне- вый фак- тор		3-уровне- вый фак- тор
0	→	0	0	→	0
1	→	1	1	→	1
2	→	2	2	→	2
3	→	1	3	→	2
			4	→	0

Правило 4

Правило 5

5-уровне- вый фак- тор		4-уровне- вый фак- тор	4-уровне- вый фак- тор		Три 2-уровне- вых факто- ра		
0	→	0	0	→	0	0	0
1	→	1	1	→	0	1	1
2	→	2	2	→	1	0	1
3	→	3	3	→	1	1	0
4	→	0					

Правило 6

Три 2-уровне- вых факто- ра				4-уровне- вый фак- тор
0	0	0	→	0
0	1	1	→	1
1	0	1	→	2
1	1	0	→	3

Рассмотрим пример. Необходимо построить ортогональную схему главных эффектов $3^2 \times 5^4$. Используя правило 3,

первые два фактора преобразуем в трехуровневые. Получим искомую схему.

Предположим, необходимо построить ортогональную схему главных эффектов $2^3 \times 4^3$. Тогда первый фактор в схеме 4^6 замещаем тремя двухуровневыми факторами, используя правило 5.

Правило 6 используется для построения схем типа $4^t_1 \times 2^t_2$, содержащих минимальное число вариантов. Например, схема 4×2^4 может быть получена из основного плана 1, в котором первые три двухуровневых фактора замещаются одним

четырёхуровневым согласно правилу 6:

0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0
2	0	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	1	1	0
3	1	0	0	1

Следует заметить, что многократные использования введенных выше правил позволяют получить разнообразные ортогональные схемы главных эффектов факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский В. З., Бродский Л. И., Голикова Т. И., Никитина Е. П., Понченко Л. А. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей. М.: Металлургия, 1982.
2. Литтл Т., Хиллз Ф. Сельскохозяйственное опытное дело. Планирование и анализ. М.: Колос, 1981.
3. Рубанов И. А. Статистический анализ факторных опытов 2^n , 3^m , $2^n \times 3^m$. — Химия в сельск. хоз-ве, 1976, № 3, с. 71—76.
4. Рубанов И. А., Михайлов Н. Н., Тимохина Л. А. Методические указания по применению математических методов планирования эксперимента в сельском хозяйстве. М.: Колос, 1973.
5. Addelman S. — Technometrics, 1962, vol. 4, N 1, p. 21—46.
6. Baun R. M. de. — Technometrics, 1959, vol. 1, N 1, p. 1—8.
7. Plackett R. L. — Biometrika, 1946, vol. 33, p. 328—332.

Статья поступила 8 июля 1982 г.

SUMMARY

Main principles of planning field experiments are discussed. The term "effect of factors and their interactions" is introduced. A catalogue of plans is given on the basis of which one can design various schemes of field experiments for evaluation of main effects of factors.