

## ОПТИМИЗАЦИЯ НОРМ УДОБРЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕВЫХ КУЛЬТУР С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Е. Л. МАТВЕЕНКО

(Кафедра высшей математики, кафедра компьютеризации учебного процесса и ТСО)

Методы математического моделирования позволяют количественно оценивать влияние различных факторов на урожайность, находить оптимальное соотношение минеральных и органических удобрений с учетом почвенно-климатических условий, экономической и агрономической окупаемости удобрений. В работе получены производственные функции зависимости урожая сельскохозяйственных культур от удобрений, почвенных и климатических факторов, а также формулы для расчета окупаемости удобрений урожаем и чистым доходом.

Урожайность сельскохозяйственных культур определяется комплексом взаимосвязанных условий. При внедрении интенсивных технологий возрастает роль экономических методов анализа влияния различных факторов производства на его конечный результат.

Известно, что в условиях достаточного увлажнения на дерново-подзолистых почвах, характерных для Центрального района Нечерноземья, основную прибавку урожайности можно получить за счет применения минеральных и органических удобрений, а также проведения других мероприятий, направленных на повышение плодородия почвы. Построенные нами на основе обобщения данных [4] производственные функции зависимости урожайности сельскохозяйственных культур от минеральных удобрений и почвенно-климатических факторов наглядно показали, что она в основном определяется уровнем минерального питания и почвен-

ного плодородия и лишь в незначительной степени зависит от погодных условий. Например, для урожайности ячменя (культуры, наиболее отзывчивой на внесение минеральных удобрений) в условиях Владимирской области были получены следующие зависимости:

$$y = 2664,03 + 12,41N + 2,00P - 6,00K, \quad R = 0,506;$$

$$y = -32466,68 + 9,02N + 3,47P - 1,86K + 5358,06pH + 330,03P_2O_5 + 672,34G, \\ R = 0,847;$$

$$y = 998,92 + 12,00N + 1,74P - 5,45K + 59,04t + 0,008OC, \\ R = 0,547; \quad (3)$$

$$y = -43713,27 + 8,17N + 3,09P - 0,93K + 5930,01pH + 491,44P_2O_5 + 1932,93G + 82,276t - 7,85OC, \\ R = 0,889, \quad (4)$$

где  $y$  — урожайность ячменя (кг/га),  $N$ ,  $P$ ,  $K$  — соответственно норма внесения азотных, фосфорных и калийных

удобрений (кг д. в. на 1 га); рН — реакция почвенной среды;  $P_2O_5$  и Г — соответственно содержание подвижного фосфора (мг-экв на 100 г почвы) и гумуса (%); t и ОС — средняя температура и сумма осадков в критический для развития ячменя период (июнь — июль); R — коэффициент множественной корреляции. Все полученные уравнения достоверны статистически по критерию F.

Анализ уравнений (1) — (4), коэффициентов отдельного определения и детерминации показывает, что 25—26 % урожая ячменя в условиях Владимирской области формируется в результате внесения минеральных удобрений. При введении в модель почвенных условий на эти 2 фактора приходится уже 78,6 % вариации, а добавление климатических условий повышает коэффициент множественной детерминации до 0,790, т. е. 79,0 % общей вариации объясняется введенными в анализ факторами. Таким образом, 50 % вариации урожайности ячменя являются результатом воздействия почвенных условий и около 1 % — климатических факторов в критический период развития растений.

Линейный вид уравнения связи позволяет на основе коэффициентов регрессии определить количественную меру воздействия каждого из факторов на урожайность при фиксированном уровне остальных. Наибольшие значения имеют коэффициенты регрессии при факторах, определяющих почвенные условия. Это означает, что мероприятия, направленные на повы-

шение содержания в почве подвижного фосфора, обменного калия, увеличение процента содержания гумуса в почве, обеспечение близкой к нейтральной реакции почвенной среды (особенно при внесении физиологически кислых минеральных удобрений в кислые — рН = 4,5 ÷ 5,3 — почвы Владимирской области), в сочетании с правильным применением минеральных удобрений могут существенно повысить урожайность ячменя. Из удобрений наибольшее влияние на урожайность ячменя оказывают азотные, являющиеся основным источником питания зерновых культур и обеспечивающие формирование колоса хорошей наполненности зерном высокого качества. Отрицательный коэффициент регрессии при факторе калийных удобрений объясняется тем, что почвы были в достаточной мере обеспечены обменным калием.

Однако внесение калийных удобрений является необходимым для оптимизации соотношения макро- и микроэлементов питания. Например, недостаток калия может привести к неполному усвоению растениями азота и фосфора. Кроме того, калий повышает устойчивость растений к различным заболеваниям.

Из погодных факторов наибольшее влияние оказывает температурный режим.

Аналогичные уравнения были получены и для озимой пшеницы.

$$y = 2429,48 - 1,35N + 2,02P + 4,22K, R = 0,238; \quad (5)$$

$$y = -3253,16 - 1,60N + 1,85P +$$

$$+ 4,53K + 1126,63pH + \quad (6)$$

$$+ 85,34P_2O_5 - 441,21Г,$$

$$R = 0,837;$$

$$y = 4845,21 - 1,19N + 2,21P +$$

$$+ 4,43K - 129,11t - 2,72OC, \quad (7)$$

$$R = 0,319;$$

$$y = 4845,21 - 1,96N + 106,94P +$$

$$+ 10,27K + 9789,98pH +$$

$$+ 17,17P_2O_5 + 2363,64Г +$$

$$+ 2030,71t - 2,29OC, \quad (8)$$

$$R = 0,849,$$

где  $y$  — урожайность озимой пшеницы (кг/га); остальные обозначения те же, что и выше.

Отрицательный коэффициент регрессии при показателе «вне- сение азотных удобрений» сви- детельствует о том, что в усло- виях обильного увлажнения их использование без применения средств, препятствующих поле- ганию, может привести к сни- жению урожайности. Кроме то- го, внесение азотных удобрений под озимую пшеницу должно проводиться в правильные агро- технические сроки, в несколько приемов, с дополнительным оп- ределением потребности в азо- том питании с помощью метода листовой диагностики или дру- гих.

В результате анализа зависи- мости урожайности ( $y$ ) зерно- вых культур, в том числе ячменя, от уровня содержания гумуса в почве ( $Г$ ) получено следующее уравнение:

$$y = -38,227 + 15,256Г,$$

$$R = 0,425. \quad (8a)$$

Таким образом, вариация уро- жайности ( $R^2$ ) на 18,1 % опре- деляется уровнем содержания

гумуса в почве, который можно повысить путем внесения орга- нических удобрений.

Внесение органических удоб- рений как отдельно, так и в со- четании с минеральными непо- средственно под урожай будуще- го года способствует увеличению прибавки урожайности (табл. 1). При внесении органических удобрений затраты питательных веществ на получение 1 ц при- бавки урожая были значительно ниже, чем при внесении только минеральных удобрений. Кроме того, одним из преимуществ ор- ганических удобрений является их экологическая чистота, спо- собность улучшать основные свойства почвы и повышать эф- фективность минеральных удоб- рений.

Однако при корреляционно- регрессионном анализе влияния органических удобрений на уро- жайность, как правило, выяв- ляется отрицательная зависи- мость между данными показате- лями, поскольку органические удобрения имеют последнее действие и не используются полностью под урожай текущего года. В свя- зи с этим целесообразно прово- дить пересчет урожайности сель- скохозяйственных культур в еди- ные кормовые или зерновые еди- ницы и расчет в целом по сево- обороту, учитывая урожайность различных культур.

В табл. 2 представлены резуль- таты расчета экономической эф- фективности применения удоб- рений в севообороте по данным [3, 4]. Опыт проводился на Вла- димирской государственной сельскохозяйственной опытной станции на серых лесных почвах в 7-польном севообороте: вико-

Таблица 1

Урожайность полевых культур во Владимирской области в зависимости от органических удобрений [4]

Вариант опыта	Урожайность, ц/га	Прибавка урожая к контролю, ц/га	Затрачено NPK удобрений на 1 ц прибавки урожая, ц д. в.*
<i>Ячмень Московский, опыт 1979 г.</i>			
Контроль (без удобрений)	22,4	—	—
Навоз (40 т/га)	25,7	3,3	0,69
40N40P80K	27,4	5,0	3,13
40N40P80K + навоз (40 т/га)	31,5	9,1	1,42
<i>Картофель 4 Гатчинский, опыт 1982 г.</i>			
Контроль (без удобрений)	204	—	—
Навоз (40 т/га)	205	1	0,21
80N50P100K	262	58	25,21
80N50P100K + навоз (40 т/га)	270	66	9,3
<i>Озимая пшеница Мироновская 808, опыт 1974 г.</i>			
Контроль (без удобрений)	29,0	—	—
Навоз (40 т/га)	30,6	1,6	0,33
80N30P60K	37,7	8,7	4,58
80N30P60K + навоз (40 т/га)	37,9	8,9	1,32

\* При расчете затрат NPK органических удобрений на 1 ц прибавки урожая принимали, что 1 т навоза содержит в среднем 12 кг д. в. NPK.

Таблица 2

Экономическая эффективность применения удобрений в севообороте (в расчете на 1 га)

Показатель	Вариант внесения удобрений					
	1	2	3	4	5	6
Полученная урожайность, зерн. ед.	222,5	257,37	271,05	299,48	276,95	290,90
Прибавка урожайности, зерн. ед.	—	34,87	48,55	76,98	54,45	68,40
Стоимость прибавки урожая в закупочных ценах 1983 г., руб.	—	1171,04	1648,25	2519,16	1861,63	2503,44
Внесено удобрений:						
минеральных — всего, кг д. в.	0	0	1120	1126	560	2240
в т. ч.:						
азотных	0	0	400	400	200	800
фосфорных	0	0	240	240	120	480
калийных	0	0	480	480	240	960
органических, т	0	80	0	80	40	0
Затраты на применение удобрений, руб.	—	192,00	378,79	570,79	585,40	757,58
Чистый доход от применения удобрений, руб/га	—	979,04	1269,46	1978,37	1276,23	1745,86
Окупаемость удобрений:						
прибавкой урожая, зерн. ед. на 1 кг д. в. удобрений	—	3,63	4,33	3,73	4,92	3,08
стоимостью дополнительной продукции, руб. на 1 руб. затрат	—	6,10	4,35	4,41	3,18	3,31

овсяная смесь — озимая пшеница с подсевом трав — травы 1-го года пользования — травы 2-го года пользования — озимая пшеница — картофель — ячмень. Расчеты проводили в среднем по 3 полям для 6 вариантов опыта: 1 — контроль (без внесения удобрений); 2 — 80 т навоза на 1 га; 3 — 60N10P60K; 4 — 60N10P60K + навоз 80 т; 5 — 30N5P30K + навоз 80 т; 6 — 120N20P120K.

Максимальная окупаемость удобрений урожаем и стоимостью дополнительного производства отмечена в 1-м варианте, минимальная — в 5-м, т. е. агрономическая и экономическая эффективность органических удобрений выше, чем минеральных. Кроме того, применение высоких (двойных) норм последних приводит к накоплению азотистых и некоторых других соединений минеральных удобрений в продукции, что снижает ее качество. Все это настоятельно требует оптимизации норм внесения удобрения.

Для решения этой задачи мы предлагаем использовать следующий подход. Пусть почва содержит  $x_0$  единиц питательных веществ, в нее с удобрениями дополнительно внесено  $x$  единиц питательных веществ, при этом получена урожайность  $y = F(x)$ . В этом случае окупаемость удобрений урожаем  $\eta(x)$  может быть рассчитана по формуле

$$\eta(x) = \frac{F(x)}{x+x_0}.$$

Найдем производную  $\eta(x)$ .

$$\eta'(x) = \frac{F'(x)(x+x_0) - F(x)}{(x+x_0)^2} = 0. \quad (9)$$

Необходимое условие экстремума позволяет нам определить  $x_*$ , которое может соответствовать максимальному значению  $\eta$ :

$$F'(x_*) = \frac{F(x_*)}{x_*+x_0}. \quad (10)$$

Для проверки достаточного признака экстремума подсчитаем

$$\eta''(x_*) = \frac{F''(x_*+x_0)^3 - 2(x_*+x_0) \times \times [F'(x_*)(x_*-x_0) - F(x_*)]}{(x_*+x_0)^4}.$$

В силу необходимого условия экстремума второй член числителя равен нулю, и окончательно получаем

$$\eta''(x_*) = \frac{F''(x_*)}{x_*+x_0}.$$

Так как график кривой урожайности  $F(x)$  является выпуклым ( $F'(x)$  убывает),  $F''(x_*)$ , а следовательно, и  $\eta''(x_*)$  меньше 0, т. е. имеем максимум  $\eta(x)$ . Уравнению (9) можно дать простую геометрическую интерпретацию, позволяющую определять  $x_*$  даже без вычислений. Для этого отложим от начала координат по оси  $OX$  влево отрезок  $OA$  длиной  $x_0$ . Тогда для определения  $x_*$  нужно провести из точки  $A$  касательную к графику  $F(x)$ . Для искомого точки  $D$  с абсциссой  $x_*$  имеем

$$F'(x_*) = \frac{F(x_*)}{x_*+x_0},$$

т. е. условие (10). Точка  $D$ , как видно из рис. 1, находится в пределах обрабатываемой исходной информации, для которых справедливо полученное уравнение регрессии.

Перейдем далее к часто встречающемуся случаю, когда, начиная с некоторого значения норм

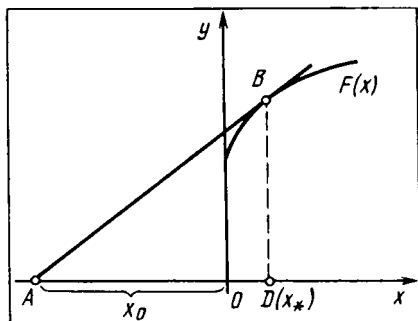


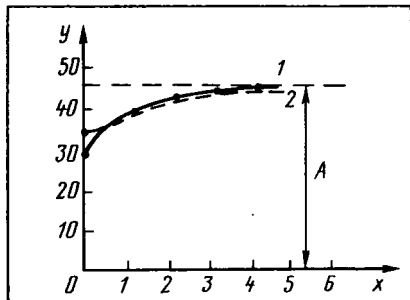
Рис. 1. Геометрическая интерпретация нахождения максимума окупаемости удобрений урожаем.

удобрений  $x$ , урожайность почти не увеличивается (табл. 3, рис. 2). Такие изменения можно назвать асимптотическими.

Таблица 3  
Урожай зерна кукурузы в зависимости от различных норм внесения удобрений (по данным ВИУА [3, с. 56—61])

Вариант внесения удобрений	Сумма НРК удобрений, ц д. в./га	Урожайность, ц/га	Прибавка урожайности к контролю, ц
1	0	32,2	—
2	0,9	35,2	3,0
3	1,8	38,9	3,7
4	2,7	41,2	2,3
5	3,6	43,3	2,1
6	4,5	43,6	0,3

Рис. 2. Изменение урожая (ц/га) зерна кукурузы ( $y$ ) в зависимости от различных норм (ц д. в.) удобрений ( $x$ ). Выравненный (1) и фактический (2) уровни урожайности.



В этом случае скорость роста урожайности стремится к 0, т. е. можно воспользоваться зависимостью для урожайности ( $y$ )

$$\frac{dy}{dx} = k(A - y), \quad (11)$$

где  $k$  — положительная константа;  $A$  — наибольшая урожайность. Разделяя переменные, интегрируя и вводя переменную  $z = \ln(A - y)$ , получаем

$$z = -kx + b, \quad (12)$$

где  $b$  — произвольная постоянная интегрирования.

Величина  $A$  известна из опыта. Для определения же значений  $k$  и  $b$  выравняем данные для  $n$  опытных точек с координатами  $(x_i; z_i)$  по методу наименьших квадратов. Нормальные уравнения для этого случая будут иметь следующий вид:

$$-k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i,$$

$$-k \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n z_i. \quad (13)$$

Из системы (13) определяем коэффициенты  $k$  и  $b$ .

Далее, подставляя полученные значения коэффициентов  $k$  и  $b$  в (12), получим

$$y = A - e^{b-kx}. \quad (14)$$

В случае асимптотического изменения урожайности не имеет смысла говорить о соответствующей ее максимуму норме удобрений, но можно рассчитать норму удобрений, соответствующую наибольшему чистому доходу  $P$  от их применения.  $P$  может быть вычислена

$$P = My - ax - B, \quad (15)$$

где  $M$  — закупочная цена 1 ц продукции;  $a$  — затраты на при-

менение 1 ц д. в. удобрений;  $B$  — прочие расходы, не зависящие от  $x$ .

Согласно необходимому условию экстремума

$$\frac{dP}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{M}. \quad (16)$$

Достаточное условие для наличия максимума при этом выполняется, т. к.

$$\frac{d^2P}{dx^2} = M \frac{d^2y}{dx^2} \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

а следовательно, и  $\frac{d^2P}{dx^2}$  меньше

0, поскольку график для  $y$  имеет выпуклую форму. Подставляя в условие (16) выражение для  $y$  из (14), получаем

$$ke^{b-kx} = \frac{a}{M},$$

откуда

$$x = \frac{1}{k} \left( b - \ln \frac{a}{Mk} \right), \quad (17)$$

и урожайность, соответствующая максимуму чистого дохода от применения удобрений, составит

$$y = A - \frac{a}{Mk}. \quad (18)$$

Найдем эти значения для данных табл. 3. Как видно из рис. 2, величина  $A$  может быть принята равной 44 ц/га. Используя данные табл. 3 и рис. 2, получаем систему нормальных уравнений для нахождения параметров  $k$  и  $b$ :

$$-44,55k + 13,5b = 2,313,$$

$$-13,5k + 6b = 6,05.$$

Откуда  $k = 0,797$ ;  $b = 2,802$ .

Учитывая затраты на приме-

нение 1 ц д. в. удобрений (в среднем 18,63 руб.) и среднюю закупочную цену на зерно кукурузы (14,75 руб/ц) из уравнений (17) и (18) получим, что максимум чистого дохода от применения удобрений будет достигнут при внесении 2,94 ц суммарного количества действующего вещества минеральных удобрений на 1 га, при этом урожайность зерна кукурузы составит 42,42 ц/га.

## Выводы

1. Использование производственных функций позволяет выявлять закономерности и количественные характеристики влияния различных факторов на урожайность сельскохозяйственных культур, а также определять оптимальный вариант внесения удобрений с учетом этих факторов.

2. При анализе эффективности удобрений необходимо наряду с агрономическими показателями использовать показатели экономической эффективности, учитывающие затраты на применение удобрений.

3. В ряде случаев использование критерия максимума чистого дохода от применения удобрений оказывается предпочтительным по сравнению с критериями максимума урожайности или максимума агрономической эффективности, так как может быть применен и тогда, когда эти критерии не дают ответа на поставленную задачу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агрохимия / Под ред. Б. А. Ягоди-

на.— М.: Колос, 1982.— 2. Бюллетень ВИУА № 59.— М., 1982.— 3. Инструкция и нормативы по определению экономической и энергетической эффективности применения удобрений.— М.: ЦИНАО, 1987.— 4. Результаты исследований в длительных опытах с удобрениями по зонам страны.— Тр. ВИУА, 1979, вып. 8.— 5. Файнзильбер А. М., Матвеев Е. Л. Приме-

нение методов экстремума для определения норм удобрений.— Изв. ТСХА, 1985, вып. 6.— 6. Шатилов И. С., Чудновский А. Ф. Агрофизические, агрометеорологические и агротехнические основы программирования урожая.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.

*Статья поступила 20 февраля 1989 г.*

## SUMMARY

Methods of mathematical modelling allow to quantitatively estimate the effect of different factors on yield, to find optimal proportion of mineral and organic fertilizers with allowance for soil and climatic conditions, economic and agronomic payback of fertilizers. Production functions of dependence of crop yield on fertilizers, soil and climatic factors, as well as formulae for calculating the payback of fertilizers by yield and pure profit are discussed.