ТЕХНОЛОГИЯ ХРАНЕНИЯ И ПЕРЕРАБОТКИ И КАЧЕСТВА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

Известия ТСХА, выпуск *2,* 2013 год

УДК 66.045(045)

ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ В ДВИЖУЩИХСЯ ВЫСОКОВЯЗКИХ ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТАХ

С.А. БРЕДИХИН, К.А. РАШКИН

(РГАУ-МСХА ИМЕНИ К.А.ТИМИРЯЗЕВА)

Статья посвящена аналитическому решению задачи определения изменения температуры высоковязких пищевых продуктов при их осесимметричном течении в теплообменном элементе скребкового аппарата непрерывного действия. Получены результаты для практического применения.

Ключевые слова: теплообмен, скребковые теплообменники, аналитическое исследование, высоковязкие пищевые продукты, осесимметричное течение несжимаемой вязкой жидкости, модифицированное давление.

Тепловую обработку высоковязких пищевых продуктов (сливочное масло, сгущенное молоко, кетчупы, майонезы, соусы и др.) осуществляют в скребковых аппаратах непрерывного действия. Температура продукта и ее изменение во времени являются важным технологическим параметром, характеризующим эффективность работы аппарата [1-2, 4-7].

В статье рассмотрена задача распределения температуры в продукте, движущемся в скребковом теплообменном аппарате.

Основной частью скребкового аппарата является теплообменный элемент. Он представляет собой (рис. 1) конструкцию из двух соосных сварных теплообменных пластин 1 вместе с лопастным ножом-мешалкой 3. Набор последовательно соединенных теплообменных элементов образует теплопередающую поверхность аппарата для нагревания или охлаждения высоковязкого продукта. Внутри теплообменного элемента поток продукта принудительно закручивается с помощью крестообразных вращающихся лопастей ножа-мешалки, захватывающих практически все пространство между дисками.

Продукт поступает в пространство между дисками как из центрального отверстия, так и из отверстий, расположенных на периферии дисков. При этом лопасти могут вращаться как по отношению к неподвижным дискам, так и совместно с одним из дисков по отношению к другому неподвижному диску.

Течение обрабатываемого продукта внутри теплообменного элемента имеет сложную траекторию. Поэтому будем изучать распределение температуры продукта

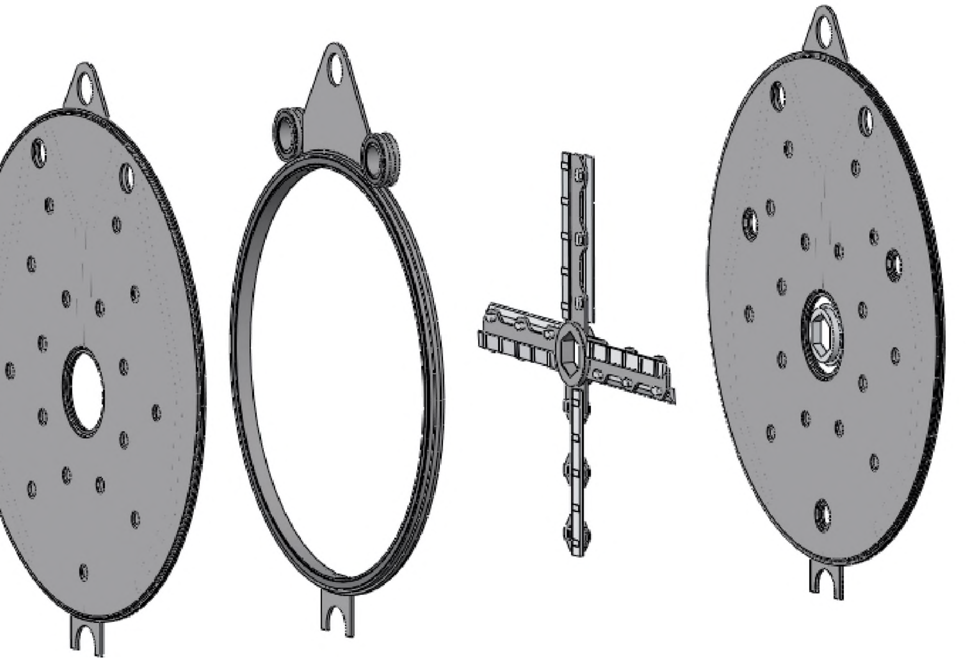

Рис. 1. Основные конструктивные элементы пластинчатого скребкового теплообменника Р3-ОУА: 1 — сварная теплообменная пластина, 2 — уплотнительное кольцо, 3 — нож-мешалка

в теплообменном элементе с помощью дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

где T — температура в точках продукта, °С, r и z — цилиндрические координаты точки продукта, v_r и v_z − проекции скорости точек продукта на оси r и z, a — коэффициент температуропроводности, м^2/сек.

Полагаем, что осевая скорость продукта v_z значительно меньше радиальной v_r и окружной v_φ скоростей, поэтому в уравнении (1) положим $v_z \dfrac{\partial T}{\partial z} \approx 0$.

Расчетная схема для определения температуры продукта при его течении в продуктовых каналах аппарата показана на рис. 2.

Для определения радиальной скорости воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного течения несжимаемой вязкой жидкости, полагая в нем коэффициент вязкости ц и плотность продукта р, не зависящими от температуры для данной пары дисков (охлаждающего элемента)

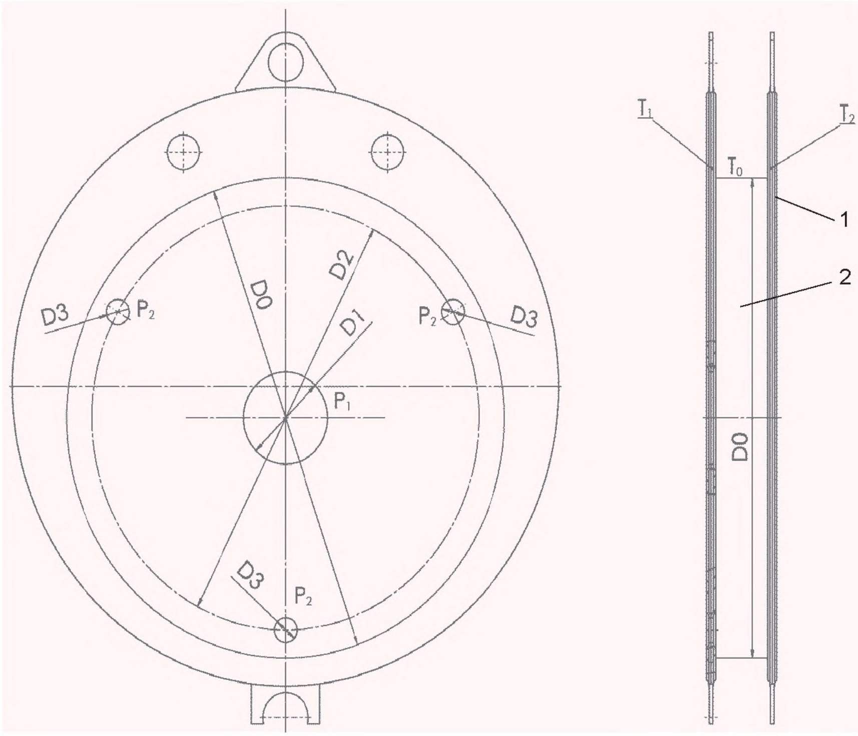

Рис. 2. Расчетная схема: 1 — теплообменные пластины, 2 — продукт; DO — размер, ограничивающий продуктовую зону, D1 —диаметр входного отверстия; D2 — диаметр, на котором расположены выходные отверстия; P_1 — давление продукта на входе в теплообменный элемент; P_2 — давление продукта на выходе из теплообменного элемента

$$-\frac{v_{\varphi}^{2}}{r}+\frac{1}{с}\frac{\partial p}{\partial r}=н\left(\frac{\partial^{2}v_{r}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{r}}{\partial r}+\frac{\partial^{2}v_{r}}{\partial z^{2}}-\frac{v_{r}}{r^{2}}\right), \tag{2}$$

где p — давление в точках продукта, Па; v — коэффициент кинематической вязкости продукта, м^2/сек, равный

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}. \tag{3}$$

Учитывая принудительное вращение продукта, примем, что его угловая скорость равна угловой скорости ю вращения лопастей, т. е.

$$V_{\varphi}\approx\omega r \tag{4}$$

В силу этого два слагаемых в левой части уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$-\frac{v_{\varphi}^{2}}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}, \tag{5}$$

где P — модифицированное давление, Па.

Модифицированное давление представляет разность между истинным давлением продукта и давлением, которое было бы в нем только при его вращении с угловой скоростью [3]:

$$P = p - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 . \tag{6}$$

При условии постоянства расхода продукта через любое цилиндрическое сечение пространства между пластинами теплопередающего элемента будем искать решение уравнения (2) в следующем виде:

$$v_r = \frac{1}{r} f(z) . \tag{7}$$

Подстановка выражений (5) и (7) в (2) с учетом (3) дает

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} f''(z), \tag{8}$$

где ’’ — вторая производная по координате z.

Чтобы дифференциальное уравнение (8) имело решение, нужно

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\psi(z). \tag{9}$$

Интегрируя левую и правую части равенства (9) по координате *r*, получим для модифицированного давления выражение

$$P = (\mu \ln r)\psi(z) + \xi(z). \tag{10}$$

Для определения произвольных функций *ψ(z)* и *ζ(z)* воспользуемся граничными условиями

$$r = R_1, \quad P = P_1; \quad r = R_2, \quad p = P_2, \tag{11}$$

где — модифицированное давление на входе продукта в междудисковое пространство, а P_2 — модифицированное давление на выходе продукта. Эти давления равны

$$P_1 = p_1 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_1^2, \quad P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_2^2, \tag{12}$$

где P_1 и P_2 — истинные давления продукта соответственно во входном и выходном сечениях.

Подставив граничные условия (11) в равенство (10), получим систему двух алгебраических уравнений относительно искомых функций. Решив эти уравнения, получим

$$\psi(z) = \frac{P_1 - P_2}{\mu \ln \dfrac{R_1}{R_2}}, \quad \xi(z) = \frac{P_1 \ln R_2 - P_2 \ln R_1}{\ln \dfrac{R_1}{R_2}} . \tag{13}$$

На основании (13) выражение для модифицированного давления (10) запишется в следующем виде:

$$P = \frac{P_1 \ln \frac{r}{R_2} - P_2 \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}. \tag{14}$$

Найдем двукратным интегрированием по z функцию $f(z)$ из (8) с учетом (9) и (13)

$$f(z) = \frac{P_1 - P_2}{\mu \ln \frac{R_1}{R_2}} \left(\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \right), \tag{15}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, которые находятся на основании (7) из условия прилипания продукта к стенкам дисков

$$z = 0, v_r(r, 0) = 0, f(0) = 0; \quad z = h, v_r(r, h) = 0, f(h) = 0, \tag{16}$$

где h — расстояние между дисками. Подставив в равенство (15) граничные условия (16), найдем

$$C_1 = -\frac{h}{2}, \quad C_2 = 0. \tag{17}$$

Наконец, на основании (15) и (17), выражение радиальной скорости (7) примет следующий вид:

$$v_r = \frac{P_1 - P_2}{2\mu \ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} (z^2 - hz). \tag{18}$$

Выразим радиальную скорость через секундный расход продукта q, используя формулу для расхода $q = 2\pi r \int_0^h v_r \, dz$. Подставив выражение v_r из (18) и интегрируя его по координате z, находим

$$\frac{P_1 - P_2}{2\mu \ln \frac{R_1}{R_2}} = -\frac{3q}{\pi h^3}. \tag{19}$$

Таким образом, с учетом (19) выражение радиальной скорости (18) примет следующий вид:

$$v_r = -\frac{3q}{\pi h^3} \frac{1}{r} (z^2 - hz). \tag{20}$$

Перейдем к определению температуры в продукте по уравнению (1) с учетом $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для этого подставим в левую часть данного уравнения выражение радиальной скорости из (18) или (19) и разделим его левую и правую части на коэффициент температуропроводности a. После этого получим:

$$\frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} (z^2 - hz) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{21}$$

Поскольку точного аналитического решения данного уравнения получить нельзя, воспользуемся приближенным решением, заключающемся в частичном осреднении его конвективной части по области течения и использовании метода последовательных приближений. Для этого в левой части равенства (21) положим

$$\frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} (z^2 - hz) \frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{1}{h}\int_0^h \frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \frac{R_1}{R_2}} (z^2 - hz)\, dz = -\frac{(P_1 - P_2)\, h^2}{12\mu a \ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{22}$$

Введем следующее обозначение:

$$A = -\frac{(P_1 - P_2)\, h^2}{12\mu a \ln \frac{R_1}{R_2}}, \tag{23}$$

или с учетом (19)

$$A = \frac{q}{2\pi h a}. \tag{23*}$$

В дальнейшем для практических расчетов будем использовать формулу (23*) поскольку расход продукта может быть определен гораздо точнее, чем разность модифицированных давлений, так как в эту разность войдут потери давления на гидродинамическое сопротивление.

Подстановкой соотношения (22) с учетом (23) или (23*) в левую часть уравнения (21) придем к однородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}(1 - A) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{24}$$

Данное уравнение решаем при следующих граничных условиях:

$$r = R_1,\ T = T_1,\ z = 0,\ T = T_3,\ z = h,\ T = T_4, \tag{25}$$

где и T_3 и T_4 — температуры продукта на стенках дисков.

Решение линейного уравнения (24) найдем методом разделения переменных, добавив к его общему решению частное решение специального вида. Для этого положим

$$T(r, z) = R(r)\ Z(z) + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3). \tag{26}$$

Подстановкой этого выражения T в (22) и разделения переменных получим для функций $R(r)$ и $Z(z)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0\,, \tag{27}$$

$$r R'' + R'(1 - A) - \lambda^2 r R = 0\,, \tag{28}$$

где λ^2 - константа разделения.

Решение уравнения (27) имеет следующий вид:

$$Z(z) = C_1 \cos\lambda z + C_2 \sin\lambda z\,. \tag{29}$$

В силу двух последних граничных условий (25) и выражения (26) функция Z(z) должна обращаться в ноль при z = 0 и z = h. Отсюда следует:

$$C_1 = 0\,, \quad \lambda = \frac{k\pi}{h}\,, \quad k = 1, 2, \ldots\infty\,, \tag{30}$$

т. е. общее решение уравнения (24) будет представлено рядом Фурье по синусам.

Уравнение (28) является уравнением Бесселя произвольного порядка, зависящего от константы A. Поскольку такие функции не табулированы, то дальше будем решать уравнение (24) методом последовательных приближений. Для этого проведем оценку порядка слагаемых в этом уравнении, приведя его к безразмерному виду. Напишем соотношения между размерными и безразмерными величинами

$$T = T_0\,T'\,, \quad r = R_0\,r'\,, \quad z = h\,z'\,, \tag{31}$$

где T_0— характерная размерная величина искомой функции, T' — безразмерная искомая функция, r' — безразмерная радиальная координата, R_0 — характерный радиальный размер, z' — безразмерная осевая координата. В качестве характерной осевой координаты взято расстояние h между дисками.

Перейдя в уравнении (24) к безразмерным величинам получим

$$\frac{h^2}{R_0^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{(1-A)\,h^2}{R_0^2}\frac{1}{r'}\frac{\partial T'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} = 0\,. \tag{32}$$

Таким образом, в безразмерном уравнении (32) порядки слагаемых будут определяться только порядками коэффициентов в этих слагаемых. Для оценки порядка этих коэффициентов примем следующие порядки конструктивных параметров охладителя и параметров обрабатываемого продукта: h ~ 0,01 м, ~ 0,01 м, R_2 ~ 0,1 м, q ~ 10^{-4} м^3/с, μ ~ 1 Па • с, a ~ 10^{-6} м^2/с. Коэффициент A во втором слагаемом, согласно (23*) будет иметь порядок 10^4, т. е. $A » 1$. Коэффициент в последнем слагаемом уравнения (32) имеет порядок 1. Принимая во внимание, что $\frac{h^2}{R_0^2} < \frac{A h^2}{R_0^2} \sim 1$, оставим в уравнении (32), а значит и в уравнении (24) два последних слагаемых. На этом основании уравнение (24) для нулевого приближения при условии $A >> 1$ примет следующий вид:

$$-\frac{A}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\,. \tag{33}$$

Решим уравнение (33) методом разделения переменных, представив его решение в виде (26). После разделения переменных для функций $R(r)$ и Z(z) получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{R'}{R}=-\frac{\lambda^2}{A}r\,, \tag{34}$$

и (27), решением, которого будет функция (29) при значениях констант (30). Решение уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (34) запишется в виде

$$R(r)=C_3\,e^{-\frac{\lambda^2}{2A}r^2}\,, \tag{35}$$

где C_3 — постоянная интегрирования. Таким образом, на основании (26), (29), (30) и (35) получим решение уравнения (33) в виде ряда

$$T(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}\,\sin\frac{k\pi}{h}z+T_3+\frac{z}{h}(T_4-T_3)\,, \tag{36}$$

где C_k = C_2C_3 и индекс $к$ показывает, что эта константа будет зависеть от номера k собственных чисел λ из (30).

Найдем постоянные интегрирования C_k, используя первое граничное условие (25), т. е. $T(R_1,\ z)\ =\ T_1$. На основании этого условия и соотношения (36) получим уравнение для определения $C_к$

$$T_1-T_3-\frac{z}{h}(T_4-T_3)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}\,\sin\frac{k\pi}{h}z\,. \tag{37}$$

Используя формулу для определения коэффициентов ряда Фурье на интервале $O\ <\ z\ <\ h$, найдем

$$C_k=\frac{2}{k\pi}[\,T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\,\pi\,]\,e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}\,. \tag{38}$$

Таким образом, распределение температуры в пространстве между дисками в нулевом приближении на основании (36) и (38) примет следующий вид:

$$T(r,z)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\,T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\,\pi\,]\,e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}\,\sin\frac{k\pi}{h}z+T_3+\frac{z}{h}(T_4-T_3)\,. \tag{39}$$

Для нахождения первого приближения решения уравнения (24) подставим найденное решение нулевого приближения в ранее отброшенное слагаемое $\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ этого уравнения. После этого придем к неоднородному линейному уравнению в частных производных

$$-\frac{A}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{2\pi}{Ah^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\,[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\,\pi]\left(1-\frac{k^2\pi^2}{Ah^2}r^2\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}\,\sin\frac{k\pi}{h}z\,. \tag{40}$$

Будем искать решение этого уравнения в таком же виде, как и решение уравнения (33) нулевого приближения, т. е.

$$T(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k)\,r\,\sin\frac{k\pi}{h}z+T_3-\frac{z}{h}(T_3-T_4)\,, \tag{41}$$

где $F_k(r)$ — неизвестная пока функция, зависящая от координаты r и номера k собственных чисел λ из (30). Подстановкой выражения $T(r, z)$ из (41) в левую часть уравнения (40) и приравниванием коэффициентов при $\sin\frac{k\pi}{h}z$ в левой и правой частях уравнения (40) получим обыкновенное линейное уравнение первого порядка относительно функции $F(r)$

$$\frac{A}{r}\frac{dF_k}{dr}+\frac{k^2\pi^2}{h^2}F_k=-\frac{2\pi k}{Ah^2}[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\pi]\left(1-\frac{k^2\pi^2}{Ah^2}r^2\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}. \quad (42)$$

Решением этого уравнения является функция

$$F_k(r)=-\frac{2\pi k}{A^2h^2}[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\pi]\left(\frac{r^2}{2}-\frac{k^2\pi^2}{4Ah^2}r^4\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}+C_k^*\,e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}, \quad (43)$$

где C_k^* – постоянная интегрирования.

На основании (41) и (43) имеем

$$T(r,z)=-\frac{\pi}{A^2h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{k[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\pi]\left(r^2-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^4\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}+\right.$$
$$\left.+C_k^*e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}\right\}\sin\frac{k\pi}{h}z+T_3-\frac{z}{h}(T_3-T_4). \quad (44)$$

Постоянную интегрирования $C_к{}^*$ находим так же, как и постоянную C_K для нулевого приближения, т. е. из условия $T(R_1,\ z)\ =\ T_1$. Точно так же, как и в равенстве (37) получим разложение функции, стоящей в левой части этого равенства в ряд Фурье по синусам. Из формулы для определения коэффициентов этого ряда находим

$$C_k^*=-k[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos k\pi]\left(\frac{2A^2h^2}{k^2\pi^2}+R_1{}^2-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1{}^4\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}. \quad (45)$$

Подставив данное выражение $C_к$ в правую часть равенства (44) приведем его

Формула (46) представляет решение уравнения (24) при граничных условиях (25) в первом приближении. Эта формула может быть применена для расчета температуры и ее распределения в движущемся продукте, как при центральном способе его подачи, так и при периферийном способе подачи в пространство между дисками. В первом случае $R_1 < R_2$, $P_1 > P_2$, а во втором случае наоборот $R_1 > R_2$, $P_1 < P_2$.

Библиографический список

1. *Бредихин С.А.* Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности. М.: Колос, 2010. 408 с.

2. *Бредихин С. А.* Техника и технология производства сливочного масла. М.: Колос, 2007. 319 с.

3. *Бэтчелор Д.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 560 с.

4. Переработка молока: специализированный журнал // Отраслевые ведомости. 2011. №8. С. 24-28.

5. *Kessler H.G.* Lebensmittel- und Bioverfalirensteclmik. Munchen: Verlag A. Kessler, 1996. 705 s.

6. *SpreerE.* Teclmologie der Milchverarbeitung. Hamburg: Belir’s Verlag, 1995. 517 s.

7. *WalstraP., JennesR.* Dairy Chemistry and Physics. New-York.: John Willey & Sons, Inc., 1984. 635 p.

HEAT TRANSFER IN MOVING HIGHLY VISCOUS FOOD PRODUCTS

S.A. BREDIKHIN, K.A. RASHKIN

(RSAU-Timiryazev MAA)

The article is devoted to the analytical solution of the problem of how to determine the temperature fluctuations in highly viscous food products when they flow in axially symmetrical direction in a heat exchange element of the scraper apparatus with continuous action. The obtained results should be applied in practice.

Key words: heat exchange, scraper heat exchanger, analytical investigation, highly viscous food products, axisvmmetric flow of incompressible viscous liquid, modified pressure.

Бредихин Сергей Алексеевич — д. т. н,, проф., заведующий кафедрой процессы и аппараты перерабатывающих производств РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева (127550, г. Москва, ул. Верхняя аллея, 4а; тел.: 8 (499) 977-92-73; e-mail: bredihin2006@yandex.ru).

Рашкин Кирилл Александрович — аспирант кафедры процессы и аппараты перерабатывающих производств РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева. E-mail: llirik-moscow®, yandex.ru.