

УДК 631.544.4:631.811:517.54

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГРАММ ВНЕСЕНИЯ МИНЕРАЛЬНЫХ УДОБРЕНИЙ В ТЕПЛИЦАХ

П. А. АПОСТОЛ

(Кафедра овощеводства)

Данные о выносе элементов минерального питания гибридами томата и огурца аппроксимировались нами разными методами, отличительной чертой которых является применение математических функций: логистической, Гомпертца, экспоненциальной, динамики первого порядка и др.

Приведенные примеры расчетов показывают, что программирование внесения удобрений с помощью предлагаемых уравнений может с успехом применять агроном-технолог при наличии персонального компьютера. Это позволяет отказаться от проведения многочисленных химических анализов.

Ранее нами были описаны системы удобрения в теплицах [1, 2], разработанные на основе применения программированного управления. Предлагаемые нами управляющие программы составлялись с учетом трех следующих основных допущений:

1-е — имеющиеся сведения о выносе растениями основных элементов минерального питания с удовлетворительной для практики точностью прогнозируют процесс для определенных условий выращивания в конкретной климатической зоне;

2-е — согласно известной модели материального баланса в объеме [6] количество вещества в нем должно остаться постоянным, т. е. выходные и входные потоки должны быть равны. Для нас это означает, что тот или иной минеральный элемент питания необходимо вносить в корневую среду в соответствии с законом выноса его растением (если такой закон известен);

3-е — изолированные от подпочвенного горизонта небольшие объемы корневых сред ($5-20 \text{ л/м}^2$), в которых воздушный, влажностный и температурный режимы регулируются, не вносят существенных изменений в процесс минерального питания растений. Для культур на инертных субстратах и на воде это положение выполняется практически полностью. Культуры, субстратом корневой среды которых служат материалы, обладающие адсорбционными или химическими реакционными свойствами, предварительно исследуются с тем, чтобы внести коррективы с учетом этих свойств.

В данной статье рассматривается несколько способов математического обобщения эмпирических данных о выносе элементов минерального питания различными гибридами огурца и томата с целью составления программ-прогнозов внесения удобрений в корневые среды с ограниченным объемом.

Методика

Информация для расчетов была получена в вегетационных и производственных опытах, которые проводились в стеклянных отопляемых теплицах в Тимирязевской академии и в хозяйствах г. Киева.

В вегетационных опытах растения огурца выращивали в проточной водной культуре. Детальная методика их описана в [3, 4]. Характеристика гибридов приведена в [3]. В производственных опытах (1991 г.) использовали гидропонные теплицы, всю площадь которых занимали бетонные бассейны, заполненные гранитной щебенкой слоем 25—30 см (срок эксплуатации щебенки 12 лет). Площадь опытных участков 0,5 и 0,1 га. Рассадку томатов сорта Украинец (детерминантного, среднераннего) выращивали в горшочках с гранитной щебенкой и дополнительно облучали лампами ДРЛФ-400 мощностью 400 Вт/м² по 12 ч в сутки до 18 января 1991 г. Семена высевали 10 и 22 ноября 1990 г. В одном из производственных опытов питательная емкость содержала 30 л питательного раствора на 1 м², в другом — 40 л. Корректировку концентрации питательного раствора до исходной проводили 1 раз в 5—12 сут. Питательный раствор за период вегетации периодически подтоплял субстрат корневой среды 2—4 раза в сутки.

В вегетационных опытах интегральный вынос азота и других минеральных элементов определяли по уравнению

$$U(t) = \sum W_i(t) X_i(t), \quad (1)$$

где $U(t)$ — количество минерального элемента, содержащегося в биомассе растений к моменту времени t , г/м²; $W_i(t)$ и $X_i(t)$ — воздушно-сухая биомасса и относительное содержание минерального элемента в

i -м органе растений, г/м²; i — множество корней, стеблей, черешков, листьев и плодов.

В производственном опыте вынос элементов определяли по уравнению

$$U(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \Delta U(t)_j = \sum_{i=1}^{i=n} V_0 [C_0 - C_A(t)]_j, \quad (2)$$

где $\Delta U(t)$ — количество убывшего из питательного раствора минерального элемента за период от предыдущей до текущей корректировки, г/м²; V_0 — исходный объем питательного раствора, л/м²; C_0 и $C_A(t)$ — концентрация минерального элемента в питательном растворе соответственно исходная и после анализа, г/л; j — порядковый номер очередного анализа (корректировки).

Расчет теоретических величин проводили только для азота. Оценка других минеральных элементов дана по отношению к азоту.

Результаты

На рис. 1 и 2 в виде кривых, проведенных по экспериментальным точкам, показан интегральный вынос азота огурцом и томатом за период вегетации в коротком культурообороте. Для его динамики характерна последовательная смена ускоренного выноса вначале длительным равномерным в середине и замедленным на коротком последнем отрезке времени. Исходя из этого возможно построение программы внесения удобрений, описанное в [1]. Однако представляет интерес и поиск математического выражения, которое имело бы биологическую интерпретацию. Одним из таких выражений является уравнение роста Гомпертца [8]. Для нашего конкретного примера оно может быть интерпретировано в

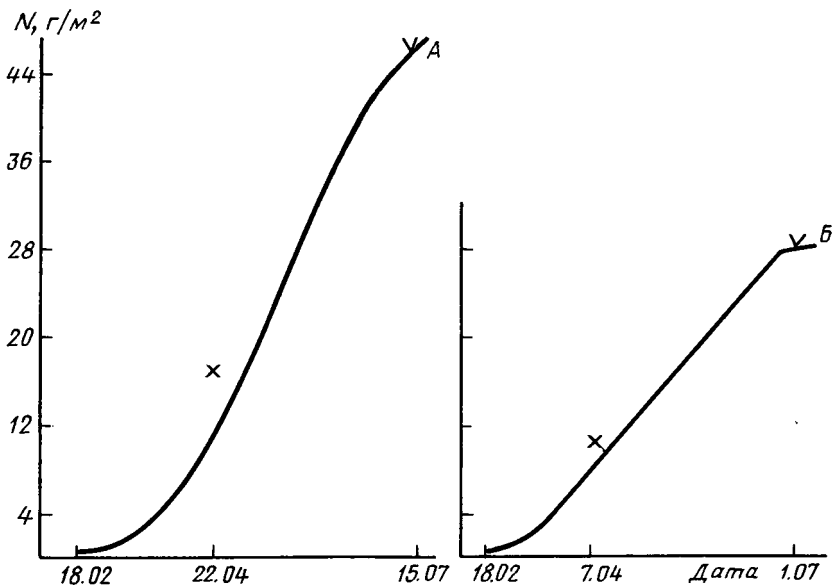
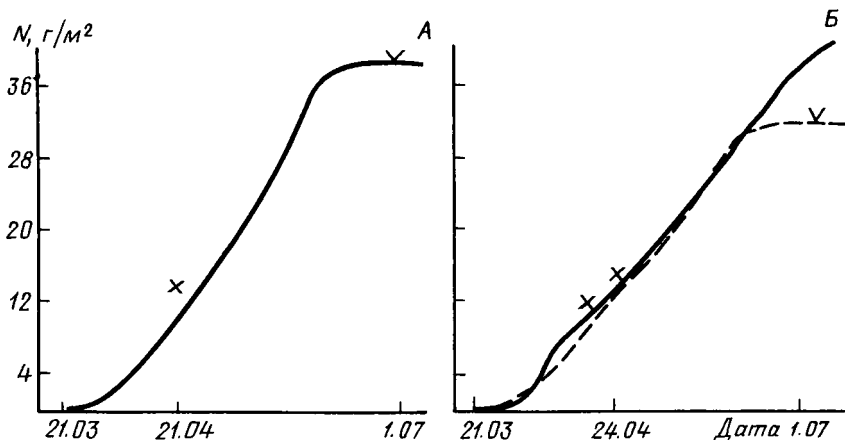


Рис. 1. Вынос азота гибридами томата в условиях проточной водной культуры. А — Коунтер; Б — Верлиока; X — расчетная точка перегиба; V — период вегетации T_n .

следующем порядке: источник минерального питания неиссякаем, поглощение азота растениями происходит пропорционально его накоплению в растении, удельный темп поглощения падает со временем пропорционально самому себе. Для кривой Гомпертца характерно то,

Рис. 2. Вынос азота гибридами огурца в условиях проточной водной культуры. А — 1417, 575; Б — 2616; В — Стелла. Остальные обозначения те же, что на рис. 1.



что точка перегиба соответствует значению, которое меньше максимального в 2,72 раза. Кривая имеет достаточно протяженный линейный участок близ точки перегиба. В последней вторая производная равна 0. Эти характеристики вполне соответствуют полученным эмпирическим кривым (рис. 1 и 2), если отбросить гипотезу об их линейности на основном отрезке времени.

Уравнение Гомпертца имеет вид $N(t) = N_0 \exp \{ \mu (1 - e^{Dt}) / D \}$, (3)

где $N(t)$ — количество минерального азота, вынесенного растением за время вегетации, г/м²; N_0 — количество азота, содержащегося в биомассе в начале процесса, г/м²; μ — удельный темп выноса минерального азота, сут⁻¹; e — основание натурального логарифма; D — удельный темп изменения μ в период вегетации, сут⁻¹.

Уравнение (3) может быть применено на практике, если известны параметры μ и D , а также начальное условие N_0 . Определить μ и D можно, если известна продолжительность периода T_m за который происходит поглощение основной массы азота (например, 99%). Необходимо знать и максимально возможный вынос за время вегета-

ции N_m . При таких условиях в уравнении (3) $t = T_m$ а $N(t) = N_m$ и оно может быть записано в виде $\ln(N_m/N_0) = \mu/D(1 - e^{-DT_m})$. (4)

Далее определяются $D = -\ln(0,01)/T_m$ и $\mu = \ln(N_m/N_0) \times \times D/0,99$

с учетом того, что $1 - e^{-DT_m} = 0,99$.

Эмпирические и расчетные параметры уравнения, начальных условий, а также характеристики точки перегиба и максимальная скорость выноса азота приведены в табл. 1.

Параметры уравнения (3) подогнаны произвольным выбором продолжительности времени поглощения азота и долей его выноса от предполагаемой нормы. Подгонка производится с тем, чтобы расчетный вынос в точке перегиба кривой был близок к эмпирическим данным. Мера совпадения эмпирических и расчетных данных определяется заданными условиями, которые формулируются в следующем уравнении:

$$N_T - N_S = \pm \Delta CV_0, \quad (5)$$

где N_T и N_S — соответственно расчетный и экспериментальный результаты выноса азота растениями, г/м²; ΔC — допустимое отклонение

Таблица 1

Значения параметров, констант, начальных условий и точки перегиба в зависимости от вида растений и выращиваемого гибрида

Гибрид	Дата при $t=0$	T_n , сут	N_0 , г/м ²	N_m , г/м ²	μ	D	t_p , сут	N_p , г/м ²	V_m , г/м ² ·сут
<i>Томаты</i>									
Коунтер	25.12	202	10 ⁻⁴	45	0,289	0,022	117	16,6	0,36
Верлюка	25.12	187	10 ⁻⁴	28	0,317	0,025	102	10,3	0,26
<i>Огурцы</i>									
575, 1417	18.02	117	10 ⁻³	38	0,415	0,039	61	14,0	0,55
2616	18.02	124	10 ⁻³	42	0,398	0,037	64	15,0	0,57
Стелла	18.02	117	10 ⁻³	32	0,409	0,039	60	12,0	0,46

Примечание. Индекс «п» обозначает точку перегиба на кривых рис. 1 и 2; V_m — максимальную расчетную скорость поглощения азота за период вегетации.

концентрации азота в питательном растворе корневой среды от заданной, г/л; ΔC практически задается в пределах $\pm 0,5 C_0$, в то время как V_0 колеблется в больших пределах. В разных хозяйствах применяются корневые среды, у которых $V_0 = 5 \div 100$ л/м². При высоких значениях V_0 несовпадение N_T и N_z может быть намного больше, чем при малых, поэтому и требования к точности расчета N_T в том и другом случае разные.

Отметим различия значений μ и D у изучаемых гибридов (табл. 1), так как они являются характеристиками последних и отражают различия в скорости выноса азота. Например, гибрид Верлиока отличается более высокой скоростью поглощения азота в начале вегетации ($\mu = 0,317$) и более быстрым снижением ее ($D = 0,025$), чем гибрид Коунтер ($\mu = 0,289$, $D = 0,022$).

Максимальная скорость выноса азота — не более 0,36 г/м²·сут для томата и 0,57 г/м²·сут для огурца. При $V_0 = 30$ л/м значения этих показателей находятся в области, где подавление роста растений из-за высокой концентрации питательного раствора корневой среды практически исключено. Для того чтобы исходная концентрация азота (0,2 г/л) увеличивалась в 2 раза и оказывала вредное действие на растение, вносимые максимальные суточные дозы должны накапливаться в растворе корневой среды в течение 17 сут. В то же время создаются благоприятные пониженные концентрации в случае, если суточный вынос азота больше 0,36 г/м²·сут. Это положение можно продемонстрировать на модельном расчете с использованием данных из практики. Примем, что допустимо снижение концентрации азота до 0,1 г/л, т. е. и 30 л/м² без ущерба для питания растений могут убывать 3 г азота на 1 м². В этом случае

растение будет обеспечено им в течение 4 сут при скорости потребления 0,72 г/м²·сут. В то же время в систему ежедневно добавляю азот из расчета 0,36 г/м²·сут. Исходя из приведенных данных, составим уравнение

$$N(t) - N_0 = (a - b)t, \quad (6)$$

где a — скорость внесения азота, г/м²·сут; b — скорость его выноса растениями, г/м²·сут.

Из расчета следует, что через 8 сут концентрация азота в системе корневая среда — растение достигнет минимального уровня. К этому следует добавить, что и при более низкой концентрации азота растения не будут страдать от недостатка азота, так как скорость изменения его концентрации в корневой среде соизмерима со скоростью действия внутреннего механизма саморегулирования, присущего растению.

Таким образом, расчеты свидетельствуют в пользу применения программированного внесения удобрений в теплицах.

Логистическое уравнение также может быть использовано для расчета программы внесения удобрений. Оно составлено на основе предположений, что энергия поглощения азота растениями пропорциональна количеству вынесенного азота, а механизм поглощения работает со скоростью, пропорциональной ресурсу питательной среды [8]. Первое допущение в наибольшей степени подходит для того периода роста растений, когда идет формирование фотосинтетического аппарата, т. е. от посадки до прищипки. Второе допущение связано с технологическим приемом, который предполагает исключение внесения удобрений, в том числе азотных, задолго до окончания вегетации, если в предыдущий период растения были в достаточ-

ной степени обеспечены этим элементом.

В качестве примера приводим расчет константы скорости (удельного темпа) выноса азота исходя из предположения, что его поглощение растениями томата соответствует логистическому уравнению $N(t) = N_p N_m / [N_p - (N_m - N_p) e^{-kt}]$, (7)

где N_p — вынос азота рассадой томатов, г/м²; k — удельный темп выноса азота, сут⁻¹. Кривая, описываемая этим уравнением, имеет точку перегиба, получаемую согласно уравнению

$$t_n = k^{-1} \ln(N_m - N_p) / N_p \quad (8)$$

В точке перегиба $N(t) = 0,5 N_m$.

Из рис. 1 определяем, что для гибридов Коунтер и Верлиока точки перегиба равны соответственно 90 и 70 сут. Удельный темп рассчитываем по уравнению (8). Для этого находим N_m в табл. 1 и N_p на рис. 1. Соответственно для каждого из гибридов вынос азота рассадой составляет 0,3 и 0,5 г/м². Подставляем в уравнение

$$k = \ln(N_m - N_p) / N_p \quad (9)$$

соответствующие значения и находим, что k равен 0,56 и 0,54 сут⁻¹. При помощи уравнения (7) и известных значений параметров можно рассчитать программу внесения удобрений в зависимости от времени.

Универсальным методом составления программ-прогнозов внесения удобрений в тепличном овощеводстве является имитационное моделирование. На примере имеющихся результатов опытов покажем один из возможных вариантов составления имитационной модели.

Скорость выноса минерального элемента растением есть полная производная от произведения био-

массы на содержание в ней элемента. Формально это записывается выражением

$$dU/dt = d(WX)/dt = (dW/dt)X + (dX/dt)W, \quad (10)$$

где dU/dt — скорость выноса минерального элемента растением; dW/dt — скорость роста биомассы; dX/dt — скорость изменения содержания элемента в биомассе; W — биомасса растений; X — относительное содержание минерального элемента в биомассе.

Агроном-технолог решает на практике уравнение (10), используя при этом численный метод. Другими словами, корректировка концентрации питательного раствора корневой среды проводится дискретно, а доза внесенного минерального элемента на единицу площади соответствует уравнению

$$U_{t+\Delta t} - W_t X_t = f_1(t) \Delta t X_t + f_2(t) \Delta t W_t \quad (11)$$

где $U_{t+\Delta t}$ — доза удобрений, внесенная в корневую среду за период от начала процесса до момента $t + \Delta t$; W_t и X_t — накопленная биомасса и относительное содержание минерального элемента в биомассе к моменту t ; $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — скорости роста биомассы и изменения в ней относительно содержания минерального элемента; Δt — время между предыдущим и последующим сроками внесения удобрений.

Солнечная энергия является основной возмущающей силой, поэтому желательно, чтобы модель учитывала это. В опытах [4] было рассчитано значение удельного темпа накопления биомассы R огурцами и томатами за зимне-весенний период вегетации. Выявлена также зависимость R от прихода солнечной энергии $R(\gamma)$.

Описание результатов опытов сводится к следующим заключениям:

удельный темп накопления биомассы растениями огурца в начальный период роста (в феврале и марте) — величина постоянная, $0,1175 \pm \pm 0,0302 \text{ сут}^{-1}$. За это время интенсивность естественного облучения растений неуклонно возрастает [2, 4] и достигает более $3 \text{ МДж/м}^2 \cdot \text{сут}$, а приход общей солнечной энергии — 80 МДж/м^2 . После этого наблюдается резкий скачок $R(\gamma)$, максимальное значение которого при поступлении первых стандартных плодов равно $0,2285 \pm 0,0015 \text{ сут}^{-1}$. В дальнейшем до конца культуроборота (1 июля) происходит снижение значения $R(\gamma)$ более чем в 25 раз, а интенсивность облучения все время возрастает и достигает максимума [2, 4], что объясняется старением растений и наступлением равновесия на световой кривой фотосинтеза.

Относительное содержание азота в биомассе за период вегетации приводится в табл. 2.

Следует отметить, что за период вегетации содержание азота в биомассе (табл. 2) изменяется в 2 и более раз, в то время как сама биомасса возрастает на $4 \cdot 10^4$ раза [4]. Таким образом, основная переменная в уравнении (12) — это функция $f_1(t)$.

Таблица 2
Содержание азота (%) в воздушно-сухой биомассе гибридов огурца в период вегетации

Дата анализа	Гибрид			
	1417	575	2616	Стелла
21.03	4,00	3,70	5,25	4,65
28.03	3,90	3,95	4,38	4,70
05.04	4,15	4,15	3,81	4,23
12.04	4,00	4,10	3,81	3,84
25.04	3,36	3,52	3,35	3,40
16.05	3,13	3,16	3,07	3,26
01.06	2,90	2,98	2,71	3,11
15.06	2,88	2,95	2,89	3,06
01.07	2,54	2,62	2,77	2,71

Данные табл. 2 могут быть аппроксимированы уравнением прямой линии. Уравнение регрессии имеет вид

$$X(t) = 4,76 - 0,02t, \quad r = 0,93 \quad (12)$$

Кроме того, необходимо учитывать, что от семени до первого анализа (21 марта) происходит изменение содержания азота приблизительно от 1 до 4,8 %. Если допустить, что процесс идет равномерно в течение 34 сут, то скорость изменения $a = 0,11 \text{ \% / сут}$.

Чтобы решить уравнение (11) численным методом, необходимо задать начальные условия, аналитический вид функций скорости и шаг интегрирования.

В момент посева $t_0 = 0$; $W_0 = 0,1 \text{ г/м}^2$; $X_0 = 0,01$; $N_0 = W_0$; $X_0 = 0,001 \text{ г/м}^2$; $f_1(t) = R[\gamma(t)]W(t)$, где $R = 0,111 \text{ сут}^{-1}$ при $0 < \gamma < 80$, $R = 0,111 + 0,003\gamma$ при $80 < \gamma < 110$ и $R = 0,2888 - 0,0059\gamma$ при $\gamma > 110$; $f_2(t) = 0,11 \text{ \% / сут}$ при $0 < t < 35$ и $f_2(t) = -0,02 \text{ \% / сут}$ при $t > 35$.

Известно [7], что шаг интегрирования не должен превышать $1/5$ или $1/4$ наименьшего коэффициента времени в системе. Для нашей модели $T = 1/0,2888$, а следовательно, $\Delta t = 1 \text{ сут}$.

В производственных опытах максимальная скорость убыли азота из питательного раствора корневой среды (рис. 3) равна приблизительно $0,45 \text{ г/м}^2 \cdot \text{сут}$. Такая скорость характеризует процесс в течение длительного периода. В результате этого при практически одинаковой урожайности плодов томата вынос азота и других элементов минерального питания в значительной мере зависит от условий выращивания (табл. 3).

Большой разброс значений выноса элементов минерального питания можно объяснить пассивным поступлением ионов в растение, види-

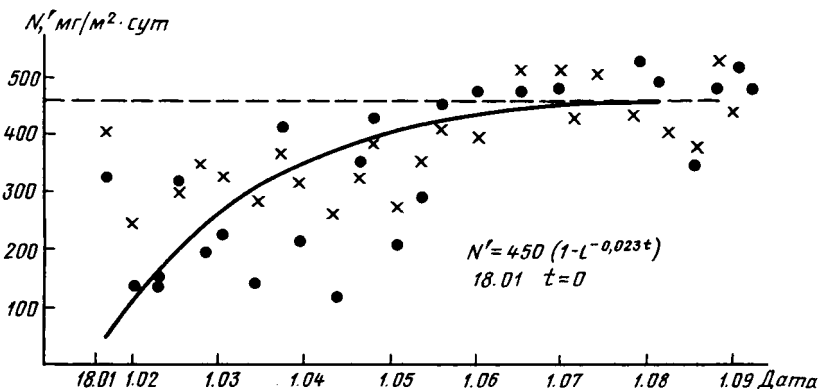


Рис. 3. Динамика скорости выноса азота растениями томата в условиях гравийной гидропоники (г. Киев).

Точки — Киевская овощная фабрика; x — «Пуща Водица».

мо, из-за высокой концентрации раствора корневой среды. Для производственного опыта в Киеве укажем также на фактор повышенной освещенности и пониженной относительной влажности воздуха в течение длительного периода вегетации. Данные табл. 3 показывают, что имеются большие резервы экономии минеральных элементов

при выращивании томатов в теплицах.

Соотношения элементов минерального питания могут быть практически константами (табл. 4). Это существенно упрощает процессы составления программ и внесения удобрений для инертных корнеобитаемых сред.

Таблица 3

Вынос N, P, K, Ca, Mg (г/кг) плодами томатов (числитель) и их отношение к азоту (знаменатель) при урожайности 15—20 кг/м² в разных условиях выращивания

Вид культуры	N	P	K	Ca	Mg	Источник информации
Водная	1,7	0,5	3,0	—	0,4	[2]
	1	0,3	1,8	—	0,2	
То же	2,3	0,7	3,6	1,1	0,4	[4]
	1	0,3	1,6	0,5	0,2	
» »	1,5	0,3	2,3	0,5	0,2	[4]
	1	0,2	1,5	0,3	0,1	
Гравийная гидропоника	4,7	2,3	14,9	2,4	1,8	Производство, г. Киев
	1	0,5	3,5	0,5	0,4	
То же	4,9	1,5	8,5	3,4	1,5	То же
	1	0,4	2,0	3,4	0,3	
Почвогрунт	3,3	0,4	5,4	3,7	0,5	[5]
	1	0,1	1,6	1,1	0,2	

Соотношение элементов минерального питания и азота (среднее за вегетацию \bar{X}), доверительный интервал ($t_{0,5} \cdot S_d$) и ошибка средней (S_d) для культуры томата и огурца

Элемент	Огурец			Томаты		
	\bar{X}	$t_{0,5} \cdot S_d$	S_d , %	\bar{X}	$t_{0,5} \cdot S_d$	S_d , %
P	0,27	0,01	3,7	0,28	0,03	10,7
K	1,27	0,08	6,2	1,33	0,14	10,5
Ca	0,27	0,03	11,0	0,51	0,08	15,7
Mg	0,11	0,01	9,0	0,15	0,02	13,3

Заключение

Математические выражения легко переносятся на язык ЭВМ, поэтому их применение в практике тепличного овощеводства весьма перспективно. Агроном-технолог при помощи современного персонального компьютера и соответствующих сведений может с использованием предлагаемых нами математических моделей успешно решать задачу экономического применения минеральных удобрений в переменных условиях окружающей среды, не прибегая при этом к химическим анализам. В отдельных случаях (небольшие площади посева, малые объемы корневых сред) способ управления процессом питания растений по заданным программам внесения удобрений является наиболее рациональным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апостол П. А., Сандид А. Ю., Куленкамп А. Ю. Программирование ми-

нерального питания томата в условиях малообъемной гидропонике.— Изв. ТСХА, 1987, вып. 2, с. 107—114.— 2. Апостол П. А., Форепо С. Г. Корректировка питательного раствора для тепличных томатов по данным о приходе солнечной радиации.— Изв. ТСХА, 1992, вып. 2, с. 113—123.— 3. Апостол П. А., Борисов А. В., Новиков В. В. Накопление биомассы и содержание N, P, K и Mg у огурца и томата в тепличной гидропонике.— Изв. ТСХА, 1992, вып. 3, с. 80—87.— 5. Корогодова Н. С., Шульцева Г. П. Производство овощей под стеклом и пленкой (пер. с нем.).— М.: Колос, 1979.— 6. Луценку В. А., Финякин Л. Н. Аналоговые вычислительные машины в химии и химической технологии.— М.: Химия, 1979.— 7. Пеннинг де Фриз Ф. В. Г., ван Лаар Х. Х. Моделирование роста и продуктивности сельскохозяйственных культур.— Л.: Гидрометеиздат, 1986.— 8. Франс Дж., Торнли Х. М. Математические модели в сельском хозяйстве.— М.: Агропромиздат, 1987.

Статья поступила 2 июля 1992 г.

SUMMARY

The data about removal of mineral nutrition elements by tomato and cucumber hybrids have been approximated by different methods which are notable for using mathematical functions, such as logistic function, Homperfs function, exponential dynamics of first order. The results of removing the main mineral elements by tomato plants obtained under conditions of commercial hydroponics and in the experiments are compared. With tomato yield about 20 kg/m² under experimental conditions in a shorter growing period the removal of nitrogen, phosphorus and potassium per unit of marketable produce is much lower than under commercial conditions.