

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ МОЛОЧНОЙ СЫВОРОТКИ ПРИ ПОТОЧНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ЛАКТОЗЫ

С.А. БРЕДИХИН¹, А.С. БРЕДИХИН²

(¹ РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева; ² ООО «КЛЭКС»)

Статья посвящена аналитическому исследованию изменения температуры молочной сыворотки при поточной кристаллизации в ней лактозы. Высококонцентрированные лактозосодержащие растворы такие, как сгущенная молочная сыворотка с массовой долей сухих веществ 50–60%, рассмотрена как псевдопластичная жидкость, не имеющая предела текучести, и отличающаяся снижением кажущейся вязкости с увеличением скорости сдвига. Проведено аналитическое исследование изменения температуры сгущенной молочной сыворотки при охлаждении ее в пластинчатом скребковом теплообменнике непрерывного действия. Определено изменение температуры во взаимосвязи с реологическими свойствами молочной сыворотки. Получены результаты для практического использования.

Ключевые слова: высококонцентрированные лактозосодержащие растворы, молочная сыворотка, охлаждение, псевдопластичная жидкость, реологические свойства, кристаллизация лактозы, теплообменник непрерывного действия.

Введение

Молочная сыворотка, образуемая в результате выработки сыра и творога, обладает высокой пищевой и биологической ценностью и представляет собой большой ресурс для увеличения объемов производимой продукции и улучшения экономических показателей производства. Одним из традиционных направлений переработки молочной сыворотки является производство молочного сахара (лактозы).

Основными технологическими процессами производства молочного сахара являются выпаривание (сгущение сухих веществ) и кристаллизация. При выпаривании повышают в молочной сыворотке массовую долю сухих веществ и направляют на кристаллизацию в ней лактозы.

Молочная сыворотка с массовой долей сухих веществ равной 50–60% в нормальных условиях представляет собой насыщенный раствор, который при охлаждении переходит в пересыщенный раствор и при определенной температуре охлаждения в нем происходит образование кристаллов лактозы и начинается процесс кристаллизации [2, 3, 4].

Важной особенностью при охлаждении сгущенной молочной сыворотки и кристаллизации в ней лактозы является измерение вязкостных свойств сгущенной молочной сыворотки. Эти изменения объясняются тем, что сгущенная молочная сыворотка при охлаждении из области ньютоновской жидкости переходит в область неньтоновской.

Известно [11], что высококонцентрированные лактозосодержащие растворы такие, как сгущенная молочная сыворотка в зависимости от температуры ведут себя как псевдопластичные жидкости, не имеющие предела текучести и отличаются уменьшением кажущейся вязкости с увеличением скорости сдвига. Для описания течения таких жидкостей применяют уравнение Освальда-де Вилля:

$$\tau = k \cdot \gamma^n,$$

где τ – напряжение сдвига, Пас; k – опытный коэффициент; γ – скорость сдвига, с^{-1} ; n – индекс течения ($n < 1$ для псевдопластичных жидкостей).

Аналогичные явления характерны и для других пищевых сред, например, для сливок, при производстве сливочного масла преобразованием высокожирных сливок. По данным ВНИИМС, при охлаждении сливок вначале происходит кристаллизация тугоплавких триглицеридов, а затем – легкоплавких жиров. Сливки вначале охлаждения имеет вязкость и ярко выраженные свойства ньютоновской жидкости. При дальнейшем охлаждении сливки ведут себя как неньютоновская жидкость с соответствующей вязкостью [1, 12].

В связи с этим, аналитическое исследование изменения температуры сгущенной молочной сыворотки при кристаллизации в ней лактозы требует учета изменения ее вязкостных свойств. Учет этих особенностей усложняет аналитическое исследование теплообмена при охлаждении сгущенной молочной сыворотки.

Кристаллизацию лактозы при охлаждении сгущенной молочной сыворотки в потоке реализуют в скребковом теплообменном аппарате непрерывного действия пластинчатого типа. В качестве теплопередающей поверхности в данном аппарате используются герметичная конструкция из двух соосных сварных пластин в форме диска. Эта конструкция условно названа теплообменной пластиной. Определенное количество теплообменных пластин образует теплообменные секции аппарата.

В качестве примера на рис. 1 приведена схема противоточного течения сгущенной молочной сыворотки и хладоносителя в скребковом пластинчатом теплообменнике. Стрелками на рис. 1. показано движение сгущенной молочной сыворотки и хладоносителя: 1, 2 – вход и выход сгущенной молочной сыворотки соответственно; 3, 4 – вход и выход хладоносителя соответственно; T_1 – начальная температура сгущенной молочной сыворотки, T_{2i} – температура сгущенной молочной сыворотки на выходе из i -теплообменной пластины; T_{x0} – начальная температура хладоносителя; T_{xi} – температура хладоносителя на выходе из i -теплообменной пластины.

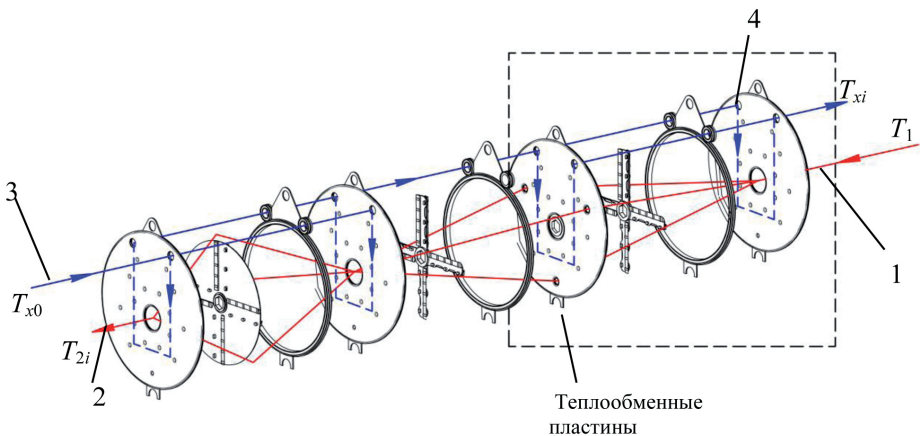


Рис. 1. Схема противоточного течения сгущенной молочной сыворотки и хладоносителя

При аналитическом исследовании руководствуемся следующими общими допущениями: изменение температуры сгущенной сыворотки при кристаллизации в ней

лактозы изучаем для одной теплообменной пластины; объем продукта, находящейся в продуктовой зоне теплообменной пластины имеет вид цилиндрического тела малой высоты (диск); сывотку рассматриваем как псевдопластичную жидкость, течение которой внутри теплообменной пластины при ее охлаждении и кристаллизации лактозы – ламинарное, неизотермическое при постоянном расходе без нарушения сплошности потока; сывотка в аппарате может подаваться как в центральное отверстие и двигаться на периферию, так и, поступая через периферийные отверстия, перемещаться в сторону центра; распределение температуры в сывотке равномерное и не зависит от способа ее подачи в теплообменную пластину [6].

Исследования изменения температуры сывотки в теплообменной пластине проведено с помощью дифференциальных уравнений переноса теплоты в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии [9, 12].

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

где T – температура в точках сывотки, °C, r и z – цилиндрические координаты точки продукта, v_r и v_z – проекции скорости точек продукта на оси r и z , a – коэффициент температуропроводности, м²/с.

Канал для течения сывотки имеет сложную форму (рис. 2) поэтому принимаем, что осевая скорость сывотки v_r значительно меньше радиальной v_r и окруж-

ной v_ϕ скоростей, поэтому в уравнении (2) положим $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$.

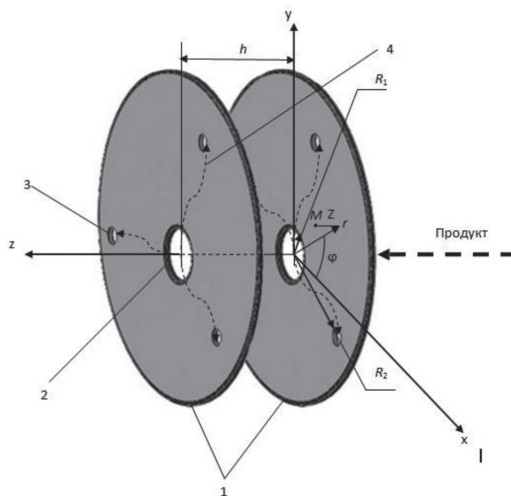


Рис. 2. Схема для расчета: 1 – продуктовые пластины; 2 – центральное отверстие; 3 – периферийные отверстия; 4 – линии тока сывотки; x, y, z – оси координат

Радиальную скорость v_r определяем дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости, по-

лагая в нем реологические константы и плотность продукта ρ , не зависящими от температуры для данной теплообменной пластины.

Для этого запишем общее дифференциальное уравнение осесимметричного стационарного течения сплошной среды в напряжениях в проекции на радиальное направление r [5].

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{\tau_r - \tau_\phi}{r} \right\}, \quad (3)$$

где τ_r, τ_ϕ – нормальные напряжения на площадках перпендикулярных соответственно радиальной r и окружной ϕ осям, τ_z – касательное напряжение на площадках перпендикулярных осям r и z .

Реологические исследования сыворотки с массовой долей сухих веществ 50–65 % позволяют с большой точностью принять в качестве ее реологической модели степенную модель Освальда – де Виля [9, 12]. Для такой модели компоненты тензора напряжений, входящие в уравнение (2), при сделанных ранее предположениях имеют вид [12]:

$$\tau_r = -p + 2k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tau_\phi = -p + 2k|H|^{n-1} \frac{v_r}{r}, \tau_z = k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad (4)$$

где k и n – реологические константы сгущенной молочной сыворотки, H – интенсивность скоростей деформации равная:

$$H = \sqrt{\frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2}. \quad (5)$$

Величину $k|H|^{n-1}$ можно рассматривать как некоторую кажущуюся (эффективную) вязкость.

Уравнение неразрывности (несжимаемости) справедливое для любой жидкой среды при сделанных предположениях имеет вид:

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (5) находим:

$$v_r = \frac{1}{r} f(z). \quad (7)$$

На основании равенства (7) для интенсивности скоростей деформации H из (5) получим выражение:

$$H = \sqrt{\left(\frac{f(z)}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{f'(z)}{2r} \right)^2}, \quad (8)$$

где штрих во втором слагаемом подкоренного выражения и далее означает производную по координате z .

Оценим порядки слагаемых в подкоренном выражении формулы (8), приведя ее к безразмерному виду и преобразовав, получим, что интенсивность скоростей деформации (8) будет иметь вид:

$$H = \frac{\widehat{v}_r h}{\bar{r}} \sqrt{\left(\frac{f(z)}{\bar{r}^2}\right)^2 \frac{h^2}{R_2^2} + \left(\frac{f'(z)}{2}\right)^2}. \quad (9)$$

Так как в формуле (9) подкоренное выражение приведено к безразмерной форме, то порядки слагаемых в этом выражении будут определяться порядком коэффициентов при этих слагаемых. На этом основании интенсивность скоростей деформации (8) запишется как:

$$H = \left| \frac{f'(z)}{2r} \right| = \frac{1}{2r} |f'(z)|. \quad (10)$$

В этом случае с учетом (7) соотношения (4) примут следующий вид:

$$\tau_r = -p - 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \tau_\phi = -p + 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \tau_z = k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f'(z)}{r}. \quad (11)$$

Так как сыворотка принудительно вращается в роторно-пульсационном аппарате, то окружная скорость ее точек не больше величины ωr , где ω – угловая скорость лопастей мешалки. Поэтому примем эту величину за окружную скорость v_ϕ , т. е. $v = \omega r$. Подстановка выражений компонент тензора напряжений из (11) и окружной скорости v_ϕ при условии $v_z \approx 0$ в уравнение (3) приводит это уравнение к следующему виду:

$$-\frac{[f(z)]^2}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(p - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \right) + \frac{k}{\rho} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{r} \right)^n \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z) \quad (12)$$

Выражение в левой части равенства (12) значительно меньше каждого из слагаемых в его правой части. Это следует из оценок, сделанных аналогично оценкам в формуле (8). После преобразования уравнение (12) запишется как:

$$r^n \frac{\partial p}{\partial r} = k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z). \quad (13)$$

При этом считается, что давление p не зависит от поперечной координаты z . В дальнейшем, в силу симметрии профиля радиальной скорости относительно срединной плоскости дисков, будем при гидродинамических расчетах рассматривать область $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$. Для этой области $\text{sign } f'(z) = 1$.

В результате решения уравнения получены выражения для давления $p(r)$ и функции: $f(z)$

$$p(r) = p_1 - \frac{P_1 - P_2}{R_2^{1-n} - R_1^{1-n}} (r^{1-n} - R_1^{1-n}). \quad (14)$$

$$f(z) = - \left[- \frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[\left(\frac{h}{2} - z \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (15)$$

Кристаллизация лактозы в потоке развивается в сложных гидродинамических условиях и широком температурном диапазоне для сыворотки [3].

Для полного гидродинамического расчета теплообменника при кристаллизации лактозы представляется важным получить зависимость между перепадом давления $P_1 - P_2$ на входе и выходе сыворотки из данной теплообменной пластины и расходом сыворотки q , используя формулу:

$q = 4 \pi r \int_0^{\frac{h}{2}} v_r dz$. Подставив в эту формулу выражение v_r с учетом (15) и интегрируя, получим:

$$q = 2 \pi h \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Таким образом, формула (16) позволяет определять расход сыворотки в зависимости от разности давления на входе и выходе из теплообменной пластины, т.е. с учетом гидравлического сопротивления теплообменных пластин секций аппарата.

Температуру в сыворотке определим по уравнению (2) с учетом $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для этого подставим в левую часть данного уравнения выражение радиальной скорости (7) и разделим его левую и правую части на коэффициент температуропроводности a . После этого получим:

$$\frac{f(z)}{r} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (17)$$

Поскольку точного аналитического решения данного уравнения получить нельзя, воспользуемся приближенным решением, заключающемся в частичном осреднении его левой части по толщине зазора между дисками и использовании метода последовательных приближений. В результате решения получим выражение:

$$T(r, z) = -\frac{\pi}{B^2 h^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ j [T_1 - T_3 - (T_1 - T_4) \cos j \pi] \left[r^2 - R_1^2 - \frac{j^2 \pi^2}{2 B h^2} (r^4 - R_1^4) - \frac{2 B^2 h^2}{j^2 \pi^2} \right] \times \right. \\ \left. \times e^{\frac{j^2 \pi^2}{2 B h^2} (R_1^2 - r^2)} \sin \frac{j \pi}{h} z \right\} + T_3 - \frac{z}{h} (T_3 - T_4). \quad (18)$$

Таким образом, формула (18) применима для расчета температуры охлаждения сыворотки при кристаллизации в ней лактозы как при центральном способе ее подачи, так и при периферийном способе подачи в продуктовую зону аппарата. В первом случае – $R_1 > R_2$, $P_1 < P_2$, а во втором случае наоборот – $R_1 > R_2$, $P_1 < P_2$.

Библиографический список

1. Андрианов Ю.П. Производство сливочного масла / Ю.П. Андрианов, Ф.А. Вышемирский, Д.В. Качераускис и др.; под ред. Ф.А. Вышемирского. М.: Агропромиздат, 1988. 268 с.
2. Бредихин С.А. Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности / М.: Колос, 2010. 408 с.
3. Бредихин, С.А., Бредихин А.С., Жуков В.Г., Космодемьянский Ю.В., Якушев А.О. Процессы и аппараты пищевой технологии / СПб.: Издательство Лань, 2014. 544 с.

4. Бредихин С.А. Технологическое оборудование переработки молока / СПб.: Издательство Лань, 2015. 416 с.
5. Кулаков А.В., Чесноков В.М. Элементы механики пищевых сред / М.: МГУПБ, 2004. 301 с.
6. Рашкин К.А., Чесноков В.М., Бредихин С.А. Аналитическое исследование теплопередачи в пластинчатом скребковом аппарате // Хранение и переработка сельхозсырья, 2013. № 5. С. 15–18.
7. Синельников Б.М. Лактозы и ее производные / СПб: Профессия, 2007. 768 с.
8. Странский И.Н., Каишев Р.К. К теории роста кристаллов и образование кристаллических зародышей // Успехи хим., 1939. Т. 21. Вып. 4. С. 408–465.
9. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений / М–Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 420 с.
10. Твердохлеб Г.В. Температурные режимы при выработке масла поточным методом // Изв. вузов СССР. Пищевая технология, 1965. № 5. С. 84–90.
11. Чеботарев Е.А., Нестеренко П.Г., Давыдянц Л.Е., Михайлов Н.И., Чеботарева Н.Г. Вязкость молочной сыворотки и продуктов из нее // Молочная промышленность, 1983. № 2. С. 26–27.
12. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей / М.: Энергия, 1975. 352 с.
13. Broun D.J., Bousan F. Crystal growth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer // Zuckerindustrie, 1992. V. 117. № 1. Pp. 35–39.
14. Spreer E. Technologie der Milchverarbeitung. Hamburg: Behr's Verlag, 1995. 517 p.
15. ФГУП ЭЗ «МОЛМАШ [Электронный ресурс]. URL: <http://molmash.ru> .

FEATURES OF CALCULATION OF THE TEMPERATURE OF THE WHEY DURING THE PRODUCTION OF CRYSTALLIZATION OF LACTOSE

¹S.A. BREDIKHIN, ²A.S. BREDIKHIN

(¹Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, ²LLC “KLEKS”)

The paper is devoted to analytical research of whey temperature changes occurring along with flow-line crystallization of lactose contained in it. The high-concentrated lactose-containing solutions, such as condensed whey with a mass fraction of solids of 50-60%, depending on the temperature behave as pseudo-plastic liquids which do not have a fluidity limit and feature a decrease in the apparent viscosity as the shift speed increases. The authors have made an analytical research of the condensed whey temperature change when cooling it in a lamellar scraper heat exchanger of continuous action. The study has allowed to determine the temperature change in correlation with rheological properties of whey and obtain results for practical use.

Key words: *high-concentrated lactose-containing solutions, whey, cooling, pseudo-plastic liquid, rheological properties, lactose crystallization, continuous heat exchanger.*

References

1. Andrianov Yu.P. Proizvodstvo slivochnogo masla [Production of butter] / Yu.P. Andrianov, F.A. Vyshemirskiy, D.V. Kacherauskis et al.; Ed. by F.A. Vyshemirsky. M.: Agropromizdat, 1988. 268 p.

2. *Bredikhin S.A.* Tekhnologicheskoye oborudovaniye predpriyatiy molochnoy promyshlennosti [Technological equipment of dairy enterprises] / S.A. Bredikhin. – M.: Kolos, 2010. 408 p.
3. *Bredikhin S.A., Bredikhin A.S., Zhukov V.G., Kosmodem'yanskiy Yu.V., Yakushev A.O.* Protsessy i apparaty pishchevoy tekhnologii [Processes and devices of food technology] / SPb.: Izdatel'stvo Lan', 2014. 544 p.
4. *Bredikhin S.A.* Tekhnologicheskoye oborudovaniye pererabotki moloka [Technological equipment for milk processing] / SPb.: Izdatel'stvo Lan', 2015. 416 p.
5. *Kulakov A.V., Chesnokov V.M.* Elementy mekhaniki pishchevykh sred [Elements of the mechanics of food environments] / M.: MGUPB, 2004. 301 p.
6. *Rashkin K.A., Chesnokov V.M., Bredikhin S.A.* Analiticheskoye issledovaniye teploperedachi v plastinchatom skrebkovom apparate [Analytical study of heat transfer in a plate scraper installation] *Khreneniye i pererabotka sel'khozsyrya*, 2013. No. 5. Pp. 15–18.
7. *Sinel'nikov B.M.* et al. Laktozy i yeye proizvodnyye [Lactose and its derivatives] / SPb: Professiya, 2007. 768 p.
8. *Stranskiy I.N., Kaishev R.K.* K teorii rosta kristallov i obrazovaniye kristallicheskikh zarodyshey [To the theory of crystal growth and the formation of crystalline embryos] // *Uspekhi khim.*, 1939. Vol. 21, issue 4. Pp. 408–465.
9. *Targ S.M.* Osnovnyye zadachi teorii laminarnykh techeniy [Main problems of the theory of laminar flows] / M–L.: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1951. 420 p.
10. *Tverdokhleby G.V.* Temperaturnyye rezhimy pri vyrabotke masla potochnym metodom [Temperature modes in oil production based on the flow method] // *Izv. vuzov SSSR. Pishchevaya tekhnologiya*, 1965. No. 5. Pp. 84–90.
11. *Chebotaev Ye.A., Nesterenko P.G., Davydyants L.Ye., Mikhaylov N.I., Chebotarova N.G.* Vyazkost' molochnoy syvorotki i produktov iz neye [Viscosity of whey and products made from it] // *Molochnaya promyshlennost'*, 1983. No. 2. Pp. 26–27.
12. *Shul'man Z.P.* Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskii slozhnykh zhidkostey [Convective heat and mass transfer of rheologically complex fluids] / M.: Energiya, 1975. 352 p.
13. *Broun D.J., Bousan F.* Crystal growth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer // *Zuckerindustrie*, 1992. Vol. 117. No.1. Pp. 35–39.
14. *Spreer E.* Technologie der Milchverarbeitung. Hamburg: Behr's Verlag, 1995. 517 p.
15. FGUP EZ "MOLMASH" [Electronic resource]. URL: <http://molmash.ru>.

Бредихин Сергей Алексеевич – д. т. н., проф., зав. кафедрой процессов и аппаратов перерабатывающих производств РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева (127550, г. Москва, ул. Тимирязевская 49; тел.: (499) 977-92-73; e-mail: Bredihin2006@yandex.ru).

Бредихин Алексей Сергеевич – нач. отдела ООО «КЛЭКС» (119034, г. Москва, Zubovskiy bul'var, d. 4, str.1; тел.: 8(499) 703-48-07; e-mail: Abredikhin@clickexpress.ru).

Sergey A. Bredikhin – DSc (Eng), Professor, Head of the "Technologies and Equipment of Processing Industries" Department, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy (127550, Moscow, Timiryazevskaya Str. 49; phone: +7 (499) 977-92-73; e-mail: Bredihin2006@yandex.ru).

Aleksey S. Bredikhin – Head of department, JSC "KLEKS" (119034, Moscow, Zubovsky Blv., 4, bld. 1; phone: +7 (499) 703-48-07; e-mail: Abredikhin@clickexpress.ru).