

УДК 637.1/3.(045)

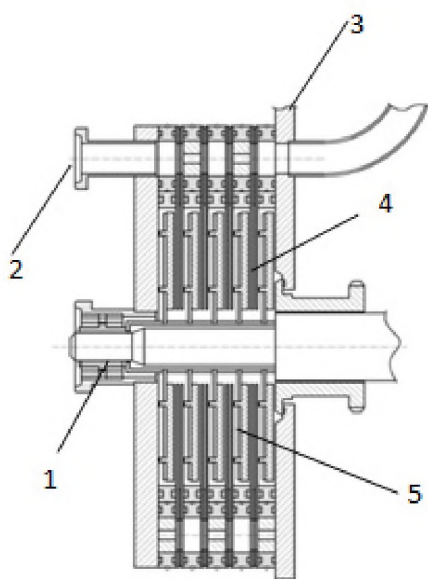
### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МОЛОЧНОЙ СЫВОРОТКИ В ТЕПЛООБМЕННИКЕ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

А.С. БРЕДИХИН<sup>1</sup>, В.В. ЧЕРВЕЦОВ<sup>1</sup>, С.А. БРЕДИХИН<sup>2</sup>

( <sup>1</sup> ГНУ ВНИИ молочной промышленности, <sup>2</sup> РГАУ-МСХА имени КА. Тимирязева)

*Статья посвящена изучению стационарного осесимметричного течения молочной сыворотки в скребковом теплообменнике. Получены результаты для практического использования.*

*Ключевые слова: осесимметричное течение, молочная сыворотка, вязкость, давление, расход, кристаллизация лактозы, теплообменник непрерывного действия.*



**Рис. 1.** Схема пластинчатого скребкового теплообменника непрерывного действия: 1 — вал; 2 — патрубок; 3 — нажимная пластина; 4 — продуктовая пластина; 5 — скребок-мешалка

Эффективное охлаждение молочной сыворотки с целью кристаллизации в ней лактозы наиболее перспективно проводить в пластинчатых скребковых теплообменных аппаратах непрерывного действия. Целью настоящего исследования является изучение гидродинамики при течении молочной сыворотки для разработки высокопроизводительных пластинчатых скребковых теплообменных аппаратов [1, 5, 6].

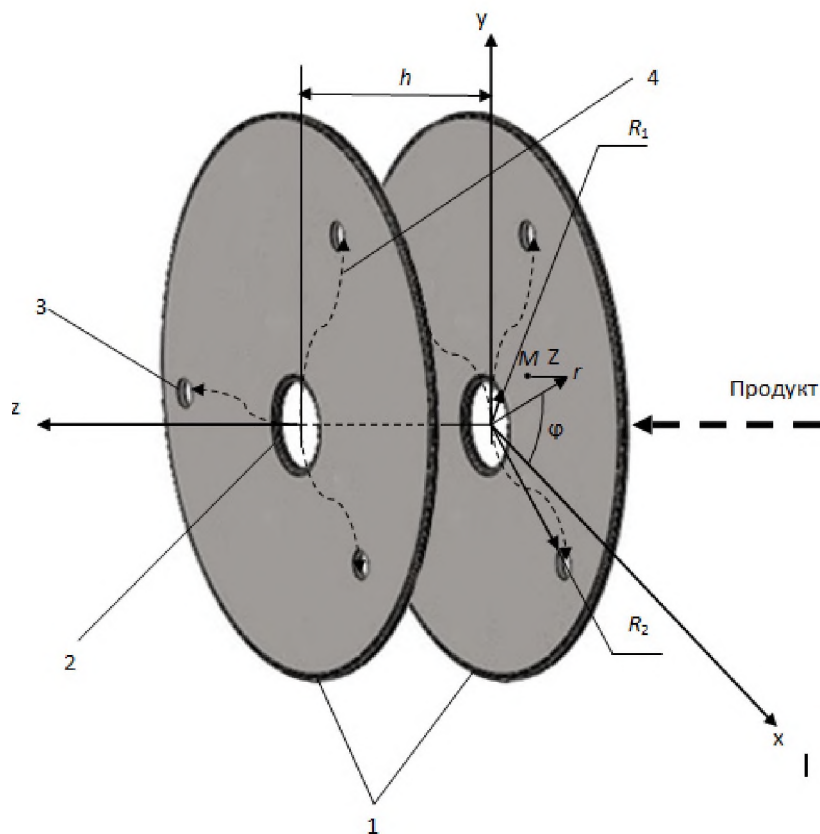
Такой аппарат (рис. 1) представляет собой набор чередующихся теплообменных и так называемых продуктовых пластин в форме диска, установленных и зажатых на специальных штангах. Набор последовательно соединенных теплообменных элементов образует теплопередающую поверхность аппарата для нагревания или охлаждения продукта. В зависимости от организации процесса молочная сыворотка может поступать в пространство между дисками как из центрального отверстия, так и из отверстий, расположенных на периферии дисков.

Внутри продуктовых пластин расположены подвижные диски, закрепленные на валу. С обеих сторон этих дисков подвижно закреп-

плены полиамидные ножи специальной формы. При вращении дисков эти ножи счищают с поверхности теплообменных пластин пристенный ламинарный слой обрабатываемого продукта, при этом происходит его перемешивание. В зависимости от направления движения молочной сыворотки и хладоносителя аппарат может работать по схеме прямотока и протivotока.

Целью настоящего исследования является изучение распределения температуры в движущейся молочной сыворотке в пластинчатом скребковом теплообменнике непрерывного действия. Данное исследование состоит из двух взаимосвязанных частей: первая — это изучение гидродинамики аппарата и определение его основных характеристик, и вторая часть посвящена определению температуры движущейся в аппарате молочной сыворотки. В настоящей статье (рис. 2) представлены результаты исследования гидродинамических характеристик скребкового теплообменника непрерывного действия.

Исследование основано на решении дифференциального уравнения теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии:



**Рис. 2.** Расчетная схема: 1 — продуктовые пластины; 2 — центральное отверстие; 3 — периферийные отверстия; 4 — линии тока продукта

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $T$  — температура в точках продукта, °C;  $r$  и  $z$  — цилиндрические координаты точки продукта;  $v_r$  и  $v_z$  — проекции скорости точек продукта на оси  $r$  и  $z$ ;  $a$  — коэффициент теплопроводности.

Полагаем, что осевая скорость продукта  $v_z$  значительно меньше радиальной  $v_r$  и окружной  $v_\phi$  скоростей, поэтому в уравнении (1) положим  $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$ . Для определения радиальной скорости  $v_r$  воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости, полагая в нем реологические константы и плотность продукта  $\rho$  не зависящими от температуры для данной пары дисков (охлаждающего элемента). Для этого запишем общее дифференциальное уравнение осесимметричного стационарного течения сплошной среды в напряжениях [2] в проекции на радиальное направление  $r$ :

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}}{r} \right\}, \quad (2)$$

где  $\tau_{rr}$ ,  $\tau_{\phi\phi}$  — нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных соответственно радиальной  $r$  и окружной  $\phi$  осям;  $\tau_{rz}$  — касательное напряжение на площадках, перпендикулярных осям  $r$  и  $z$ .

Реологические исследования молочной сыворотки позволяют с большой точностью принять в качестве ее реологической модели степенную модель Оствальда — Де Вилия. Для такой модели компоненты тензора напряжений, входящие в уравнение (1), при сделанных ранее предположениях имеют вид [3, 4]:

$$\tau_{rr} = -p + 2k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{\phi\phi} = -p + 2k|H|^{n-1} \frac{v_r}{r}, \quad \tau_{rz} = k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $k$  и  $n$  — реологические константы молочной сыворотки;  $H$  — интенсивность скоростей деформации, равная

$$H = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( -\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2}. \quad (4)$$

Величина  $k|H|^{n-1}$  может рассматриваться как некоторая кажущаяся (эффективная) вязкость.

Уравнение неразрывности (несжимаемости), справедливое для любой жидкой среды, при сделанных предположениях имеет вид

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), находим:

$$v_r = \frac{1}{r} f(z). \quad (6)$$

На основании равенства (6) для интенсивности скоростей деформации  $H$  из (4) получим выражение

$$H = \sqrt{\left(\frac{f(z)}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{f'(z)}{2r}\right)^2}, \quad (7)$$

где штрих во втором слагаемом подкоренного выражения и далее означает производную по координате  $z$ .

Оценим порядки слагаемых в подкоренном выражении формулы (7), приведя ее к безразмерному виду. Для этого запишем следующие соотношения между размерными и безразмерными величинами, входящими в (7):

$$z = \bar{z}h, \quad r = \bar{r}R_2, \quad f(z) = \hat{v}_r R_2 \overline{f(\bar{z})}, \quad f'(z) = \frac{\hat{v}_r R_2}{h} \overline{f'(\bar{z})}, \quad (8)$$

где в качестве характерных координат взяты зазор  $h$  между дисками и радиус  $R_2$  центров выходных отверстий (рис. 1); маленькая дуга над  $v_r$  означает осреднение по координате  $r$ , а верхняя черта обозначает безразмерную величину. Подставив выражения размерных величин по соотношениям (8) в формулу (7), приведем ее к виду

$$H = \frac{\hat{v}_r h}{\bar{r}} \sqrt{\left(\frac{\overline{f(\bar{z})}}{\bar{r}^2}\right)^2 \frac{h^2}{R_2^2} + \left(\frac{\overline{f'(\bar{z})}}{2}\right)^2}. \quad (9)$$

Так как в формуле (9) подкоренное выражение приведено к безразмерной форме, то порядки слагаемых в этом выражении будут определяться порядком коэффициентов при этих слагаемых. Коэффициент при первом слагаемом значительно меньше

коэффициента при втором слагаемом, т.е.  $\frac{h^2}{R_2^2} \ll \frac{1}{4}$ . Так, например, если положить

$h \sim 10^{-3}$  м и  $R_2 \sim 10^{-2}$  м, то  $\frac{h^2}{R_2^2} \sim 0,01$ . Таким образом, в подкоренных выражениях (9)

и (7) можно оставить только вторые слагаемые. На этом основании интенсивность скоростей деформации (7) запишется как

$$H = \left| \frac{f'(z)}{2r} \right| = \frac{1}{2r} |f'(z)|. \quad (10)$$

В этом случае с учетом (6) соотношения (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -p - 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = -p + 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \\ \tau_{rz} &= k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f'(z)}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

Так как продукт принудительно вращается при помощи крестообразных лопастей, то окружная скорость точек продукта не больше величины  $\omega r$ , где  $\omega$  — угловая скорость лопастей мешалки. Поэтому примем эту величину за окружную скорость  $v_\varphi$ , т.е.

$$v_\varphi = \omega r. \quad (12)$$

Подстановка выражений компонент тензора напряжений из (11) и окружной скорости (12) при условии  $v_z \approx 0$  в уравнение (2) приводит это уравнение к следующему виду:

$$-\frac{[f(z)]^2}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( p - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \right) + \frac{k}{\rho} n^{-1} \left( \frac{1}{r} \right)^n \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z). \quad (13)$$

Выражение в левой части равенства (13) значительно меньше каждого из слагаемых в его правой части. Это следует из оценок, сделанных аналогично оценкам

в формуле (7). Тогда можно принять  $\frac{[f(z)]^2}{r^3} \sim 0$ , и в получившемся уравнении раз-

деляются слагаемые, зависящие только от соответствующих координат  $r$  и  $z$ . Кроме

того, в первом слагаемом правой части величина  $\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \ll p$ , и ей можно пренеб-

речь по сравнению с давлением  $p$ . Это следует из условия малости угловой скорости  $\omega$  вращения мешалок. Так, например, в реальных охладителях данного типа  $p \sim 10^5$  Па,  $\omega \sim 4$  с<sup>-1</sup>,  $r \sim 0,1$  м,  $\rho \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Отсюда следует справедливость усиленного неравенства, написанного выше. На этом основании уравнение (13) запишется как

$$r^n \frac{\partial p}{\partial r} = k \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z). \quad (14)$$

При этом считается, что давление  $p$  не зависит от поперечной координаты  $z$ . В дальнейшем, в силу симметрии профиля радиальной скорости относительно срединной плоскости дисков, будем при гидродинамических расчетах рассматривать

область  $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ . Для этой области  $\text{sign } f'(z) = 1$ . Приравнивая левую и правую ча-

сти (14) к одной и той же константе  $A$  с учетом  $\text{sign } f'(z) = 1$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функции  $f(z)$  и давления  $p$ :

$$r^n \frac{\partial p}{\partial r} (p) = A, \quad (15)$$

$$k \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] = A. \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) будем решать при следующих граничных условиях:

$$r = R_1, p(R_1) = p_1; \quad r = R_2, p(R_2) = p_2, \quad (17);$$

$$z = 0, f(r, 0) = 0; \quad z = \frac{h}{2}, f\left(r, \frac{h}{2}\right) = 0, \quad (18)$$

где  $R_2$  — расстояние центров выходных отверстий от центров дисков; последнее из граничных условий (18) следует из симметрии профиля радиальной скорости относительно срединной плоскости  $z = \frac{h}{2}$ . Интегрированием уравнений (15) и (16) при граничных условиях (17) и (18) получаем выражения для давления  $p(r)$  и функции  $f(z)$ :

$$p(r) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{R_2^{1-n} - R_1^{1-n}} (r^{1-n} - R_1^{1-n}), \quad (19)$$

$$f(z) = - \left[ - \frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ \left( \frac{h}{2} - z \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (20)$$

Для полного гидродинамического расчета охладителя представляется важным получить зависимость между перепадом давления  $p_1 - p_2$  на входе и выходе продукта из данного охладительного элемента и расходом продукта  $q$ , используя формулу

$q = 4\pi r \int_0^{\frac{h}{2}} v_r dz$ . Подставив в эту формулу выражение  $v_r$  с учетом (20) и интегрируя, получим

$$q = 2\pi h \frac{2n}{2n+1} \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[ \frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (21)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют проводить гидродинамический расчет пластинчатых скребковых теплообменных аппаратов при охлаждении молочной сыворотки для кристаллизации в ней лактозы.

### Библиографический список

1. Бредихин С.А. Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности. М.: Колос, 2010. 408 с.
2. Кулаков А.В., Чесноков В.М. Элементы механики пищевых сред. М.: МГУПБ. 2004. 301 с.
3. Чеботарёв Е.Л., Нестеренко П.Г., Давыдянц Л.Е. и др. Вязкость молочной сыворотки и продуктов из нее // Молочная промышленность. 1983. № 2. С. 26-21.
4. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 352 с.

5. Broun D.J., Bouscm F. Crystal growth measurement and modeling of fluid flow in a cry stal- lizer//Zuckerindustrie. 1992. V. 117. № 1. P. 35-39.

6. Spreer E. Technologie der Milchverarbeitung. Hamburg: Behr's Verlag, 1995. 517 s.

## THE STUDY OF THE MILK WHEY FLOW IN THE HEAT EXCHANGER OF CONTINUOUS ACTION

A.S. BREDIKHIN<sup>1</sup>, V.V. CHERVETSOV<sup>1</sup>, S.A. BREDIKHIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> All-Russia Research Institute of Dairy Industry,

<sup>2</sup> RSAU-MAA named after K.A. Timiryazev)

*The article is devoted to investigation of stationary axisymmetric flow of whey in the scraped heat exchanger. Some results for practical use are received.*

*Key words: axisymmetric flow, whey, viscosity, pressure, expense, lactose crystallization, heat exchanger of continuous action.*

**Бредихин Алексей Сергеевич** — аспирант ГНУ ВНИИ молочной промышленности (г. Москва, ул. Люблинская, д. 35; e-mail: Breds24@yandex.ru).

**Червцов Виктор Владимирович** — д. т. н., ГНУ ВНИИ молочной промышленности (г. Москва, ул. Люблинская, д. 35; e-mail: ChcrlyO fmail.ru),

**Бредихин Сергей Алексеевич** — д. т. н., проф., заведующий кафедрой процессов и аппаратов перерабатывающих производств РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева (127550, г. Москва, ул. Верхняя аллея, д. 4а; тел. (499) 977-92-73; e-mail: Bredihin2006@yandex.ru).