

УДК 636.22/.28.084.522.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОЛОЧНОЙ ПРОДУКТИВНОСТИ КРУПНОГО РОГАТОГО СКОТА НА ОСНОВЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ФЕРХЮЛЬСТА

А.И. КУЦЕНКО

(РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева)

Предложен способ разработки математических моделей динамики формирования продуктивности на примере крупного рогатого скота и методика построения кривых лактации при помощи логистической функции Ферхюльста для дальнейшего использования в системе программирования продуктивности сельскохозяйственных животных.

Ключевые слова: программирование продуктивности, рост и развитие животных, модели продуктивности и кривые лактации, уравнение Ферхюльста, животноводческие комплексы.

Одним из основных резервов повышения уровня развития производства на крупных животноводческих комплексах является использование современных компьютерных технологий, дальнейшее совершенствование которых требует разработки и внедрения систем программирования продуктивности с.-х. животных [1-2, 6-8]. Фундаментом для создания подобного рода систем, их интеллектуальным ядром является математическое моделирование роста, развития и формирования продуктивности животных [4-5].

На примере крупного рогатого скота рассмотрим способ математического описания зависимости во времени общего надоя молока от коровы в период лактации $\Phi(t)$ при помощи логистической функции Ферхюльста, полученной путем решения дифференциального уравнения для ограниченного роста численности биологических популяций [10-12], в виде

$$\Phi(t) = \frac{A}{1 + e^{at+b}} + c, \quad (1)$$

где t — продолжительность периода времени с начала лактации; A — асимптотическая постоянная, соответствующая максимальному общему надоя, который может быть получен от коровы в период лактации; a , b — параметры, отражающие скорость изменения надоев молока во время лактации; c — параметр корректировки начального состояния при $t = 0$:

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{A}{1 + e^b} + c = 0, \text{ откуда } c = -\frac{A}{1 + e^b}. \quad (2)$$

Из (1) автором получено выражение для описания скорости роста или интенсивности надоев молока во времени, которое рассматривается в качестве модели лактации или функции продуктивности животных и графически представляет собой так называемую лактационную кривую

$$\phi(t) = \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{aAe^{at+b}}{(1+e^{at+b})^2}, \quad (3)$$

Другие варианты описания $\phi(t)$ рассмотрены в [13, 9, 2–5].

При $t = -\frac{b}{a} = t'$ (4) достигается максимальная скорость роста общего с начала

лактации надоя молока, что соответствует проявлению максимальной продуктивности или максимальному суточному надоем молока от коровы. Для доказательства этого следует учитывать, что условие (4) получено из предположения, что в выражении (3) $at' + b = 0$, $a < 0$, откуда

$$\phi(t') = -\frac{aAe^{at'+b}}{(1+e^{at'+b})^2} = -\frac{aAe^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{aA}{4} = \phi_{\max}. \quad (5)$$

При этом для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\phi(t') \geq \phi(t) \quad \text{или} \quad -\frac{aA}{4} \geq -\frac{aAe^{at+b}}{(1+e^{at+b})^2}. \quad (6)$$

Справедливость этого утверждения становится очевидной при выполнении преобразований и учете того, что $(-aA) > 0$:

$$-\frac{aA}{4} + \frac{aAe^{at+b}}{(1+e^{at+b})^2} = (-aA) \frac{(1+e^{at+b})^2 - 4e^{at+b}}{4(1+e^{at+b})^2} = (-aA) \frac{(1-e^{at+b})^2}{4(1+e^{at+b})^2} \geq 0. \quad (7)$$

Необходимо отметить следующее важное свойство функции продуктивности животных (3) — она симметрична относительно оси $t = t'$, проходящей через максимальное ее значение $\phi(t') = \phi_{\max}$, т.е. $\phi(t' + \Delta) = \phi(t' - \Delta)$ при $0 \leq \Delta \leq t'$.

$$\phi(t' + \Delta) = -\frac{aAe^{a(t'+\Delta)+b}}{(1+e^{a(t'+\Delta)+b})^2} = -\frac{aAe^{at'+b}e^{a\Delta}}{(1+e^{at'+b}e^{a\Delta})^2} = -\frac{aAe^{a\Delta}}{(1+e^{a\Delta})^2}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi(t' - \Delta) &= -\frac{aAe^{a(t'-\Delta)+b}}{(1+e^{a(t'-\Delta)+b})^2} = -\frac{aAe^{at'+b}e^{-a\Delta}}{(1+e^{at'+b}e^{-a\Delta})^2} = -\frac{aAe^{-a\Delta}}{(1+e^{-a\Delta})^2} = \\ &= -\frac{\frac{aA}{e^{a\Delta}}}{\left(1+\frac{1}{e^{a\Delta}}\right)^2} = -\frac{\frac{aA}{e^{a\Delta}}}{\left(\frac{e^{a\Delta}+1}{e^{a\Delta}}\right)^2} = -\frac{aAe^{a\Delta}}{(1+e^{a\Delta})^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия (5) также следует, что $-aA = 4\phi_{\max}$. Это позволяет получить из (3) универсальную формулу для описания функции продуктивности животных в более удобном для восприятия виде с использованием основного характеризующего лактационную кривую параметра ϕ_{\max} вместо двух сомножителей a, A :

$$\phi(t) = \frac{4\phi_{\max} e^{at+b}}{(1 + e^{at+b})^2}. \quad (10)$$

Отсюда
$$\phi_0 = \phi(0) = \frac{4\phi_{\max} e^b}{(1 + e^b)^2}. \quad (11)$$

Обозначая $x = e^b$, условие (11) можно записать в виде квадратного уравнения

$$(1+x)^2 = \frac{4\phi_{\max}}{\phi_0} x \quad \text{или} \quad x^2 - \left(\frac{4\phi_{\max}}{\phi_0} - 2 \right) x + 1 = 0. \quad (12)$$

Решением полученного квадратного уравнения (12) являются корни

$$x_{1,2} = \left(\frac{2\phi_{\max}}{\phi_0} - 1 \right) \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\phi_{\max}}{\phi_0} \left(\frac{\phi_{\max}}{\phi_0} - 1 \right)}. \quad (13)$$

Как это видно из формулы (13), корни квадратного уравнения зависят только от отношения максимального суточного надоя молока ϕ_{\max} к суточному надоею в начале лактации ϕ_0 . Поэтому обозначим через k коэффициент их отношения

$$k = \frac{\phi_{\max}}{\phi_0}. \quad (14)$$

Тогда корни квадратного уравнения (12) определяются следующим выражением:

$$x_{1,2} = (2k - 1) \pm 2 \cdot \sqrt{k(k - 1)}. \quad (15)$$

При этом следует иметь в виду, что корни квадратного уравнения $x_{1,2}$ должны быть положительными, остальные отбрасываются, так как $x = e^b > 0$. Также нельзя принимать во внимание и те решения, которые при их последующем использовании противоречат здравому смыслу.

Отсюда, подставляя конкретные значения ϕ_0, ϕ_{\max}, t' и вычисляя $x_{1,2}$, определяем неизвестные значения параметров логистической функции (1) и функции продуктивности (3), (10):

$$b = \ln(x), \quad a = -\frac{b}{t'}, \quad A = -\frac{4\phi_{\max}}{a}, \quad c = -\frac{A}{1 + e^b}. \quad (16)$$

Для определенности при описании спектра возможных вариантов представления лактационных кривых, реализуемых в молочном животноводстве, будем исходить из следующих основных положений:

1) максимальные суточные надои молока в период лактации коров составляют $\phi_{\max} = 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55$ л (7 урней);

2) продолжительность периодов времени до получения максимальных суточных надоев молока составляет $t' = 60, 70, 80, 90, 100$ сут. (5 урней);

3) начальные суточные надои молока, которые могут быть получены от коров различной продуктивности (при использовании коэффициента превышения максимального суточного надоя по сравнению с надоем в начале периода лактации $\kappa = 2$) составляют $\Phi_0 = 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5$ л (7 уровней).

В таблице 1 представлены исходные данные, на основании которых рассчитаны по формулам (16) параметры функции продуктивности (3), (10) и логистической функции (1). Параметры $a1, a2, a3, a4, a5$ соответствуют получению максимальных суточных надоев молока при $t' = 60, 70, 80, 90, 100$ сут. То же самое относится и к параметрам $A1, A2, A3, A4, A5$, а также $c1, c2, c3, c4, c5$. Таким образом были рассчитаны данные для 7-5 = 35 основных вариантов лактационных кривых: $\Phi(t)$ и функций общего надоя молока от начала лактации коров $\Phi(0)$

Т а б л и ц а 1

Исходные данные и параметры функции продуктивности $\Phi(0)$ (л/сут.) и логистической функции $O(f)$ (л)

1	Φ_{\max}	25	30	35	40	45	50	55
2	Φ_0	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5
3	κ	2	2	2	2	2	2	2
4	b	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763
5	$\partial 1$	-0,02938	-0,02938	-0,02938	-0,02938	-0,02938	-0,02938	-0,02938
6	$a2$	-0,02518	-0,02518	-0,02518	-0,02518	-0,02518	-0,02518	-0,02518
7	$a3$	-0,02203	-0,02203	-0,02203	-0,02203	-0,02203	-0,02203	-0,02203
8	$a4$	-0,01959	-0,01959	-0,01959	-0,01959	-0,01959	-0,01959	-0,01959
9	$a5$	-0,01763	-0,01763	-0,01763	-0,01763	-0,01763	-0,01763	-0,01763
10	$A1$	3403,8	4084,5	4765,2	5446,0	6126,8	6807,6	7488,3
11	$A2$	3971,1	4765,3	5559,5	6353,7	7147,9	7942,1	8736,4
12	$A3$	4538,4	5446,0	6353,7	7261,4	8169,1	9076,7	9984,4
13	$A4$	5105,7	6126,8	7147,9	8169,1	9190,2	10211,3	11232,5
14	$A5$	5673,0	6807,6	7942,1	9076,7	10211,3	11345,9	12480,5
15	$c1$	-498,5	-598,2	-697,9	-797,6	-897,2	-996,9	-1096,6
16	$c2$	-581,6	-697,9	-814,2	-930,5	-1046,8	-1163,1	-1279,4
17	$c3$	-664,6	-797,6	-930,5	-1063,4	-1196,3	-1329,3	-1462,2
18	$c4$	-747,7	-897,2	-1046,8	-1196,3	-1345,9	-1495,4	-1645,0
19	$c5$	-830,8	-996,9	-1163,1	-1329,3	-1495,4	-1661,6	-1827,7

В блоке рисунков представлены попарно отдельные варианты лактационных кривых: $\Phi(t)$ и функций общего надоя молока от начала лактации $\Phi(0)$ по данным таблицы 1. При этом первая пара графиков (табл. 1, строки 1-5, 10, 15) соответствует условию получения максимальных суточных надоев молока от коров при $t' = 60$ сут.

Вторая пара графиков (табл. 1, строки 1-4, 8, 13, 18) соответствует условию получения максимальных суточных надоев молока от коров при $t' = 90$ сут.

Анализ этих графиков и расчетных данных для них показывает, что вторая пара графиков лучше, чем первая, отображает реальный процесс доения коров. На заключительном отрезке лактации коров по второй паре графиков в период 200-300 сут. суточные надои снижаются от 9,3 до 1,6 л/сут. по нижней кривой и от 20,5 до

3,5 л/сут. по верхней кривой лактации. При этом общие надои за лактацию соответственно составляют 4300 и 9400 л.

Лактационные кривые первой пары графиков на заключительном отрезке кривой лактации демонстрируют снижение надоев до минимальных значений от 0,09 до 0,2 л/сут. А это не в полной мере соответствует истинному положению дел в практике ведения молочного животноводства, хотя при этом общие надои за лактацию соответственно составляют 2900 и 6400 л.

Для устранения указанного недостатка предлагается модель лактации животных (10) модифицировать путем внесения в формулу и использования дополнительного слагаемого в виде

$$\phi(t) = \frac{4\phi_{\max} e^{at+b}}{(1 + e^{at+b})^2} + lt, \quad (17)$$

где l — корректирующий лактационную кривую параметр. Это позволит строить асимметричные графики функции продуктивности, которые при $l > 0$ будут незначительно приподнимать лактационную кривую по сравнению с исходной кривой (тем больше, чем дальше от начала лактации), а при $l < 0$ соответственно прижимать лактационную кривую к оси абсцисс, если на заключительном отрезке периода лактации получаются слишком высокие суточные надои.

Для определения параметра l рассмотрим следующую процедуру.

Так как на заключительном отрезке лактации коров в период 200-300 сут. суточные надои снижаются от 1,6 до 0,09 л/сут. по нижней кривой и от 3,5 до 0,2 л/сут. по верхней кривой лактации первой пары графиков, то к названным ранее исходным условиям дополнительно введем следующее положение:

4) суточные надои молока в конце лактационного периода при $l = 300$ сут. составляют $\phi_{300} = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5$ л (7 уровней). (Это соответствует десятикратному уменьшению надоев по сравнению с максимальными, хотя это и необязательно).

Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\phi_{300} = \frac{4\phi_{\max} e^{300a+b}}{(1 + e^{300a+b})^2} + 300l. \quad (18)$$

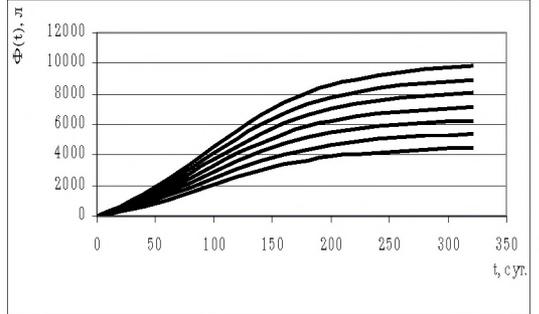
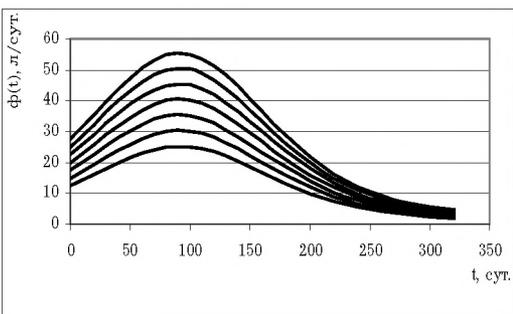
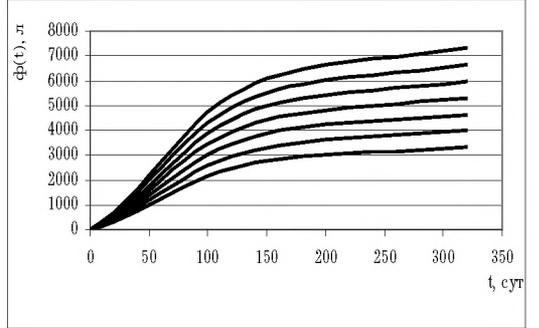
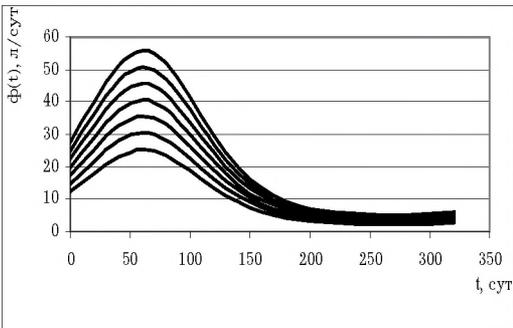
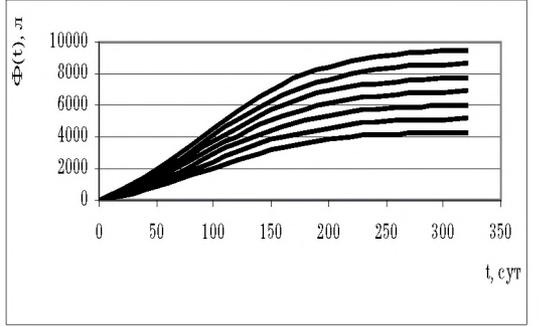
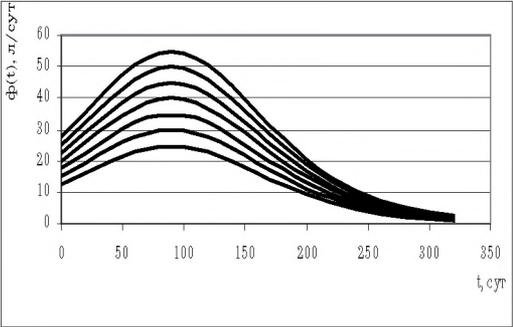
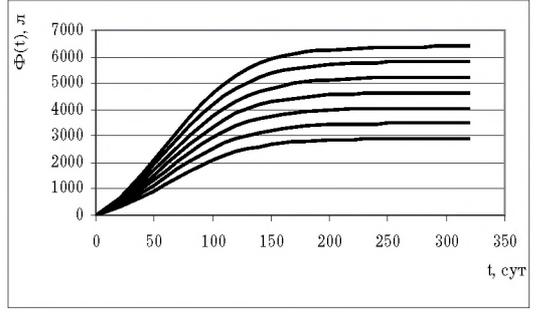
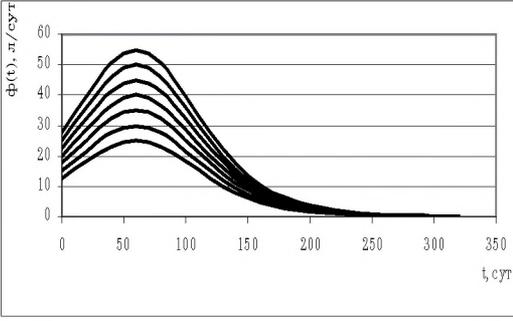
Отсюда

$$l = \frac{\phi_{300} - \frac{4\phi_{\max} e^{300a+b}}{(1 + e^{300a+b})^2}}{300}. \quad (19)$$

Аналогично коэффициенту ξ рассмотрим коэффициент гувеличения или уменьшения продолжительности периода получения максимальных суточных надоев по сравнению с периодом, выбранным в качестве базового, а п р и м е р $t_0' = 60$ сут.:

$$\tau = \frac{t'}{t_0'}. \quad (20)$$

Данное допущение, как и все предыдущие, могут быть соответствующим образом скорректированы при наличии других сведений о параметрах лактационного периода животных при учете имеющихся условий производства.



Блок рисунков: слева — динамика суточных надоев молока (л/сут.); справа — динамика общих надоев молока с начала лактации коров (л)

Для удобства использования модифицированной формулы лактационной кривой (17) в системе программирования молочной продуктивности при ее привязке к конкретным производственным условиям корректирующий лактационную кривую параметр l свяжем с основными характеристиками периода лактации в виде

$$l = \frac{1}{v} \frac{\phi_{\max}}{\phi_0} \frac{t'}{t_0'} = \frac{k\tau}{v}. \quad (21)$$

Здесь v — вспомогательный параметр, позволяющий учитывать особенности формирования молочной продуктивности, соответствующий размерности (сравнимой с продолжительностью) рассматриваемого периода лактации. Он определяется из (21) на основе установленных ранее параметров с помощью следующего вы-

$$v = \frac{1}{l} \frac{\phi_{\max}}{\phi_0} \frac{t'}{t_0'} = \frac{k\tau}{l}. \quad (22)$$

Смысл данного нововведения заключается в том, что это позволяет настраивать предлагаемую модель динамики формирования продуктивности животных (17) по трем наиболее значимым точкам кривой лактации при привязке ее к конкретным производственным условиям молочного комплекса на основе имеющихся фактических данных. Здесь первостепенное внимание уделяется наиболее важным для характеристики физиологического состояния животных параметрам лактационного периода, таким как начальный ϕ_0 ($t = 0$), максимальный ϕ_{\max} ($t = t'$) и заключительный ϕ_{300} ($t = 300$) суточные надои молока от коровы.

Модифицированный вариант описания функции продуктивности (17) вызывает необходимость соответствующего изменения логистической функции Ферхюльста (1) в выражении для общего надоя молока от животного в период лактации, которое представлено в следующем виде:

$$\Phi(t) = \frac{A}{1 + e^{at+b}} + \frac{lt^2}{2} + c. \quad (23)$$

Оно получено путем интегрирования выражения (17), в результате чего появляется дополнительное слагаемое в формуле (1).

На основании вышесказанного составлена таблица 2, в которую внесены данные по вновь введенным параметрам и с помощью формул (17-23) рассчитаны данные для построения модифицированных функций продуктивности и логистических функций.

На рисунке третья пара графиков (табл. 1, строки 1-5, 10, 15; табл. 2, строки 1-6, 11, 16) соответствует условию получения максимальных суточных надоев молока от коров при $t' = 60$ сут. При этом на заключительном отрезке лактации коров в период 200-300 сут. суточные надои снижаются от 3,2 до 2,5 л/сут. по нижней кривой и от 7,0 до 5,5 л/сут. по верхней кривой лактации. Общие надои за лактацию соответственно составляют 3300 и 7200 л.

Дополнительные данные для расчета модифицированных функций продуктивности $\phi(t)$ (л/сут.) и логистической $O(f)$ (л)

1	ϕ_{300}	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
2	ϕ_{\max}	25	30	35	40	45	50	55
3	ϕ_0	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5
4	k	2	2	2	2	2	2	2
5	b	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763	1,763
6	$I1$	0,00804	0,00965	0,01126	0,01287	0,01448	0,01609	0,01780
7	$I2$	0,00732	0,00878	0,01025	0,01171	0,01317	0,01464	0,01610
8	$I3$	0,00574	0,00688	0,00803	0,00918	0,01033	0,01148	0,01262
9	$I4$	0,00297	0,00356	0,00416	0,00475	0,00534	0,00594	0,00653
10	$I5$	-0,00120	-0,00140	-0,00168	-0,00192	-0,00216	-0,00240	-0,00264
11	$\tau1$	1	1	1	1	1	1	1
12	$\tau2$	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167
13	$\tau3$	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333
14	$\tau4$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
15	$\tau5$	1,667	1,667	1,667	1,667	1,667	1,667	1,667
16	$v1$	248,6	207,2	177,6	155,4	138,1	124,3	113,0
17	$v2$	318,8	265,7	227,7	199,3	177,1	159,4	144,9
18	$v3$	464,7	387,3	332,0	290,5	258,2	232,4	211,2
19	$v4$	1010,6	842,1	721,8	631,6	561,4	505,3	459,3
20	$v5$	-2781,3	-2317,7	-1986,6	-1738,3	-1545,2	-1390,6	-1264,2

Четвертая пара графиков (табл. 1, строки 1-4, 8, 13, 18; табл. 2, строки 1-5, 9, 14, 19) соответствует условию получения максимальных суточных надоев молока от коров при $t' = 90$ сут. При этом на заключительном отрезке лактации коров в период 200-300 сут. суточные надои снижаются от 9,9 до 2,5 л/сут. по нижней кривой и от 21,8 до 5,5 л/сут. по верхней кривой лактации. Общие надои за лактацию соответственно составляют 4400 и 9700 л.

Выводы

1. На основе решения уравнения Ферхюльста разработаны новые модели динамики формирования продуктивности животных и методика построения лактационных кривых, которые учитывают наиболее важные характеристики физиологического состояния животных в период лактации, такие как начальный, максимальный (и продолжительность его достижения), заключительный суточные надои молока.

2. Чем позже от начала лактации коров можно получать максимальные суточные надои, тем большим будет общий надой за лактацию. Поэтому необходимо всячески стимулировать «разгон» продуктивных возможностей для реализации генетического потенциала животных, механизмом реализации которого является создаваемая в настоящее время система программирования продуктивности с.-х. животных для комплексов по производству молока, говядины, свинины и других видов продукции, которые действительно смогут эффективно ее использовать.

Библиографический список

1. *Гатаулин Л.М., Куценко А.И.* Программирование продуктивности сельскохозяйственных животных // Доклады ТСХА. Вып. 279. Ч. 2. М.: МСХА., 2007. С. 32-36.
2. *Гатаулин Л.М., Иванов Ю.Г., Куценко А.И.* Моделирование производственных процессов на молочных комплексах / Тр. десятой Межд. науч.-практ. конф. НАЭКОР (20-21 апреля 2006 г.). Вып. 10. Т. 1. М.: ООО «НИПКЦ Восход-А», 2006. С. 114-119.
3. *Карташов Л.П., Макаровская З.В., Цой Ю.А.* Организация, техника и технология машинного доения коров: Уч. пос. М.: РГАУ, 2008.
4. *Куценко А.И.* Моделирование роста и развития крупного рогатого скота при выращивании и откорме // Известия ТСХА, 2011. Вып. 2. С. 139-152.
5. *Куценко А.И.* Оптимизация стратегии формирования продуктивности при выращивании и откорме крупного рогатого скота на комплексах // Известия ТСХА, 2008. Вып. 2. С. 103-115.
6. *Куценко А.И.* Программирование продуктивности на комплексах по производству говядины / Тр. 11-й межд. науч.-практ. конф. Подольск: ВНИИМЖ, 2008. Т. 18. Ч. 1. С. 165—173.
7. *Куценко А.И.* Особенности программирования продуктивности на комплексах по откорму крупного рогатого скота // Известия ТСХА, 2009. Вып. 2. С. 183-187.
8. *Куценко А.И.* Экономико-математическая модель функционирования комплексов по выращиванию и откорму крупного рогатого скота // Вестник МГАУ, 2008. Сер. «Агроинженерия». № 3 (28). С. 91-96.
9. *Морозов Н.М., Текучее П.К., Текучева М.С.* Экономико-математическая модель производства молока. Подольск, ВНИИМЖ, 2003. 138 с.
10. *Плохинский Н.А.* Биометрия. 2-е изд. М.: МГУ, 1970. С. 268-269.
11. *Verhulst P.F.* (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathematique et physique* 10:113-121.
12. *Verhulst P.F.* Recherches Mathematiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles*. 18. Art. 1. 1-45, 1845 (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase).
13. *Wood P.D.P.* A simple model of lactation curves for milk yield, food requirement and body weight // *Animal Production*. 28, 1970. P. 55-63.

Рецензент — д. с.-х. н. Ю.А. Юлдашбаев

SUMMARY

Productivity formation dynamics mathematical models organization way, by example of both cattle and lactation curves tracing methods through Ferhulst logistic function for further use in farm animals programming system, has been suggested in this scientific article.

Key words: productivity programming, growth and development of farm animals, productivity models and lactation curves, Ferhulst equation, stockbreeding complexes.

Куценко Александр Иванович — к. э. н. (127550, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49; e-mail: progprod(®),mail.ru)