УДК 536.2:517.9

ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Г. Б. ЗАБОЛОТСКИХ

(Кафедра высшей математики)

Многие прикладные задачи, как, например, распространение тепла и влаги, требуют определения полей температур и концентраций. Если при этом перепады температур достаточно велики, задача сводится к необходимости решения уравнения теплопроводности с коэффициентами, зависящими от температур. Поскольку такое уравнение нелинейное, его интегрирование представляет большие трудности и проводилось только в отдельных случаях при тех или иных приближениях (например, приближенная линеаризация уравнения и т. п.).

Указанные трудности могут быть преодолены, если уравнения преобразовать к специальным переменным [3], что позволяет при достаточно общих предположениях о зависимостях коэффициентов теплопроводности и теплоемкости от температур получать распределения температур в рассматриваемой среде.

Уравнение теплопроводности с коэффициентами теплопроводности и теплоемкости, зависящими от температуры, для полуограниченного тела имеет вид [2]:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right],$$

$$t>0,\ 0<x<+\infty. \tag{1}$$

Пусть имеются краевые условия

$$\begin{cases} T(0,t)=T_0, & T_0>0. \\ T(x,0)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Если искать распределение температур в виде $T=f(\eta)$, где

$$\eta=\frac{x}{\sqrt{t}}, \tag{3}$$

то уравнение (1) сводится к виду

$$-C(T)\frac{dT}{d\eta}\cdot\frac{\eta}{2}=\frac{d}{d\eta}\left[\lambda(T)\frac{dT}{d\eta}\right]. \tag{4}$$

Следуя [1], введем новые переменные

$$q=\lambda(T)\frac{dT}{d\eta}, \tag{5}$$

$$i=\int\limits_{T_0}^{T}C(T)\,dT, \tag{6}$$

получаем

$$-\frac{\eta}{2}C(T)=\frac{aq}{dT}, \tag{7}$$

или ввиду (6)

$$\frac{dq}{di}=-\frac{\eta}{2}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по i, получим

$$q\frac{d^2q}{di^2}=-\frac{1}{2}\varphi(i), \tag{9}$$

где $\varphi(i)=\dfrac{\lambda(T)}{C(T)}$ (10), т. е. уравнение **(1)** для случая $T=f(\eta)$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (9).

Преобразуем краевые условия (2) к новым переменным.

При $t=0$, что соответствует $i=\int\limits_{T_0}^{0}C(T)dT=$ $=i_0$, $q=0$, так как $q=\sqrt{t}\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}$ (11), а $\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}$ — величина ограниченная.

Из (8) следует, что при $\eta=0$ $\dfrac{dq}{di}=0$. Но $\eta=0$ соответствует $i=0$, значит, при

$$i=0\ \frac{dq}{di}=0. \tag{12}$$

Переходя к безразмерной переменной

$$i_1=\frac{i}{i_0}, \tag{13}$$

окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned} &q=0 \text{ при } i_1=1, \\ &\frac{dq}{di_1}=0 \text{ при } i_1=0 \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, задача (1)—(2) сводится к нахождению решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$q\frac{d^2q}{di_1^2}=-\frac{\varphi(i_1)}{2}i_0^2 \tag{14}$$

при краевых условиях

$$q(1)=0 \tag{15}$$

$$\left.\left(\frac{dq}{di_1}\right)\right|_{i_1=0}=0. \tag{16}$$

Представим правую часть (14) в виде ряда с известными коэффициентами и получим уравнение

$$q\frac{d^2q}{di_1^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n i_1^n. \tag{17}$$

Решение (17) будем искать также в виде ряда

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i_1^n \qquad (18)$$

с коэффициентами a_n, подлежащими определению.

Подставляя (18) в (17) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях i_1, получаем

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{b_0}{4a_0}, \\ a_3 = -\dfrac{b_1}{12a_0}, \\ a_n = -\dfrac{1}{n(n-1)a_0}\left[\dfrac{b_{n-2}}{2} + \right. \\ \left. + \sum\limits_{k=2}^{n-2} (n-k)(n-k-1)a_k a_{n-k}\right]. \end{cases} \qquad (19)$$

Исходя из (18) и (11) $a_0 \neq 0$ краевое условие (16) дает $a_1 = 0$. Рекуррентная формула (19) позволяет выразить коэффициенты a_n, $n \geqslant 4$ через a_0. Для определения последнего из условия (15) имеем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0. \qquad (20)$$

Рассмотрим сначала случай линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при постоянной теплоемкости

$$\lambda(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T, \quad \alpha_0 > 0 \qquad (21)$$
$$C = C_0 = \text{const}.$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$q\frac{d^2 q}{di_1^2} = -\frac{1}{2}(d + c_1 i_1), \qquad (22)$$

где $c_1 = -C_0 T_0^3 \alpha_1$, $d = C_0 T_0^2 \lambda(T_0)$.

Будем искать решение уравнения (22), удовлетворяющее краевым условиям (15)—(16), в виде (18). Используя (16) и (19), получаем

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{d}{4a_0}, \quad a_3 = -\frac{c_1}{12a_0}, \dots \qquad (23)$$

Для нахождения a_0, ограничиваясь 6 первыми членами ряда (22), имеем уравнение

$$a_0^4 - \frac{3d + c_1}{12} a_0^2 - \frac{5d^2 + 4dc_1}{480} = 0, \qquad (24)$$

решая которое, получаем

$$a_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3d + c_1}{6} + \sqrt{\left(\frac{3d + c_1}{6}\right)^2 + \frac{5d^2 + 4dc_1}{30}}}. \qquad (25)$$

Выражение $dc_1 = -C_0^2 T_0^5 \alpha_1 \lambda(T_0)$ при $\alpha_1 < 0$ положительно. При $\alpha_1 > 0$, $dC_1 < 0$ в этом случае рассмотрим знак выражения $\mathbf{5\,d^2 + 4dc_1 = C_0^2 T_0^4 \lambda(T_0)\,[5\alpha_0 + \alpha_1 T_0] > 0}$. **Следовательно**, абсолютная величина первого слагаемого меньше абсолютной величины корня. Поскольку в силу (11) знак a_0 совпадает со знаком $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$, $a_0 < 0$. (24′).

Зная a_0, можно определить a_n из системы (23), тем самым найдем $q(i_1)$.

Рассмотрим далее случай линейных зависимостей коэффициентов теплопроводности и теплоемкости:

$$\lambda(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T$$
$$C(T) = \beta_0 + \beta_1 T, \quad \beta_0 > 0. \qquad (26)$$

Исходя из (6) находим

$$T = -\frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \times \sqrt{C^2(T_0) - i_1 \beta_1 T_0 (2\beta_0 + \beta_1 T_0)}. \qquad (27)$$

Перед корнем поставлен плюс, так как $C(T) > 0$.

В силу (27) уравнение (14) запишется в виде

$$q\frac{d^2 q}{di_1^2} = -\frac{1}{2}\left(m + \frac{p}{\sqrt{1 + k_1 i_1}}\right), \qquad (28)$$

где

$$m = i_0^2 \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad p = \frac{i_0^2 \alpha_0 - \beta_0 m}{C(T_0)},$$

$$k_1 = \frac{2\beta_1 i_0}{C^2(T_0)}.$$

Очевидно, что $|k_1| < 1$, поэтому, разлагая правую часть (28) по степеням i_1, получаем

$$q\frac{d^2 q}{di_1^2} = -\frac{1}{2} \times \left[d_1 + p\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} i_1^n \left(\frac{k_1{}^n}{2}\right)\right], \qquad (29)$$

где $d_1 = m + p$.

Если искать решение уравнения (29), удовлетворяющее краевым условиям (15) и (16), то аналогично предыдущему случаю имеем

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = -\dfrac{d_1}{4a_0}, \\ a_n = \dfrac{1}{n(n-1)a_0} \times \\ \times \left[(-1)^{n+1} \dfrac{p k_1^{n-2}(2n-5)!!}{2^{n-1}(n-2)!} - \right. \\ \left. - \sum\limits_{j=2}^{n-2} (n-j)(n-j-1)a_j a_{n-j}\right], \\ n \geqslant 4. \end{cases} \qquad (30)$$

Ограничиваясь пятью первыми членами

ряда (20), получим соотношение для определения a_0

$$a_0=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{k_1p}{6}+\frac{k_1^2p}{16}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(d_1-\frac{k_1p}{6}+\frac{k_1^2p}{16}\right)^2+\frac{d_1}{6}}}. \tag{31}$$

Далее рассмотрим наиболее общий случай квадратичной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при линейной зависимости теплоемкости

$$\lambda(T)=\alpha_0+\alpha_1T\alpha_2T^2,$$
$$C(T)=\beta_0+\beta_1T. \tag{32}$$

Заметим, что этот случай практически охватывает возможные зависимости, встречающиеся в прикладных задачах. Произвольная зависимость $\lambda(T)$ от температуры всегда может быть достаточно хорошо интерполирована квадратичной, а для теплоемкости, слабее зависящей от температуры, — линейной.

Для случая (32) уравнение (14) может быть записано в виде

$$q\frac{d^2q}{di_1^2}=-\frac{1}{2}\left[\gamma_0+\gamma_2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n i_1^n\times\frac{\gamma_0}{n!}\left(\frac{k_1}{2}\right)^n(2n-1)!!+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\gamma_1}{(n-1)!}\times i_1^n\left(\frac{k_1}{2}\right)^{n-1}(2n-3)!!\right], \tag{33}$$

где

$$\gamma_0=\frac{i_0^2}{C(T_0)}\,\frac{\alpha_0\beta_1^2-\alpha_1\beta_1\beta_0+\beta_0^2\alpha_2+\alpha_2C(T_0)}{\beta_1^2};$$

$$\gamma_1=\frac{i_0^3 2\alpha_1}{C(T_0)\beta_1};\quad \gamma_2=i_0^2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{2\alpha_2}{\beta_1^2}\beta_0\right).$$

В силу (16) и (19), имеем

$$a_1=0,$$
$$a_2=-\frac{\gamma_0+\gamma_2}{4a_0},$$
$$a_3=\frac{\gamma_0k_1}{24a_0},$$
$$a_4=-\frac{1}{48a_0}\left(\frac{3k_1^2\gamma_0}{4}-k_1\gamma_1\right)-\frac{1}{96a_0}(\gamma_0+\gamma_2)^2.$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Используя (20), можно найти a_0, а затем и приближенное решение задачи (14)—(16).

Определим теперь распределение температур. Будем его искать в виде ряда по степеням $e^{-\eta}$

$$T(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}l_ne^{-n\eta}, \tag{34}$$

причем для него непосредственно выполняется краевое условие $T(\infty)=0$. Дифференцируя последовательно (34), найдем значения производных функции $T(\eta)$ при $\eta=0$

$$\left.\frac{dT}{d\eta}\right|_{\eta=0}=-\sum_{n=1}^{\infty}nl_n$$
$$\dots\dots\dots\dots \tag{35}$$
$$\left.\frac{d^{(k)}T}{d\eta^k}\right|_{\eta=0}=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^kl_n.$$

При удовлетворении второго краевого условия $T(0)=T_0$ будем иметь соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=T_0. \tag{36}$$

Согласно (18)

$$q=\lambda(T)\frac{dT}{d\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_ni_1^n. \tag{37}$$

Последовательно дифференцируя обе части (37) по η, определим значения производных при $\eta=0$:

$$\begin{cases}\left.\dfrac{dT}{d\eta}\right|_{\eta=0}=\dfrac{a_0}{\lambda(T_0)},\\[2mm] \left.\dfrac{d^2T}{d\eta^2}\right|_{\eta=0}=-\left.\dfrac{d\lambda}{dT}\right|_{T=T_0}\dfrac{a_0^2}{\lambda^3(T_0)},\\[2mm] \left.\dfrac{d^3T}{d\eta^3}\right|_{\eta=0}=\dfrac{2a_2a_0^2}{\lambda^3(T_0)}\,\dfrac{C^2(T_0)}{i_0^2}-\\ \quad-\left.\dfrac{d^2\lambda}{dT^2}\right|_{T=T_0}\dfrac{a_0^3}{\lambda^4(T_0)}+\dfrac{3a_0^3}{\lambda^5(T_0)}\left.\left(\dfrac{d\lambda}{dT}\right)^2\right|_{T=T_0}.\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases} \tag{38}$$

Сравнивая системы (35) и (38) с учетом (36), получим соотношения для определения коэффициентов l_n:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n=T_0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}nl_n=-\dfrac{a_0}{\lambda(T_0)},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2l_n=-\dfrac{a_0^2}{\lambda^3(T_0)}\cdot\left.\dfrac{d\lambda}{dT}\right|_{T=T_0}.\\ \dots\dots\dots\dots\end{cases} \tag{39}$$

Для случая, когда теплопроводность является линейной функцией температуры, а теплоемкость есть величина постоянная, система (39) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = T_0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n l_n = -\frac{a_0}{\alpha_0 + \alpha_1 T_0},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 l_n = -\frac{\alpha_1 a_0^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 T_0)^3},$$

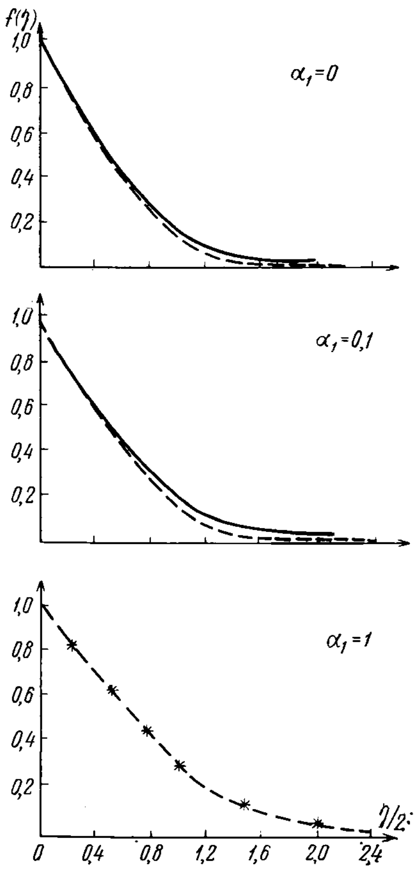
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 l_n = -\frac{2a_2 a_0^2}{(\alpha_0 + \alpha_1 T_0)^3 T_0^2} - \frac{3\alpha_1^2 a_0^3}{(\alpha_0 + \alpha_1 T_0)^5}. \qquad (40)$$

На рисунке сплошная линия соответствует результатам нашего интегрирования уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + \alpha_1 T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = 1 \end{cases}$$



Распределения температур для различных значений коэффициентов α_1.

для значений α_1, равных 0; 0,1 и 1, а пунктирная — результатам численного интегрирования уравнения при тех же краевых условиях, полученных методом конечных разностей в [2].

Далее рассмотрим решение задачи о фазовом переходе, которая сводится к системе двух квазилинейных уравнений теплопроводности [2]

$$C_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right], \quad 0 < x < \zeta; \qquad (41)$$

$$C_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right], \quad \zeta < x < \infty \qquad (42)$$

при краевых условиях

$$T_1 = m_1 \text{ при } x = 0, \qquad (43)$$

$$T_2 = m_2 \text{ при } t = 0 \qquad (44)$$

и условиях на границе фазового перехода

$$T_1 = T_2 = 0 \text{ при } x = \zeta; \qquad (45)$$

$$K_1(0)\left.\frac{\partial T_1}{\partial x}\right|_{x=\zeta} - K_2(0)\left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{x=\zeta} = \lambda\rho\frac{d\zeta}{dt}, \qquad (46)$$

где K_1, C_1 и K_2, C_2 — коэффициенты теплопроводности и теплоемкости соответственно твердой и жидкой фаз.

Будем искать решение (41)—(46) в форме (3), тогда уравнения (41) и (42) примут вид

$$-C_1(T_1)\frac{dT_1}{d\eta}\cdot\frac{\eta}{2} = \frac{d}{d\eta}\left[K_1(T_1)\frac{dT_1}{d\eta}\right],$$

$$0 < \eta < \frac{\zeta}{\sqrt{t}}; \qquad (47)$$

$$-C_2(T_2)\frac{dT_2}{d\eta}\cdot\frac{\eta}{2} = \frac{d}{d\eta}\left[K_2(T_2)\frac{dT_2}{d\eta}\right],$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{t}} < \eta < \infty, \qquad (48)$$

а условия (43)—(46) запишутся в виде

$$f_1(0) = m_1; \qquad (49)$$

$$f_2(\infty) = m_2; \qquad (50)$$

$$f_1\left(\frac{\zeta}{\sqrt{t}}\right) = f_2\left(\frac{\zeta}{\sqrt{t}}\right) = 0; \qquad (51)$$

$$K_1(0)\left.\frac{dT_1}{d\eta}\right|_{\eta=\alpha} - K_2(0)\left.\frac{dT_2}{d\eta}\right|_{\eta=\alpha} = \lambda\rho\frac{\alpha}{2}. \qquad (52)$$

Выполнение условия (51) для произвольного t возможно лишь при

$$\zeta = \alpha\sqrt{t}. \qquad (53)$$

Так же, как и при решении задачи (1)—(2), введем зависимую от температуры переменную q, энтальпию i и безразмерную переменную z, тогда получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений вида (14). Разлагая правые части этих уравнений в ряды соответственно по степеням z_1 и z_2, будем искать решение, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{dq_1}{dz_1}\right|_{z_1=1} = 0; \quad \left.\frac{dq_1}{dz_1}\right|_{z_1=0} = -\frac{\alpha_1}{2}; \quad (54)$$

$$q_2(1) = 0; \quad \left.\frac{dq_2}{dz_2}\right|_{z_2=0} = -\frac{\alpha_2}{2} \quad (55)$$

в виде

$$q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \text{ и } q_2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z_2^n. \quad (56)$$

Удовлетворяя условиям (54) и (55), получим

$$a_1 = -\frac{\alpha_1}{2}, \quad d_1 = -\frac{\alpha_2}{2}, \quad (57)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 0. \quad (58)$$

Применив рекуррентную формулу вида (19), можно определить из (58) значения a_0, d_0 и неизвестные коэффициенты a_n, d_n, $n=2, 3, 4, \ldots$ Чтобы найти выражение для постоянной α, надо использовать соотношение (52)

$$q_1(0) - q_2(0) = \frac{\alpha}{2} \rho\lambda \quad (59)$$

или с учетом (56)

$$a_0 - d_0 = \frac{\alpha}{2} \rho\lambda. \quad (60)$$

Распределение температур ищем в виде

$$T_1(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{-\frac{n}{\eta-\alpha}}, \quad (61)$$

$$T_2(\eta) = m_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n\eta}.$$

Для этих соотношений выполняются условия (44) $T_2(\infty) = m_2$, (45$_1$) $T_1(\alpha) = 0$, а условия (43) и (45$_2$) дают равенства

$$T_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{\frac{n}{\alpha}} = m_1, \quad (62)$$

$$T_2(\alpha) = m_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n\alpha} = 0.$$

Дифференцируя 62, находим значения производных

$$\left.\frac{dT_1}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{\frac{n}{\alpha}} n;$$

$$\left.\frac{d^2T_1}{d\eta^2}\right|_{\eta=0} = \frac{2}{\alpha^3} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{\frac{n}{\alpha}} n + \frac{1}{\alpha^4} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n e^{\frac{n}{\alpha}} n^2 \text{ и т. д.}$$

Далее находим те же производные, используя (5), (56) и (62). Сопоставляя найденные значения производных, получаем систему для определения ρ_n. Распределение температур $T_2(\eta)$ определяется аналогично, только значения производных находятся при $\eta=\alpha$, что отвечает $z_2=0$.

Заметим далее, что уравнение (14) может применяться не только для задач теплопроводности в твердом теле, но и для задачи отсоса неустановившегося теплового пограничного слоя несжимаемой жидкости с физическими параметрами, зависящими от температуры. Если скорость отсоса V_0 зависит только от времени и не меняется вдоль обтекаемого профиля, то решение можно искать в форме $T=T(y, t)$, т. е. в виде, не зависящем от x [1].

Следовательно, уравнение теплового пограничного слоя записывается в виде

$$C(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_0 \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y}\right].$$

Применяя преобразование $z = \int_{T_0}^{T} \lambda(T)\, dT$ и вводя зависимую переменную $q = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$ и независимые переменные $i = \int_{T_0}^{T} C(T)\, dT$ и t, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a(i)\, q^2 \frac{\partial^2 q}{\partial i^2}.$$

Для случая обтекания пластины и для скорости отсоса, изменяющейся в зависимости от времени по закону $v_0 = \frac{K}{\sqrt{t}}$, $K < 0$, $t > 0$, решение можно искать в виде $T = f\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)$. Уравнение в этом случае сводится к виду

$$q_1 q_1'' = -\frac{1}{2} m(i_1),$$

где $q_1 = q\sqrt{t}$, совпадающему с уравнением (14).

Вся изложенная теория вопроса целиком может быть перенесена на схему пограничного слоя с отсосом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Л. Ф. Ламинарный пограничный слой при наличии отсасывания. Киев: Наукова думка, 1968. — 2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. — 3. Файнзильбер А. М. Методы решения уравнений теплопроводности и химической кинетики при наличии переменных коэффициентов. — Изв. ТСХА, 1975, вып. 6, с. 179—188.

Статья поступила 3 мая 1979 г.