Известия ТСХА, выпуск 2, 1991 год

УДК 510.22:631.1.027

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ ПО ПУНКТАМ СНАБЖЕНИЯ

М. М. АРАПОВА

(Кафедра высшей математики)

Сделана попытка решения задачи распределения потребителей сельскохозяйственной продукции по пунктам снабжения (продажи) с помощью теории нечетких множеств.

В ряде исследований реальных проблем математические методы классической теории оказываются малоэффективными или вовсе неприемлемыми. Традиционные классические методы и основанные на них модели строятся на понятии чёткой информации и зачастую на основе ряда допущений об однородности и равномерности распределения объектов, одинаковости качества и других показателей, обеспечивающих искусственную точность метода. Такие подходы часто приводят к упрощенному объяснению реальных ситуаций, нарушают адекватность. Использование понятия нечёткости позволяет ослабить, например, допущения об однородности, равномерности.

Идея нечеткого множества возникла у Л. А. Заде [1, 5] около 25 лет назад и в настоящее время проникла в математику достаточно глубоко. Теория нечётких множеств успешно применяется при решении проблем, связанных с нечётко определенными факторами или «размытыми» условиями, в которых рассматривается действие этих факторов [2, 4].

В данном сообщении предлагается пример применения математического метода, основанного на таких понятиях теории нечетких множеств, как нечёткие графы, нечёткие бинарные отношения. Рассмотрим ситуацию, когда реализуется сельскохозяйственная продукция кооперативов, арендных коллективов, личных подсобных хозяйств, а также часть продукции колхозов, совхозов и других сельскохозяйственных предприятий, которой последние могут располагать после выполнения обязательств по договору контрактации, в том числе в счёт государственного заказа на поставку в общесоюзный, республиканский фонды. Эту продукцию хозяйства-производители реализуют в определенных торговых точках колхозных рынков, потребкооперации или предприятиях общественного питания; расположение этих точек задано. Условимся далее для краткости из всех хозяйств-производителей упоминать лишь кооперативы. И поставим задачу разбиения множества всех потребителей какого-либо одного вида сельскохозяйственной продукции на участки (районы) по пунктам снабжения этой продукцией кооперативами с некоторыми нечёткими условиями принятия решений.

Возьмем для примера 13 потребителей сельскохозяйственной продукции x_1, x_2, x_3..., x_{13} и 5 кооперативов y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, имеющих по одной торговой точке. Тогда $X = x_1, x_2, ..., x_{13}$ — множество потребителей; $Y = y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ — множество кооперативов. Откажемся от равномерности их территориального распределения. Будем считать, что схема размещения потребителей и пунктов снабжения (торговых точек) задана произвольно. Будем также исходить из того, что то предпочтение, которое потребитель отдаёт продукции какого-либо кооператива, определяется не только различием в расстоянии до торговой точки соответствующего кооператива, но и психологическими, социальными, а также экономическими факторами. Потребители по-разному оценивают расстояние до торговой точки кооператива, даже если речь идёт об одном и том же числе километров. Субъективно оценивается потребителями качество продукции и качество обслуживания. Одна и та же цена продукции может одним потребителем оцениваться как низкая, а другим — как высокая или средняя. Влияя на принятие потребителем решения о поездке, эти «субъективности» привносят в задачу элемент нечёткости, неточности. Но, отказавшись от их учёта и упростив тем самым для себя постановку и решение задачи, можно потерять (если не целиком, то в большой степени) адекватность решения реальной ситуации. Применение же понятия нечёткого множества позволит сохранить согласованность, адекватность решения с реалиями. Предпочтение, которое потребитель отдаёт некоторому кооперативу, интерпретируется как нечёткое подмножество.

Для оценки кооперативов используем такие признаки: z_1 — доступность его торговой точки (трудность, дальность пути); z_2 — хорошее качество сельскохозяйственной продукции; z_3 — высокий уровень обслуживания; z_4 — сравнительно низкая цена продукции. Тогда $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ — множество этих признаков. Каждый кооператив характеризуется четырьмя признаками, которые влияют на принятие решения потребителем о поездке за продукцией того или иного кооператива.

Мера существенности того или иного признака меняется при переходе от одного потребителя к другому. На языке теории нечётких множеств: каждый из признаков z характеризуется некоторым нечётким подмножеством. Каждой паре

(x, z), «потребитель — признак», отвечает неотрицательное не превосходящее единицы число $\mu\ (x, z)$ — мера существенности признака z для потребителя x в принятии им решения о поездке. Кооператив, у которого мера существенности признака наиболее близка к оценке потребителя, предпочтительнее другого. Число $\mu\ (x, z)$ представляет собой значение функции принадлежности нечёткого бинарного отношения R: $X \times Z \rightarrow [0;\ 1]$, где $X \times Z$ — прямое произведение множеств X и Z. На рис. 1 изображен нечёткий граф «потребитель — признак», где меры существенности признаков z_1, z_2, z_3, z_4 для потребителей x_1, x_2 ..., x_{13} записаны около соответствующих отрезков, соединяющих точки x_1, x_2 ..., x_{13} с точками z_1, z_2, z_3, z_4. В данном примере, в частности, для потребителя x_4 важны все признаки. Потребитель x_1 отдаёт предпочтение признакам z_1 и z_4. Для потребителей x_2, x_3 признаки z_4 и z_2 с наибольшими мерами существенности являются единственно важными в принятии решения о поездке.

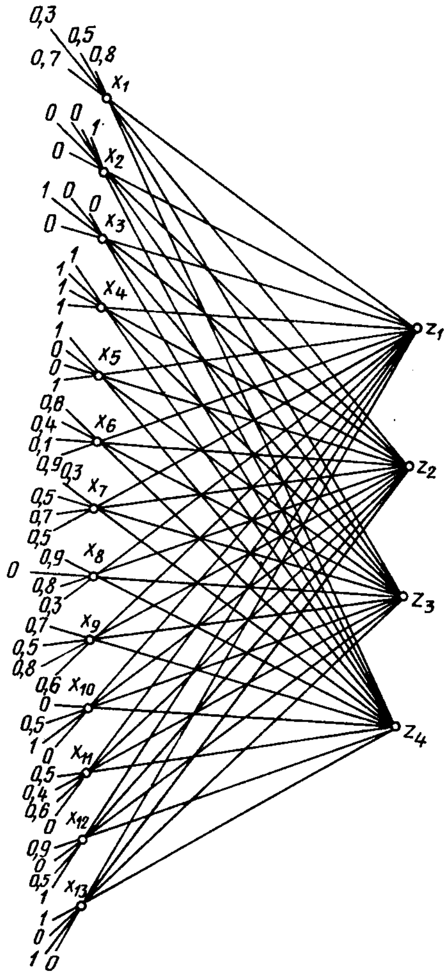

Рис. 1. Нечеткий граф «потребитель — признак».

Чтобы охарактеризовать уровень совместимости каждого кооператива y с каждым из признаков z (или наоборот), каждой паре (z, y), «признак — кооператив», поставлено в соответствие неотрицательное и не превосходящее единицы число $\mu\ (z, y)$. Это число является значением функции принадлежности нечёткого бинарного отношения: Q: $Z \times Y \rightarrow [0;\ 1]$, где $Z \times Y$ — прямое произведение множеств Z и Y.

На рис. 2 изображен нечёткий граф «признак — кооператив», где уровни совместимости кооперативов y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 с признаками z_1, z_2, z_3, z_4 указаны рядом с соответствующими отрезками, соединяющими точки z_1, z_2, z_3, z_4 с точками y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Так, для кооператива y_4 характерно: до торговой точки добраться просто, качество продукции — очень хорошее, цены — достаточно низкие, но качество обслуживания — ниже среднего уровня. В то же время у кооператива y_5 при трудно доступной торговой точке и сравнительно невысоком качестве продукции очень хорошее обслуживание и сравнительно низкие цены. Кооператив y_1 также трудно доступен, но качество его продукции хорошее, обслуживание несколько ниже среднего уровня, однако здесь очень низкие цены.

Предпочтение, которое потребители отдают тому или иному кооперативу, можно представить в виде выпуклого нечеткого подмножества. Для этого можно определить функцию принадлежности (функцию «предпочтения») по формуле

$$\mu_{A_i}(x, y_j)=\frac{\sum\limits_z \mu_R(x, z)\cdot\mu_Q(z, y_j)}{\sum\limits_z \mu_R(x, z)} \qquad (1)$$

для всех $x\in X$, $z\in Z$, $y\in Y$ и потребовать выпуклости отношений R и Q. Величину μ_{A_i} (x, y_j) можно интерпретировать как взвешенную меру предпочтения кооператива y_j потребителем x. Сумма $\sum\limits_Z \mu_R(x, z)$, равная степени нечеткого подмножества [2], указывает число существенных признаков z, которое потребитель x использует для оценки кооператива. Функция принадлежности, описываемая формулой (1), определяет выпуклое нечеткое подмножество, т.е. в данном случае удовлетворяются условия

$$\mu_{A_i}[\lambda(x_1, y_1)+(1-\lambda)(x_2, y_j)]\geqslant$$
$$\geqslant\Lambda[\mu_{A_i}(x_1, y_j), \mu_{A_i}(x_2, y_1)]$$

для всех x_1 и x_2, для $y_j\in Y$ и всех $\lambda\in[0; 1]$. Здесь и далее операции min и max обозначены символами Λ и V. Поскольку все μ_{A_i} (x, y_j) выпуклые, их пересечения тоже являются выпуклыми функциями. Используя (1), найдём матрицу $P=(p_{ij})$, где $i=1$; 12, $j=1$; 5, $p_{ij}=\mu_{A_j}(x_i, y_j)$ а именно:

$$P=\begin{vmatrix}
0{,}509 & 0{,}487 & 0{,}557 & 0{,}722 & 0{,}504\\
0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6\\
0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}3\\
0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}575 & 0{,}725 & 0{,}5\\
0{,}5 & 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}8 & 0{,}4\\
0{,}425 & 0{,}48 & 0{,}555 & 0{,}74 & 0{,}465\\
0{,}67 & 0{,}6 & 0{,}595 & 0{,}745 & 0{,}485\\
0{,}66 & 0{,}445 & 0{,}595 & 0{,}81 & 0{,}42\\
0{,}527 & 0{,}538 & 0{,}585 & 0{,}75 & 0{,}473\\
0{,}533 & 0{,}733 & 0{,}633 & 0{,}733 & 0{,}5\\
0{,}647 & 0{,}56 & 0{,}58 & 0{,}7 & 0{,}56\\
0{,}504 & 0{,}429 & 0{,}583 & 0{,}825 & 0{,}89\\
0{,}75 & 0{,}45 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}45
\end{vmatrix}$$

Получим также вспомогательную матрицу L:

$$L=\begin{vmatrix}
0{,}487 & 0{,}509 & 0{,}509 & 0{,}504 & 0{,}487 & 0{,}487 & 0{,}487 & 0{,}557 & 0{,}504 & 0{,}504\\
0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}6\\
0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3\\
0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}55 & 0{,}5 & 0{,}575 & 0{,}5 & 0{,}5\\
0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}35 & 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}4\\
0{,}425 & 0{,}425 & 0{,}425 & 0{,}425 & 0{,}48 & 0{,}48 & 0{,}465 & 0{,}555 & 0{,}465 & 0{,}465\\
0{,}6 & 0{,}595 & 0{,}67 & 0{,}485 & 0{,}595 & 0{,}6 & 0{,}485 & 0{,}595 & 0{,}485 & 0{,}485\\
0{,}445 & 0{,}595 & 0{,}66 & 0{,}42 & 0{,}445 & 0{,}445 & 0{,}42 & 0{,}595 & 0{,}42 & 0{,}42\\
0{,}527 & 0{,}527 & 0{,}527 & 0{,}473 & 0{,}538 & 0{,}538 & 0{,}473 & 0{,}585 & 0{,}473 & 0{,}473\\
0{,}533 & 0{,}533 & 0{,}533 & 0{,}5 & 0{,}633 & 0{,}733 & 0{,}5 & 0{,}633 & 0{,}5 & 0{,}5\\
0{,}56 & 0{,}58 & 0{,}647 & 0{,}56 & 0{,}56 & 0{,}56 & 0{,}56 & 0{,}58 & 0{,}56 & 0{,}56\\
0{,}429 & 0{,}504 & 0{,}504 & 0{,}504 & 0{,}429 & 0{,}429 & 0{,}429 & 0{,}583 & 0{,}583 & 0{,}825\\
0{,}45 & 0{,}6 & 0{,}75 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}6 & 0{,}45 & 0{,}45
\end{vmatrix}$$

элементы которой найдены по элементам матрицы P, а именно:

$$L=\begin{vmatrix} \mu_{A_1}(x_1,y_1)\Lambda\mu_{A_2}(x_1,y_2)\ldots & \mu_{A_4}(x_1,y_4)\Lambda\mu_{A_5}(x_1,y_5)\\ \mu_{A_1}(x_2,y_1)\Lambda\mu_{A_2}(x_2,y_2)\ldots & \mu_{A_4}(x_2,y_4)\Lambda\mu_{A_5}(x_2,y_5)\\ \cdots & \cdots \\ \mu_{A_1}(x_{13},y_1)\Lambda\mu_{A_2}(x_{13},y_2)\ldots & \mu_{A_4}(x_{13},y_4)\Lambda\mu_{A_5}(x_{13},y_5) \end{vmatrix}.$$

Из элементов матрицы L следуют равенства:

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_1}(x,y_1),\ \mu_{A_2}(x,y_2)]=0{,}6;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_1}(x,y_1),\ \mu_{A_3}(x,y_3)]=0{,}6;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_1}(x,y_1),\ \mu_{A_4}(x,y_4)]=0{,}75\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_1}(x,y_1),\ \mu_{A_5}(x,y_5)]=0{,}6; \qquad (2)\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_2}(x,y_2),\ \mu_{A_3}(x,y_3)]=0{,}633;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_2}(x,y_2)o,\ \mu_{A_4}(x,y_4)]=0{,}733\ ;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_2}(x,y_2),\ \mu_{A_5}(x,y_5)]=0{,}56;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_3}(x,y_3),\ \mu_{A_4}(x,y_4)]=0{,}7;\\
&\underset{x}{V}\Lambda[\mu_{A_3}(x,y_3),\ \mu_{A_5}(x,y_5)]=0{,}583;\\
&\underset{x}{V}\Lambda\,[\mu_{A_4}(x,y_4),\ \mu_{A_5}(x,y_5)]=0{,}825.
\end{aligned}$$

Заметим, что перекрытие участков (районов) снабжения кооперативами является скорее правилом, а не исключением. Для определения участков снабжения можно использовать понятие порога p разбиения [4], последний может быть ограничен условием

$$p<\underset{i}{\Lambda}\underset{j}{V}\Lambda\,[\mu_{A_i}(x,y_i),\ \mu_{A_i}(x,y_j)].$$

В рассматриваемом примере p определяется следующим образом. Находится наименьшая величина из вычисленных в равенствах (2) — 0,56. Затем из матрицы P для p выбирается наиболее возможное значение, которое меньше 0,56. Получаем $p=0{,}557$. Когда порог p выбран, участок снабжения M_j, $j=1;\ 5$ описывается нечетким уровневым множеством:

$$M_j=\{x\,|\,\mu_{A_j}\ (x,\ y)\geqslant \underset{ij}{\Lambda}\underset{x}{V}\Lambda\ [\mu_{A_i}(x,\ y_i),\ \mu_{A_j}\ (x,\ y_j)]\}\ \text{для всех}\ x\in M_j$$

Применив число $p=0{,}557$ в качестве порога, определяем по элементам матрицы P следующие участки (районы) снабжения для 5 кооперативов:

$M_1=\{x_2,\ x_3,\ x_7,\ x_8,\ x_{11},\ x_{13}\}$;

$M_2=\{x_3,\ x_7,\ x_{10},\ x_{11}\}$;

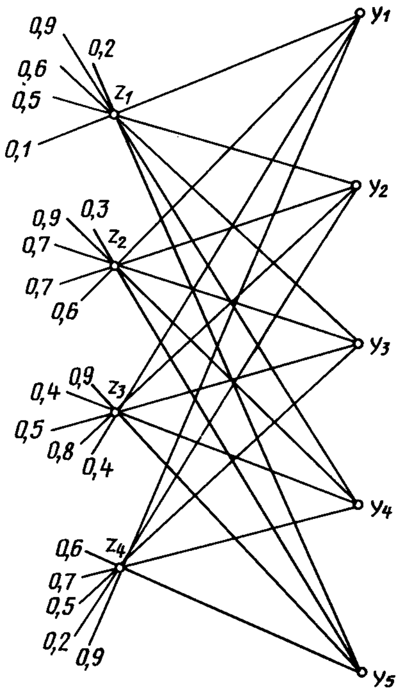

Рис. 2. Нечеткий граф «признак — кооператив».

$M_3=\{x_1, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$;

$M_4=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$;

$M_5=\{x_2, x_{11}, x_{12}\}$.

Кооперативу y_5 отдают предпочтение сравнительно небольшое число потребителей, которые придают большое значение хорошему обслуживанию и сравнительно низкой цене продукции. Размер участка снабжения кооператива y_5 ограничивается общей невысокой совместимостью со всеми рассматриваемыми признаками. У кооперативов y_3 и y_4 — самые объёмные участки снабжения; у последнего участок снабжения включает участки снабжения всех кооперативов; в свою очередь, у кооператива y_3 — соответственно участок снабжения кооператива y_2. Перекрытие участков имеет место в том случае, когда два кооператива схожи по своей привлекательности для потребителей.

Во всех матрицах вместо вертикальных отрезков следует читать квадратные скобки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.— М.: Мир, 1976.— 2. *Deluca A., Termini S.*— Math. Analysis and Appl., 1968, vol. 23, p. 421—427.— 3. *Leung Y.*— Geography Bulletin, 1979, p. 15.— 4. *Negoita C. V.*— Inf. Sci., 1973, vol. 5, p. 279—286.— 5. *Zadeh L. A.*— Fuzzy Sets. Inform. and Control. 1965, vol. 8, June, p. 338—353.

Статья поступила 9 апреля 1990 г.

SUMMARY

An attempt has been made to solve the problem of distribution agricultural produce consumers according to the places of supply by means fuzzy set theory.