КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

«Известия ТСХА»,
выпуск 2, 1979 год

УДК 631.37

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ К РЕШЕНИЮ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

А. А. НИКОНОРЕНКОВ
(Кафедра высшей математики)

При решении многих проблем управления и организации сельскохозяйственного производства приходится рассматривать транспортную задачу — объезд значительного числа пунктов, каждый из которых в один объезд достаточно посетить только один раз (иногда по одному разу в каждом направлении). Приведем несколько простых примеров.

Во время полевых работ необходимо обеспечивать механизаторов и водителей транспортных средств регулярным и полноценным питанием. Для этого целесообразно готовить пищу на стационарном пищеблоке и развозить ее на места групповой работы полевых агрегатов.

Производительность уборочной техники значительно повышается, если в состав работающей группы машин включают резервные (подменные) агрегаты, позволяющие исключить простои основных агрегатов при техническом их обслуживании и устранении неисправностей техники. Данные работы в полевых условиях нужно производить специальными звеньями на специальных машинах без участия основных механизаторов, которые в это время могут работать на подменных агрегатах. В связи с этим необходимо ежедневно объезжать на машине технического обслуживания работающие группы полевых агрегатов.

С целью экономии топлива и особенно времени на переезд от первого пункта до последнего крайне желательно посещать каждый пункт только один раз. Поэтому важно выяснить, есть ли такой маршрут, и если он существует, найти его. Иногда экономически выгодно прокладывать новые дороги, обеспечивающие наличие искомого маршрута.

Эту задачу легко решить, используя теорию графов, вполне доступную любому специалисту сельского хозяйства, имеющему понятие о матрицах.

Цель данной работы — ознакомить с некоторыми из возможных приложений в сельском хозяйстве сравнительно молодой, необычайно бурно развивающейся ветви современной математики — теории графов.

Кратко изложим необходимые положения теории графов.

Г р а ф о м будем называть фигуру, состоящую из точек или кружков, называемых в е р ш и н а м и, и отрезков (не обязательно прямолинейных), попарно соединяющих любое число вершин. Указанные отрезки называются р е б р а м и графа [3].

Последовательность ребер, при которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и нет повторяющихся ребер, называется цепью.

Граф считается с в я з н ы м, если любые две его вершины можно соединить принадлежащей ему цепью. Будем называть цепь г а м и л ь т о н о в о й, если она проходит через все вершины графа в точности по одному разу.

Задача нахождения гамильтоновой цепи

Покажем, как граф может быть построен на практическом примере. Известно, что в подзоне достаточного увлажнения зоны свеклосеяния рекомендовано следующее примерное чередование сельскохозяйственных культур в 10-польном севообороте: 1 — озимые на зеленый корм; однолетние травы на зеленый корм и сено; кукуруза на зеленый корм и ранний силос; 2 — озимая пшеница; 3 — сахарная свекла; 4 — яровые зерновые с подсевом многолетних трав; 5 — многолетние травы; 6 — озимая пшеница; 7 — сахарная свекла; 8 — горох; 9 — озимая пшеница; 10 — кукуруза и др.

Каждому из 10 полей дается номер, соответствующий занимаемому им месту в севообороте. Поля обозначаются кружками, которые и будем считать вершинами графа. В качестве ребер графа рассмотрим дороги, по которым можно проехать от одного поля к другому. Схема дорог определяется нижеприведенными данными.

Номер поля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номера полей, с которыми соединено данное поле	3,9,10	8,10	1,4,6,9	3,8	7,9	3,7,10	5,6,8	2,4,7	1,3,5,10	1,2,6,9

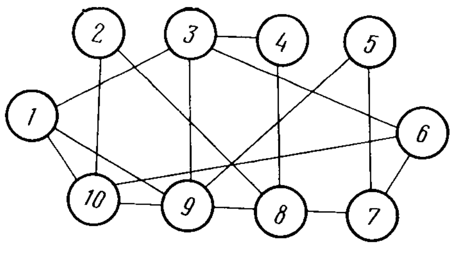

Рис. 1.

Схематически система полей и связывающих их дорог изображена на рис. 1.

Очевидно, с математической точки зрения решение любой из двух сформулированных выше конкретных задач представляет собой нахождение минимальной гамильтоновой цепи на графе, вершинами которого являются пункты назначения, а ребрами — дороги, их связывающие.

Цепь обозначается номерами вершин, через которые она проходит. Например, цепь, соединяющая вершины 1 и 7, проходящая через вершины 9 и 5, обозначается (1, 9, 5, 7).

В настоящем сообщении приводится предлагаемый нами алгоритм для выяснения проблемы существования гамильтоновой цепи и нахождения минимальной гамильтоновой цепи в случае, если она существует.

Для формулировки алгоритма введем понятие матрицы смежности графа. Определим квадратную матрицу порядка $n \times n$, где n — число вершин данного графа G, так: произвольный ее элемент

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i,\ j) \in G, \\ 0, & \text{если ребро } (i,\ j) \notin G. \end{cases}$$

Например, для графа рис. 1 матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Матрица смежности является симметрической, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, что используется для проверки правильности ее составления.

Граф, появляющийся в транспортных задачах сельскохозяйственного профиля, как правило, связный, и потому его матрица смежности не содержит строк, все элементы которых суть нули. Если строк, содержащих по одной единице, более двух, то задача нахождения гамильтоновой цепи не имеет решения. Действительно, это означает, что более чем для двух вершин можно либо только войти в вершину, либо только выйти из нее.

Предлагаемый алгоритм состоит в следующем.

1. Вычеркиваем строку, содержащую минимальное число единиц, и столбец с тем же номером, что и строка. Номер строки i_1 записываем и помечаем строки, содержавшие единицу в i_1-м столбце.

2. Если вновь полученная матрица A_1 содержит строку из нулей, то гамильтоновой цепи у данного графа не существует.

3. Если матрица A_1 нулевых строк не содержит, то к помеченным в 1-м пункте строкам применяем пункт 1. Номер вычеркнутой строки i_2 записываем после i_1 и помечаем строки, содержавшие единицу в i_2-м столбце. Нумерация строк и столбцов сохраняется такой же, как и в исходной матрице.

4. Исследуем новую матрицу A_2. Если в A_2 есть нулевая строка, идем ко 2-му пункту. Если в A_2 нет нулевых строк, то к помеченным в 3-м пункте строкам применяем 1-й пункт. Номер вычеркнутой строки i_3 записываем после i_2 и помечаем строки, содержавшие единицу в i_3-м столбце, и т. д.

Если алгоритм приводит к последовательности $i_1, i_2, ..., i_{n-1}$, то цепь $(i_1, i_2, ..., i_n)$, где i_n — вершина, соответствующая строке, в которой стоит единственный оставшийся от исходной матрицы нуль, является гамильтоновой, так как вычеркивание i_k-й строки и i_k-го столбца означает, что мы исключаем из рассмотрения ребра, инцидентные i_k-й вершине, а значит, снова попасть в эту вершину не сможем.

Если $a_{i_1 i_n} = 1$, то полученную гамильтонову цепь можно замкнуть до цикла; если $a_{i_1 i_n} = 0$, то этого делать нельзя.

Сделаем некоторые пояснения к алгоритму. Пусть на k-м шаге мы вычеркиваем строку и столбец с номером i_k. Если получена строка из нулей, то мы пришли к i_{k+1}-й вершине, которая не соединяется ребром ни с одной из еще не рассмотренных вершин. Вообще же вычеркивание i_k-й строки и i_k-го столбца (одновременное) означает, что мы уже не возвращаемся в вершину i_k.

Единицы в вычеркнутом i_k-м столбце означают, что вершины графа, соответствующие строкам матрицы, содержащим эти единицы, соединены ребрами с i_k-й вершиной. Следовательно, на следующем шаге мы обязательно будем рассматривать вершину, смежную с i_k-й.

Наконец, выбор строки с минимальным числом единиц приводит к вычеркиванию максимально возможного числа нулей, что обеспечивает оптимальный вариант поиска гамильтоновой цепи.

Рассмотрим применение алгоритма на примере матрицы смежности графа полей данного севооборота.

1. Минимальное число единиц (две) сразу в трех строках матрицы: 2-, 4- и 5-й. Вычеркнем, к примеру, 2-ю строку и 2-й столбец.

$$A=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix}\quad i_1=2$$

2. Строк из нулей вновь полученная матрица A_1 не содержит:

$$A_1=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{matrix} \end{array}\quad i_2=8$$

Справа проставляем номера строк исходной матрицы A.

3. Вычеркнем 8-ю строку и 8-й столбец. Получаем матрицу A_2:

$$A_2=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1\\3\\4\\5\\6\\7\\9\\10 \end{matrix} \end{array}\quad i_3=4$$

4. Вычеркнем 4-ю строку и 4-й столбец. Получаем матрицу A_3:

$$A_3=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1\\3\\5\\6\\7\\9\\10 \end{matrix} \end{array}\quad i_4=3$$

5. Вычеркнем 3-ю строку и 3-й столбец. Получаем матрицу A_4:

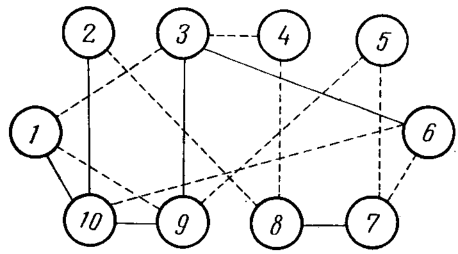

Рис. 2.

$$A_4=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1\\5\\6\\7\\9\\10 \end{matrix} \end{array}\quad i_5=1$$

6. Вычеркнем 1-ю строку и 1-й столбец. Далее последовательно вычеркнем строку и столбец с номерами 9 (i_6), 5 (i_7), 7 (i_8), 6 (i_9) и 10 (i_{10}).

Следовательно, цепь (2, 8, 4, 3, 1, 9, 5, 7, 6, 10) является гамильтоновой для данного графа. На рис. 2 она показана пунктирной ломаной линией.

На практике возникает проблема выбора минимальной (в смысле расстояния, стоимости и т. д.) гамильтоновой цепи. Очевидно, следует найти все гамильтоновы цепи и выбрать из них нужную. Для этого на каждом шаге — до $(n-1)$-го, где встречается несколько строк с одинаковым числом единиц, надо фиксировать все эти строки, вычеркивая только одну. Затем, идя в обратном направлении, рассмотреть все зафиксированные варианты (применяя тот же самый алгоритм).

Задача размещения источников снабжения

Пусть имеется m возможных пунктов (вершин) размещения складов минеральных удобрений и n хозяйств. Для каждого хозяйства известно количество b_j необходимых удобрений. Для i-го склада известны затраты на хранение удобрений, равные

$$\alpha_i+c_ix_i,$$

где α_i — постоянная часть затрат, не зависящая от количества x_i удобрений на складе; c_i — затраты на хранение 1 т удобрений. Известны также затраты c_{ij} на перевоз 1 т удобрений с i-го склада в j-е хозяйство. Пусть задача уже решена. Обозначим Φ множество всех пунктов, в которых размещены склады. Общие минимальные затраты на хранение и доставку нужного количества удобрений в хозяйства при условии размещения складов в пунктах множества Φ равны

$$S=\sum_{i\in\Phi}\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}b_j\min_{i\in\Phi}(c_i+c_{ij}),\quad (1)$$

или

$$S=\sum_{i\in\Phi}\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}\min_{i\in\Phi}S_{ij}, \qquad (1')$$

где $S_{ij}=b_j(c_i+c_{ij})$.

В теории графов для решения поставленной задачи разработан метод ветвей и границ [1, 2], суть которого заключается в следующем (будем при изложении метода сохранять терминологию примера). Пусть F — множество пунктов, в которых склады заведомо будут расположены; N — множество отклоненных пунктов; Q — множество пунктов, относительно которых окончательного решения еще нет.

Очевидно, пара (F, N) определяет некоторое подмножество решений задачи.

Рассмотрим некоторый пункт $i\in Q$ и добавим его либо к F, либо к N. Получаем две новые пары — $(F\bigcup i, N)$ и $(F, N\bigcup i)$. Для оценки стоимости любого варианта (F, N) будем руководствоваться следующими соображениями. Если для пунктов $i\in F$ и $k\in Q$ и некоторого j

$$S_{ij}\leqslant S_{kj}, \qquad (2)$$

то поставки из k-го пункта в j-е хозяйство производить невыгодно.

Если для $i\in Q$ и $k\in Q$

$$S_{ij}+\alpha_i\leqslant S_{kj} \qquad (3)$$

для некоторого j, то указанные выше поставки также невыгодны. Исключим все невыгодные поставки, положив соответствующие затраты $S_{kj}=\infty$. Если при исключении останется хозяйство, поставки которому возможны только из пункта $i\in Q$, то в этом пункте размещаем склад.

В результате повторного исключения получается матрица возможных связей (S_{ij}).

Для оценки затрат $S(F, N)$ в случае пары (F, N) при условии $F\in\Phi$ используется равенство

$$S=(F,\ N)=\sum_{i\in\Phi}\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}\min\left[\min S_{ij};\ \min\left(\frac{\alpha_i}{m_i}+S_{ij}\right)\right], \qquad (4)$$

где m_i — число хозяйств, которые могут снабжаться из пункта $i\in Q$ при наличии там склада. Итак, в оценку $S\ (F, N)$ включаются затраты, связанные со всеми пунктами, где должны быть склады, и минимальные возможные затраты, связанные с пунктами, где могут быть склады.

Эта оценка позволяет выбрать выгоднейшую из пар $(F\bigcup i, N)$, $(F, N\bigcup i)$. Оценка пары (F, N) в случае $Q=\varnothing$ производится по формуле (1′) при $F=\Phi$.

Пример. Для простоты вычислений будем рассматривать 3 склада и 6 хозяйств. Данные о затратах α_i и S_{ij} приведены в табл. 1.

Сначала проверим условие (3), так как ни для одного пункта пока не принято решение. Пусть

$$a_j=\min_i(\alpha_i+S_{ij}),\ j=1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

Таблица 1

i	j = 1	2	3	4	5	6	α_i
1	1	9	9	2	7	6	2
2	4	3	1	8	6	3	4
3	9	4	5	6	4	1	3

имеем

j	1	2	3	4	5	6
a_j	3	7	5	4	7	4

Теперь полагаем равными ∞ все $S_{ij}\geqslant a_j$, то есть S_{21}, S_{31}, S_{12}, S_{13}, S_{33}, S_{24}, S_{34}, S_{15}, S_{16}. Получаем табл. 2.

Таблица 2

i	j = 1	2	3	4	5	6	α_i
1	1	∞	∞	2	∞	∞	2
2	∞	3	1	∞	6	3	4
3	∞	4	∞	∞	4	1	3

Поскольку в 1, 3 и 4-м столбцах только S_{11}, S_{23} и S_{14} меньше ∞, размещаем базы в пунктах 1 и 2 (так как снабжение 1-го и 4-го потребителей возможно только из склада 1, а снабжение 3-го — только из пункта 2). Остается проверить две пары:

$(\{1,\ 2,\ 3\},\ \varnothing)$ и $(\{1,\ 2\},\ \{3\})$.

1. $F=\{1,\ 2,\ 3\}$, $N=\varnothing$.

Тогда

$$S(\{1,\ 2,\ 3\},\ \varnothing)=9+1+3+1+ +2+4+1=21.$$

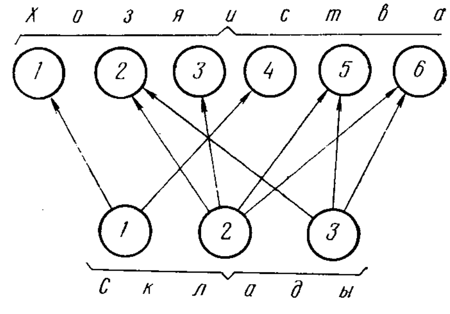

Рис. 3.

2. $F = \{1, 2\}$, $N = \{3\}$.

Имеем

$$S(\{1, 2\}, \{3\}) = 6 + 1 + 3 + 1 + 2 + \\ + 6 + 3 = 22.$$

Итак, оптимальное решение получим, если разместим базы во всех трех пунктах. Причем схема перевозок будет задана графом, представленным на рис. 3.

Под «складом» можно понимать любой пункт отправки, а под «хозяйством» — любой пункт доставки. Следовательно, круг задач, которые можно решить, очень широк.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси, 1974. — 2. Ковалева Л. Ф. Математическая логика и теория графов. Ч. 2. М., «Высшая школа», 1977. — 3. Оре О. Теория графов. М., «Наука», 1968.

Статья поступила 25 апреля 1978 г.

SUMMARY

Two problems are solved in the paper: finding the Hamilton transport chain and locating the sources of provision. Both problems are connected with some aspects of agricultural production. The algorithm of the search of Hamilton chain in the final graph which uses the idea of the matrix of graph adjacency has been constructed; this algorithm is a new one in the theory of graphs.