

УДК 539.1.074.3:621.039.85

## ПРОДОЛЬНОЕ СКАНИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АКТИВНОСТИ

А. О. ФУРМАН

(Кафедра прикладной атомной физики и радиохимии)

При изучении динамики сорбции, переноса и накопления веществ в протяженных объектах (стебли и корни растений, хроматографические колонки) используется метод радиометрического сканирования, позволяющий получать непрерывную информацию о распределении активности меченых веществ [1, 2, 5, 7]. В результате продольного сканирования  $\gamma$ -источников при помощи установки со щелевым коллиматором распределение активности по длине источника (оригинал) преобразуется в кривую регистрируемой интенсивности на выходе сканирующей системы (изображение). Зависимость изображения от вида оригинала и параметров сканирования и восстановление оригинала по полученному изображению составляют соответственно прямую и обратную задачи теории продольного сканирования. Ранее [8] нами была рассмотрена прямая задача и исследованы

оптимальные условия продольного сканирования для плоских моделей источников  $\gamma$ -излучения, форма которых (треугольная, прямоугольная, трапециевидная) имитировала заданный вид оригинала.

В настоящей статье рассматриваются прямая и обратная задачи радиометрического продольного сканирования  $\gamma$ -источников с экспоненциальным распределением активности, часто встречающимся в практике физико-химических исследований. В работе использованы полученные в [8] основные теоретические соотношения.

Сканирующая система. Установка, предназначенная для продольного сканирования  $\gamma$ -источников (рис. 1, а), в принципе состоит из устройства перемещения источника 1, свинцового экрана-коллиматора 4 со щелью 5, сцинтилляционного детектора 6, усилителя, анализатора и нормализатора импульсов 7, интенсивметра 8, само-

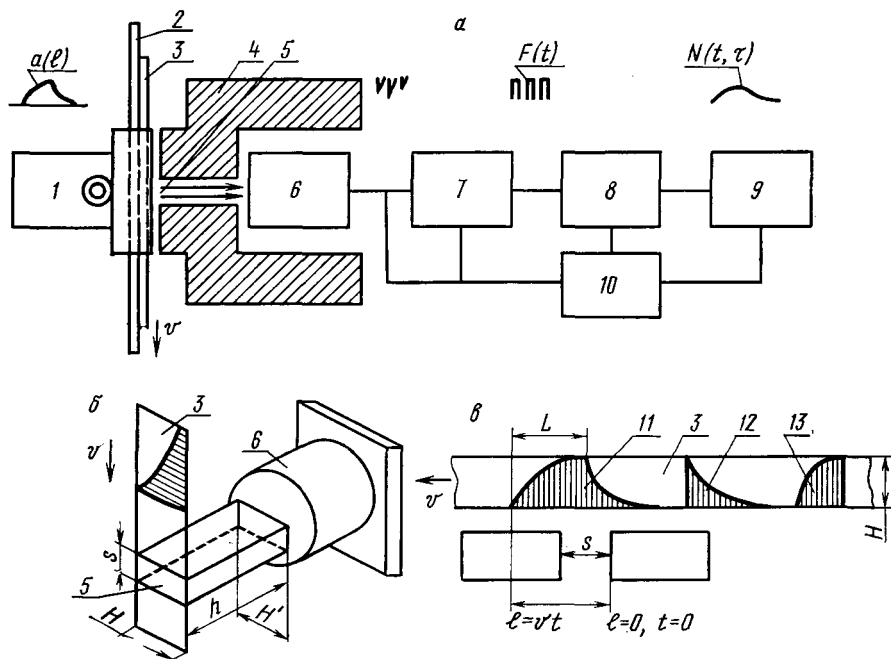


Рис. 1. Блок-схема установки (а); схемы коллиматора (б) и сканирования модели источника (в).

писца 9 и источника питания 10. Подробное описание конструкции сканирующей установки дано в [9].

Для изучения закономерностей сканирования реальные протяженные  $\gamma$ -источники заменялись плоскими  $\gamma$ -активными моделями, имеющими экспоненциальный контур и высоту  $H$ , равную основанию щели коллиматора. На рис. 1, в показаны типичные конфигурации моделей источника: убывающая 12 и возрастающая 13 по экспоненте активность, комбинация возрастающей и убывающей экспонент 11. Активная модель устанавливается на ленту 3, которая перемещается линейкой 2 с постоянной скоростью  $v$  относительно коллиматора на малом расстоянии от него.

В сплошном свинцовом экране коллиматора имеется канал-щель шириной  $s$ , глубиной  $h$  и с основаниями  $H' > H$  (рис. 1, б), через который сцинтилляционный детектор (кристалл NaI [Р] и ФЭУ) «просматривает» автоматически перемещаемую модель. Детектор, усилитель и многоканальный анализатор импульсов образуют гамма-спектрометр, который регистрирует прямое коллимированное  $\gamma$ -излучение источника в определенном энергетическом интервале, исключая боковое и рассеянное  $\gamma$ -излучения.

Информация об интенсивности падающего на детектор  $\gamma$ -излучения представляется в дискретной форме значением скорости счета импульсов на выходе  $\gamma$ -спектрометра 7. Для преобразования данных в аналоговую форму импульсы после нормализатора подаются на интегратор, который их усредняет с постоянной времени  $\tau$ . Выходной сигнал с интегратора регистрируется электронным самопишущим потенциометром, и на ленте самописца возникает изображение исследуемого распределения активности.

Основные соотношения. Введем следующие обозначения:  $l$  — продольная координата движущейся модели источника (рис. 1, а);  $L$  — координата, при которой изменяется вид функции распределения (например, возрастающая экспонента меняется на убывающую);  $s$  — ширина щели коллиматора по оси сканирования;  $v$  — скорость сканирования (скорости перемещения источника и диаграммной ленты самописца одинаковы);  $t = l/v$  — время сканирования, значение  $t=0$  соответствует моменту перехода источником границы щели коллиматора ( $l=0$ );  $\tau$  — постоянная времени интегратора;  $\epsilon_i$  — эффективность счета  $\gamma$ -излучения с энергией  $E_i$  в энергетическом интервале  $\Delta E_i$  спектрометра, учитывающая геометрический фактор коллиматора, фотоэффективность детектора и рассчитанная на 1 акт распада радионуклида;  $a_0$  — максимальная линейная удельная активность источника (активность элемента модели с единичной длиной при высоте  $H$ );  $\varphi(l)$  — нормированное к единице распределение активности по длине источника, задаваемое конфигурацией модели,  $\varphi(l) \leq 1$ .

Исследуемое распределение активности — оригинал — описывается функцией источни-

ка

$$a(l) = a_0 \varphi(l). \quad (1)$$

Скорость счета импульсов на выходе  $\gamma$ -спектрометра

$$F(t) = N_0 f(t), \quad F(t) = N_0 \varphi(t). \quad (2)$$

Здесь  $N_0 = \epsilon_i a_0 s$  — максимальное значение скорости счета, которое достигается в том случае, если участок активной модели полностью перекрывает площадь щели коллиматора;  $f(t) \leq 1$  — относительная скорость счета на выходе  $\gamma$ -спектрометра — функция сканирования, зависящая от вида оригинала и ширины щели коллиматора:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{s} \int_0^t \varphi(l) dl & \text{при } 0 \leq t \leq s \\ \frac{1}{s} \int_{t-s}^t \varphi(l) dl & \text{при } t > s \end{cases} \quad (3)$$

Функцию  $f(t)$  получаем при подстановке в формулу (3)  $l = vt$ .

Средняя скорость счета на выходе интегратора (регистрируемая интенсивность) в момент времени  $t$  определяется выражением

$$N(t, \tau) = N_h e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_h)} + \frac{N_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{t_h}^t f(t) e^{t/\tau} dt, \quad (4)$$

где  $t_h < t < t_{h+1}$ ,  $f(t)$  — функция сканирования для этого интервала времени;  $N_h$  — скорость счета при  $t = t_h$ . Выражение (4) представляет собой общее решение прямой задачи продольного сканирования.

Из формулы (4) следует, что представляемая в виде кривой на ленте самописца регистрируемая интенсивность — изображение — зависит от вида оригинала и параметров сканирующей системы  $\epsilon_i$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $\tau$ :

$$N(t, \tau) = N_0 G(t, \tau) = a_0 \epsilon_i s Q[\varphi(l), l, v, s, \tau], \quad (5)$$

где  $G(t, \tau) \leq 1$  — функция изображения (относительная интенсивность).

Как показано в [4, 8], дисперсию регистрируемой интенсивности можно найти из соотношения

$$D_N(t, \tau) = \frac{N(t, \tau/2)}{2\tau}, \quad (6)$$

где  $N(t, \tau/2)$  получаем из формулы (4), подставляя вместо  $\tau$  значение  $\tau/2$ . Относительная статистическая ошибка регистрируемой интенсивности

$$\delta_N = \frac{\sqrt{D_N}}{N} = \frac{\sqrt{D_N}}{N_0 G(t, \tau)} = \frac{q}{\sqrt{2N_0 \tau}}, \quad (7)$$

где  $q(t, \tau, v, s) \geq 1$  — коэффициент, учитывающий нестационарность поля  $\gamma$ -излучения и условия сканирования источника.

Вычисление функций изображения для экспоненциальных моделей (пряма задача). Распределение активности меченых веществ в исследу-

двумя протяженными объектами нередко имеет экспоненциальный характер или может быть аппроксимировано комбинацией экспонент с различными значениями показательных коэффициентов. В качестве моделей оригинала в данной работе были выбраны следующие функции распределения  $\varphi(l)$ :

модель 1 —  $\varphi_1(l) = e^{-\alpha l}$ ,  $\alpha > 0$  — убывающая экспонента (рис. 1, в, 12); модель 2 —  $\varphi_2(l) = 1 - e^{-\alpha l}$ ,  $\alpha > 0$  — нарастающая экспонента; модель 3 —  $\varphi_3(l) =$

$$= \begin{cases} \frac{1 - e^{-\alpha l}}{1 - e^{-\alpha L}}, & l \leq L \text{ — экспонента, на-} \\ 0 & \text{при } l > L \end{cases}$$

растающая до  $l = L$  (рис. 1, в, 13); модель

$$4 - \varphi_4(l) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\alpha l}}{1 - e^{-\alpha L}}, & l \leq L, \\ e^{-\gamma(l-L)}, & l > L \text{ — комбина-} \end{cases}$$

ция нарастающей и убывающей экспонент (рис. 1, в, 11).

Эти функции нормированы к 1:  $\varphi_1$  — при  $l=0$ ,  $\varphi_2$  — при  $l=\infty$ ,  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  — при  $l=L$ . При  $L \rightarrow \infty$  функции  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  совпадают с  $\varphi_2$ , при  $\gamma \rightarrow \infty$   $\varphi_4$  совпадает с  $\varphi_3$ . При помощи функций  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  и соответствующем выборе показательных коэффициентов  $\alpha$  и  $\gamma$  можно аппроксимировать также другие типы распределения активности в источнике.

Для всех выбранных моделей оригинала было получено аналитическое решение прямой задачи продольного сканирования по схеме преобразования:  $a(l) \rightarrow F(t) \rightarrow N(t, \tau)$ . Функции сканирования  $f(t)$  вычисляли по формуле (3), а функции изображения  $G(t, \tau)$  — по формулам (4) и (5); при этом под интеграл в формуле (4) подставляли функцию  $f(t)$ , полученную для соответствующего промежутка времени ( $t_k, t_{k+1}$ ).

При вычислении результатов использовались обозначения:  $\alpha, \gamma$  — экспоненциальные коэффициенты ( $\text{см}^{-1}$ ),  $\lambda = v\tau$  — инерционная длина, см;  $x = t/\tau = l/\lambda$  — безразмерная переменная сканирования (относительное время);  $\mu = \alpha v t = \alpha l$  и  $\nu = \gamma v t = \gamma l$  — безразмерные параметры. В табл. 1 приведены координаты  $l$  движущейся модели источника (рис. 1, в), соответствующие им моменты времени  $t_k$  и обозначения переменной  $x$ .

Указанная в табл. 1 последовательность координат и моментов времени справедлива

Таблица 1

Обозначения координат модели и времени сканирования

$l, \text{см}$	0	$s$	$L$	$L + s$	$l > L + s$
$t_k, \text{с}$	$t_0 = 0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t > t_3$
$x = t/\tau$	0	$b$	$c$	$d$	$x > d$

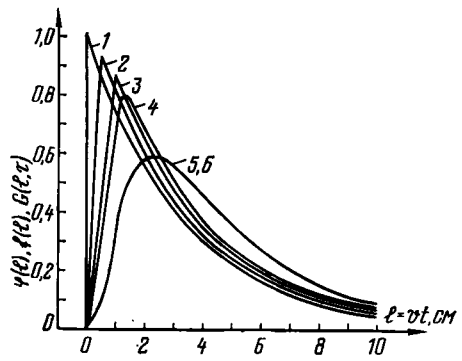


Рис. 2. Кривые сканирования модели типа 1.

1 —  $\varphi_1(l)$ ,  $\alpha = 0,3 \text{ см}^{-1}$ ; 2 и 3 —  $f(l)$  для  $s = 0,5 \text{ см}$  и  $s = 1 \text{ см}$ ; 4 —  $G(l, \tau)$  для  $s = 1 \text{ см}$ ,  $\tau = 10 \text{ с}$ ,  $v = 0,02 \text{ см/с}$ ; 5 — то же для  $v = 0,1 \text{ см/с}$ ; 6 — то же для  $\tau = 50 \text{ с}$ ;  $v = 0,02 \text{ см/с}$ .

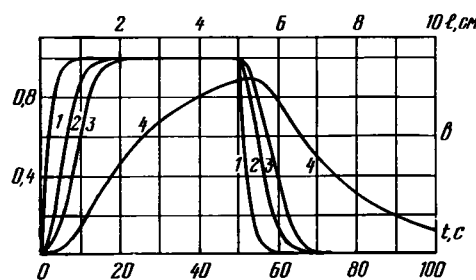
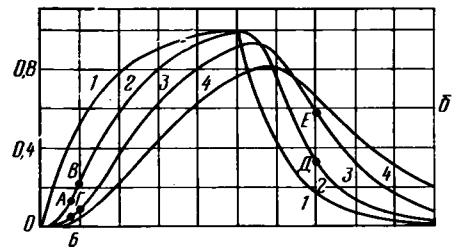
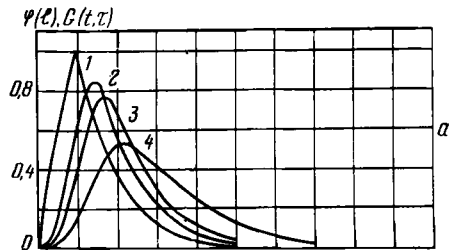


Рис. 3. Кривые сканирования модели типа 4,  $v = 0,1 \text{ см/с}$ .

а) 1 —  $\varphi_4(l)$  при  $L = 1 \text{ см}$ ,  $\alpha = 1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 1 \text{ см}^{-1}$ ; 2 —  $G(t, \tau)$  для  $\tau = 2 \text{ с}$ ,  $s = 0,5 \text{ см}$ , 3 — то же для  $s = 1 \text{ см}$ ; 4 — то же для  $\tau = 10 \text{ с}$ .  
 б) 1 —  $\varphi_4(l)$  при  $L = 5 \text{ см}$ ,  $\alpha = 0,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 0,9 \text{ см}^{-1}$ ; 2 — 4 —  $G(t, \tau)$  для  $s = 1 \text{ см}$ ,  $\tau = 2 \text{ с}$ ,  $\tau = 10 \text{ с}$  и  $\tau = 20 \text{ с}$ .  
 в) 1 —  $\varphi_4(l)$  при  $L = 5 \text{ см}$ ,  $\alpha = 5 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 5 \text{ см}^{-1}$ ; 2 —  $G(t, \tau)$  для  $s = 0,5 \text{ см}$ ,  $\tau = 2 \text{ с}$ , 3 и 4 — то же для  $s = 1 \text{ см}$ ,  $\tau = 2 \text{ с}$  и  $\tau = 20 \text{ с}$ .

Функция изображения  $G(t, \tau)$  для экспоненциальных моделей

Модель $\Phi(t)$	Интервал времени $t_{k+1}$	$G(t, \tau)$		Интервал времени	$G(t, \tau)$		Интервал времени	$G(t, \tau)$		Интервал времени	$G(t, \tau)$	
		$\mu \neq 1$	$\mu = 1$		$\mu \neq 1$	$\mu = 1$		$\mu \neq 1$	$\mu = 1$		$\mu \neq 1$	$\mu = 1$
$\Phi_1(t)$	$t_{0,1}$	$B_1$	$C_1$	$t > t_1$	$B_2$	$C_2$	—	—	—	—	—	—
$\Phi_2(t)$	$t_{0,1}$	$B_3$	$C_3$	$t > t_1$	$B_4$	$C_4$	—	—	—	—	—	—
$\Phi_3(t)$	$t_{0,1}$	$B_5$	$C_5$	$t_{1,2}$	$B_6$	$C_6$	$t_{2,3}$	$B_7$	$C_7$	$t > t_3$	$B_8$	$C_8$
$\Phi_4(t)$	$t_{0,1}$	$B_5$	$C_5$	$t_{1,2}$	$B_6$	$C_6$	$t_{2,3}$	$B_9^*$ $D_9$	$E_9^*$ $C_9$	$t > t_3$	$B_{10}^*$ $D_{10}$	$E_{10}^*$ $C_{10}$

\* при  $\nu = 1$ .

Формулы к таблице:  $B_1 = \frac{1}{b\mu(1-\mu)} [1 - \mu + \mu e^{-x} - e^{-\mu x}]$ ;  $C_1 = \frac{1}{b} [1 - (x+1)e^{-x}]$ ;  $B_2 = \frac{1}{b\mu(1-\mu)} [\mu e^{-x} - e^{-\mu x} - \mu e^{b-x} + e^{\mu(b-x)}]$ ;  $C_2 = \frac{1}{b} [(x+1-b)e^{b-x} - (x+1)e^{-x}]$ ;  $B_3 = \frac{1}{b\mu(1-\mu)} [\mu(1-\mu)x - \mu^2 e^{-x} + e^{-\mu x} + \mu^2 - 1]$ ;  $C_3 = \frac{1}{b} [x - 2 + (x+2)e^{-x}]$ ;  $B_4 = 1 - \frac{1}{b\mu(1-\mu)} [\mu^2 e^{-x} - \mu^2 e^{b-x} - e^{-\mu x} + e^{\mu(b-x)}]$ ;  $C_4 = 1 + \frac{1}{b} [(x+2)e^{-x} - (x+2-b)e^{b-x}]$ ;  $B_5 = \frac{B_3}{1 - e^{-\mu c}}$ ;  $C_5 = \frac{C_3}{1 - e^{-c}}$ ;  $B_6 = \frac{B_4}{1 - e^{-\mu c}}$ ;  $C_6 = \frac{C_4}{1 - e^{-c}}$ ;  $B_7 = \frac{1}{1 - e^{-\mu c}} \left[ 1 + \frac{c-x}{b} - \frac{1}{b\mu(1-\mu)} [\mu^2 e^{-x} - \mu^2 e^{b-x} + e^{\mu(b-x)} - \mu(1-\mu - e^{-\mu c})(1 - e^{c-x}) - e^{-\mu c}] \right]$ ;  $C_7 = \frac{1}{1 - e^{-c}} \left[ 1 + \frac{1}{b} [c-x+1 + (c+1)e^{-x} - (x+2-b)e^{b-x} - e^{c-x} + e^{-c}] \right]$ ;  $B_8 = \frac{1}{b(1-\mu)(1 - e^{-\mu c})} [\mu(e^{b-x} - e^{-x}) + (1-\mu - e^{-\mu c}) \times (e^{d-x} - e^{c-x})]$ ;  $C_8 = \frac{1}{b(1 - e^{-c})} [e^{d-x} - e^{c-x} - (c+1)(e^{b-x} - e^{-x})]$ ;  $B_9 = B_7 + \frac{1}{b\nu(1-\nu)} [1 - \nu + \nu e^{c-x} - e^{\nu(c-x)}] = B_7 + R_1$ ;  $E_9 = C_7 + R_1$ ;  $D_9 = B_7 + \frac{1}{b} [1 - (x-c+1)e^{c-x}]$ ;  $C_9 = C_7 + \frac{1}{b} [1 - (x-c+1)e^{c-x}]$ ;  $B_{10} = B_8 + \frac{1}{b\nu(1-\nu)} [\nu e^{c-x} - \nu e^{d-x} - e^{\nu(c-x)} + e^{\nu(d-x)}] = B_8 + R_2$ ;  $E_{10} = C_8 + R_2$ ;  $D_{10} = B_8 + \frac{1}{b} [(x-d+1)e^{d-x} - (x-c+1)e^{c-x}]$ ;  $C_{10} = C_8 + \frac{1}{b} [(x-d+1)e^{d-x} - (x-c+1)e^{c-x}]$ .

для рассматриваемых функций  $\Phi_i(t)$  при  $s \leq L$ .

Результаты вычислений функций изображения  $G(t, \tau) = N(t, \tau)/N_0$  для различных экспоненциальных моделей  $\Phi(t)$  во всех интервалах времени ( $t_k, t_{k+1}$ ) представлены в табл. 2 алгебраическими выражениями

$B_1 - B_{10}, C_1 - C_{10}, D_9, D_{10}, E_9, E_{10}$ , которые даны отдельно в явном виде. Разными символами ( $B, C, D, E$ ) обозначены результаты, соответствующие указанным в табл. 2 значениям безразмерных параметров  $\mu$  и  $\nu$ . Так, например, для модели  $\Phi_4(t)$  при  $\mu \neq 1$  и  $\nu \neq 1$  функция  $G(t, \tau)$  в последовательных

интервалах времени принимает значения  $B_5, B_6, B_9, B_{10}$ .

На рис. 2 даны расчетные кривые сканирования для модели 1, а на рис. 3, а, б, в — для модели 4 при различных значениях  $L, \alpha, \gamma$  и параметров сканирования. Из кривых  $G(t, \tau)$  следует, что отклонение изображения от оригинала (искажение) тем больше, чем больше значения параметров сканирования  $s, v$  и  $t$ . При этом возрастает размытие фронтов распределения, снижается амплитуда и смещается вправо максимум кривой изображения. О влиянии ширины щели  $s$  на изображение можно судить по кривым 2 и 3 (рис. 2 и 3, а, в). При  $s = \text{const}$  искажение определяется значением  $\lambda = vt$ , характеризующим «запаздывание» сканирующей системы. Так, при  $\lambda$ , равном 0,2 и 1 см (рис. 2, 4 и 5), искажения соответственно возрастают, но при различных  $v, \tau$  и одинаковом  $\lambda$  (1 см) искажения одни и те же (кривые 5 и 6 совпадают).

Зависимость изображения от  $s$  и  $\lambda$  связана с конкретным видом модели, а именно с параметрами распределения  $L, \alpha, \gamma$ . При  $s = 1$  см,  $\lambda = 1$  см и  $L = s$  (рис. 3, а, 4) искажения более существенны, чем при  $L \gg s$  (рис. 3, б, 3). При постоянных  $s, \lambda, L$  увеличение коэффициентов  $\alpha$  и  $\gamma$  для модели 4 приводит к более выраженному искажению фронтов, но менее выраженному изменению максимума сканируемого распределения (рис. 3, б и в, 1 и 4). Отклонение кривых изображения от оригинала можно характеризовать относительным смещением и уменьшением амплитуды максимума,  $k$  и  $m$ :

$$k = \frac{l_m - L}{L}, \quad m = \frac{N_0 - N_m}{N_0}, \quad (8)$$

где  $L$  и  $l_m$  — координаты максимумов оригинала и изображения;  $N_m$  — амплитуда максимума изображения.

На рис. 4 даны кривые зависимости  $k$  от  $\lambda, \alpha$  и  $\gamma$ , полученные путем расчета функций  $G(t, \tau)$  для модели 4 при  $L = 5$  см и  $s = 1$  см. При  $\lambda = 0$  ( $\tau = 0$ ) коэффициент  $k$  не равен нулю, что обусловлено функцией щелевого коллиматора. С увеличением  $\lambda$  смещение максимума увеличивается, особенно при малых  $\alpha$  и  $\gamma$ ; с повышением  $\alpha$  или  $\gamma$  (приближение оригинала к прямоугольному распределению) значение  $k$  уменьшается. Наименьшие смещения максимума для данной модели ( $k < 10\%$ ) имеют место при  $\alpha, \gamma > 0,7 \text{ см}^{-1}$  и  $\lambda < 0,5$  см. Аналогичная зависимость от  $\lambda, \alpha, \gamma$  наблюдается и для коэффициента  $m$ .

Результаты исследования функций изображения для рассматриваемых экспоненциальных моделей позволяют принять общее условие наименьшего искажения оригинала (при  $s \leq 1$  см):

$$2\lambda < s < L, \quad (9)$$

которое аналогично условию, полученному в работе [8] для неэкспоненциальных моделей. Для малых  $\alpha$  и  $\gamma$  ( $< 0,5 \text{ см}^{-1}$ ) множитель при  $\lambda$  в неравенстве (9) нужно удвоить и, следовательно, еще более ограничить значения  $v$  и  $t$ .

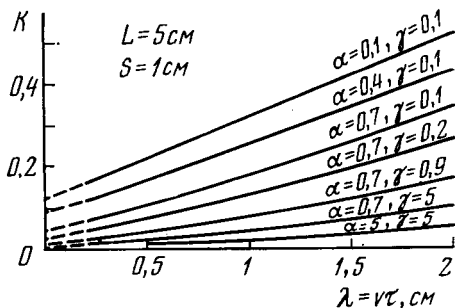


Рис. 4. Относительное смещение максимума сканируемого распределения (модель 4).

Дисперсию регистрируемой интенсивности  $D_N(t, \tau)$  и относительную ошибку  $\delta_N$  вычисляли по формулам (6) и (7), пользуясь функциями  $G(t, \tau)$  для различных моделей и интервалов времени сканирования. Для максимума кривой изображения ( $t_m, N_m$ ) из формулы (7) следует

$$\delta_{N_m} | \bar{N}_0 = \delta_{N_m} \sqrt{a_0 \varepsilon_i s} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \times q(t_m, \tau, v, s). \quad (10)$$

При  $\tau \rightarrow 0$   $\delta_{N_m} \rightarrow \infty$ , при  $v = 0$

$$q = 1 \text{ и } \delta_{N_m} = \frac{1}{\sqrt{2N_0\tau}}.$$

В табл. 3 даны расчетные  $\delta_{N_m} \sqrt{N_0}$  при разных  $t$  и  $v$  для модели 4 ( $L = 5$  см,  $\alpha = 0,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 0,9 \text{ см}^{-1}$  и  $s = 1$  см).

При постоянной  $N_0$  статистическая погрешность  $\delta_{N_m}$  уменьшается с увеличением  $\tau$  и возрастает с увеличением  $v$ . Из (10) следует, что по мере увеличения  $s$  (при постоянных  $a_0$  и  $\varepsilon_i$ ) ошибка  $\delta_{N_m}$  уменьшается.

Оптимальные условия сканирования должны обеспечивать сравнительно небольшое искажение оригинала и малую статистическую погрешность для данной точки изображения. Как показано, при  $\tau \rightarrow 0$  искажения оригинала минимальны, но относительная ошибка возрастает до бесконечности и, следовательно, колебания пера самописца становятся настолько большими, что запись изображения не может быть достоверной. Вместе с тем при очень больших  $\tau$  статистическая ошибка мала, а искажения оригинала слишком велики. Поэтому для удовлетворения требований к точности и воспроизводимости результатов сканирования следует выбирать некоторое компромиссное значение постоянной времени  $\tau$ .

При снижении  $v$  уменьшаются как искажения оригинала, так и флуктуации регистрируемой интенсивности. В связи с этим скорость сканирования должна быть небольшой, что лимитируется общим временем сканирования, в течение которого распределение активности в источнике остается постоянным. Ширина щели  $s$  должна

Статистическая ошибка  $\delta_{N_M} \sqrt{N_0}$  для модели 4

$v, \text{ см/с}$	$\tau, \text{ с}$							
	0	1	2	3	10	15	20	30
0	$\infty$	0,707	0,500	0,316	0,224	0,183	0,158	0,129
0,02	$\gg$	0,708	0,502	0,318	0,228	0,190	0,167	0,139
0,10	$\gg$	0,710	0,506	0,324	0,236	0,206	0,187	0,164
0,20	$\gg$	0,715	0,518	0,334	0,263	0,247	0,236	0,228

быть достаточно малой и удовлетворять условию (9), но вместе с тем и достаточно большой, чтобы статистические флуктуации не превышали допустимых пределов. Из (10) также следует, что при данных параметрах  $s, v, \tau$  ошибку  $\delta_N$  можно уменьшить, увеличивая эффективность счета  $\varepsilon_i$  и (или) удельную активность  $a_0$ . Однако при этом, как правило, возрастает вклад бокового и рассеянного излучений, что искажает фронты выходной кривой.

Кроме статистических ошибок скорости счета  $\delta_N$  и фона  $\delta_\Phi$ , на погрешность регистрируемой интенсивности влияют нестабильности параметров детектора, усилителя, анализатора, нормализатора импульсов, интенсиметра и самопишущего потенциометра. Не рассматривая эти факторы, укажем, что вызываемые ими погрешности  $\delta_i$  не должны превышать статистических ошибок счета. Полная погрешность измерения интенсивности

$$\delta_{\Sigma} = \sqrt{\delta_N^2 + \delta_\Phi^2 + \sum_i \delta_i^2}. \quad (11)$$

Фактическую погрешность измерения можно сделать меньше  $\delta_{\Sigma}$ , если уточнить кривую изображения — провести среднюю линию «флуктуационной дорожки» на диаграммной ленте самописца.

Анализ закономерностей продольного сканирования экспоненциальных моделей позволяет выбрать оптимальные значения параметров сканирования. Например, для модели 4, описываемой функцией распределения  $\varphi_4(t)$  с заданными значениями  $L = 5 \text{ см}$ ,  $\alpha = 0,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma = 0,9 \text{ см}^{-1}$ ,  $a_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Бк/см}$  при параметрах сканирующей системы  $\varepsilon_i = 0,05$ ,  $s = 1 \text{ см}$ ,  $v = 0,02 \text{ см/с}$ ,  $\tau = 10 \text{ с}$ , относительное смещение максимума кривой изображения не превышает 2%, а статистическая ошибка  $\delta_{N_M} < 2,5\%$ .

Восстановление оригинала для экспоненциальных моделей (обратная задача). Практический интерес в лабораторных радиометрических исследованиях представляет восстановление детального распределения активности по измеренным значениям интенсивности  $\gamma$ -излучения. Восстановление оригинала по схеме преобразования  $N(t, \tau) \rightarrow F(t) \rightarrow a(l)$  в ряде случаев не является корректным в связи с неустойчивостью решения интегральных уравнений, получаемых при «обращении» соотношений (4) и (3).

Обратную задачу можно также решить при помощи приближенных численных методов на основе результатов моделирования и обработки экспериментальных данных с использованием ЭВМ [3, 6].

В настоящей работе получено частное аналитическое решение обратной задачи продольного сканирования в предположении, что искомое распределение активности одного радионуклида является экспоненциальным и может быть описано одной из функций вида  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Для наиболее общего случая — распределения  $\varphi_4(t)$  — оригинал однозначно определяется параметрами  $\alpha, \gamma, L$ , которые можно вычислить, используя экспериментальные кривые сканирования, полученные для двух значений  $\tau$  и фиксированных  $\varepsilon_i, s, v$ .

После коррекции кривых изображения («сглаживание» флуктуаций, вычитание фона) находим значения регистрируемой интенсивности  $N(t, \tau)$ . Нормированная максимальная скорость счета  $N_0$  определяется по установившемуся уровню интенсивности на ленте самописца при сканировании (в идентичных условиях) прямоугольной модели — однородной протяженной полоски, имеющей такую же высоту  $H$  и удельную активность  $a_0$ , что и исследуемая модель. Таким образом, получаем экспериментальные значения относительной интенсивности  $G(t, \tau) = N(t, \tau)/N_0$ .

Чтобы определить показательный коэффициент  $\alpha$  модели 4, нужно выбрать в начальном интервале  $0 < t \leq t_1$  кривых изображения  $G(t, \tau_1)$  и  $G(t, \tau_2)$  по две точки с координатами  $t'$  и  $t''$ . Четырем точкам соответствуют безразмерные переменные

$$x'_1 = t'/\tau_1, \quad x'_2 = t'/\tau_2, \quad x''_1 = t''/\tau_1, \quad x''_2 = t''/\tau_2$$

и относительные интенсивности  $G'_1, G'_2, G''_1, G''_2$ .

Из табл. 2 видно, что для функции  $\varphi_4(t)$  в данном интервале времени величина  $G(t, \tau)$  равна  $B_5$ . Подставляя в выражение  $B_5$  (см. формулы к табл. 2) значения  $v, \tau_i, x_i, G_i$  для выбранных точек и учитывая  $\mu = \alpha v \tau$ , получаем 4 уравнения, совместное решение которых относительно  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = \frac{G'_2 - G'_1 - A(G''_2 - G''_1)}{v[G'_2 \tau_2 - G'_1 \tau_1 - A(G''_2 \tau_2 - G''_1 \tau_1)]}, \quad (12)$$

см<sup>-1</sup>,

где  $A =$

$$= \frac{\tau_1^2 \left( 1 - x_1' - e^{-x_1'} \right) - \tau_2^2 \left( 1 - x_2' - e^{-x_2'} \right)}{\tau_1^2 \left( 1 - x_1'' - e^{-x_1''} \right) - \tau_2^2 \left( 1 - x_2'' - e^{-x_2''} \right)}. \quad (13)$$

Параметр  $L$ , характеризующий протяженность возрастающей части исследуемого распределения, определяется из равенства  $G(t, \tau) = B_s$  для  $\tau = \text{const}$  и момента времени  $t$  в интервале  $0 < t \leq t_1$ . Подставляя в это уравнение значения  $x$ ,  $G(x)$ , полученное значение  $\alpha$  и параметры  $\mu$ ,  $b = s/\lambda$ ,  $c = z/2$ , находим выражение

$$L = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{bG(x)} \left[ x - \frac{1}{\mu(1-\mu)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\mu^2 e^{-x} - e^{-\mu x} - \mu^2 + 1) \right] \right\}, \quad \text{см. (14)}$$

Показательный коэффициент  $\gamma$  модели 4 можно определить по кривым  $G(t, \tau_1)$  и  $G(t, \tau_2)$  для момента времени  $t$  в последнем интервале сканирования ( $t \geq t_3$ ). В этом интервале при  $\mu \neq 1$  и  $\nu \neq 1$  имеет место равенство  $G(t, \tau) = B_{10} = B_8 + R_2$  (см. формулы к табл. 2). Решая совместно два таких уравнения (для  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ) и учитывая  $\nu = \gamma \tau$ , получаем соотношение

$$\gamma = \frac{\frac{1}{\nu} [(G_1 - B_{8,1}) - (G_2 - B_{8,2})] + \frac{1}{s} [e^{d_1 - x_1} - e^{c_1 - x_1}] \tau_1 - (e^{d_2 - x_2} - e^{c_2 - x_2}) \tau_2}{(G_1 - B_{8,1}) \tau_1 - (G_2 - B_{8,2}) \tau_2}, \quad (15)$$

см<sup>-1</sup>,

где

$$B_{8,i} = \frac{\mu_i (e^{b_i - x_i} - e^{-x_i}) + (1 - \mu_i - e^{-\alpha L}) (e^{d_i - x_i} - e^{c_i - x_i})}{(1 - e^{-\alpha L}) (1 - \mu_i) b_i}. \quad (16)$$

Здесь  $x_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $\mu_i$ ,  $G_i$ ,  $B_{8,i}$  — значения, соответствующие  $\tau_1$  и  $\tau_2$  ( $i=1, 2$ ), а  $\alpha$  и  $L$  — полученные параметры оригинала.

Если подставить в формулы обратной задачи (12), (14), (15) теоретические расчетные значения относительной интенсивности  $G(t, \tau)$  для точек А, Б, В, Г, Д, Е (рис. 3, б, 2 и 3), соответствующие им моменты времени  $t$  и значения  $s$ ,  $\nu$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , то, разумеется, получим исходные параметры  $\alpha = 0,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $L = 5 \text{ см}$  и  $\gamma = 0,9 \text{ см}^{-1}$ , определяющие данный оригинал, — кривую  $I$  на рис. 3, б.

В ряде случаев исследователь располагает априорной информацией о характере изучаемого распределения, и радиометрическое сканирование позволяет его уточнить. Например, если заранее известно, что линейная активность источника убывает по экспоненте  $\Phi_1(t) = e^{-\alpha' t}$  (модель 1), то для восстановления оригинала достаточно определить коэффициент  $\alpha'$  по экспериментальным кривым изображения. В этом случае имеет место соотношение

$$\alpha' = \frac{1}{G_2 \tau_2 - G_1 \tau_1} \left[ \frac{G_2 - G_1}{\nu} + \frac{(1 - e^{-x_2}) \tau_2 - (1 - e^{-x_1}) \tau_1}{s} \right], \quad (17)$$

см<sup>-1</sup>,

где  $G_1$  и  $G_2$  — относительные интенсивности для момента времени  $t \leq t_1$  и параметров  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ;  $x_1$  и  $x_2$  — соответствующие переменные;  $s$  и  $\nu$  — фиксированные параметры сканирования.

Решение обратной задачи для распределений  $\Phi_2(t)$  и  $\Phi_3(t)$  здесь не приводится, поскольку эти модели представляют собой частные случаи распределения  $\Phi_4(t)$ .

В реальном эксперименте на данной сканирующей установке ошибки определения параметров экспоненциальных моделей  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $L$  по формулам обратной задачи за-

висят от выбора оптимальных параметров сканирования  $s$ ,  $\nu$ ,  $\tau$  и их погрешностей, полной ошибки измерения интенсивности (11) и достоверности полученного на ленте самописца уровня  $N_0$  и, как правило, не превышают 10 %.

Результаты теоретического исследования прямой и обратной задач радиометрического продольного сканирования  $\gamma$ -источников могут быть использованы для повышения эффективности и точности метода и усовершенствования сканирующих установок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гарнецкий В. А., Кобазев Е. И., Рачинский В. В., Фурман А. О. Вариант автоматической установки для записи выходных и колоночных кривых распределения меченых веществ при хроматографическом анализе. — Изв. ТСХА, 1963, вып. 4, с. 224—229. — 2. Горн Л. С., Костылев В. А., Наркевич Б. А., Сивашинский Д. С., Хазанов Б. Н. Приборы для радиоизотопной диагностики

в медицине. М.: Атомиздат, 1978. — 3. Грознов В. Н., Котов В. М., Парамонов В. В., Сорокин Б. В., Черепнин Ю. С. Измерения распределений активности источников неразрушающим методом. М.: Атомная энергия, 1979, т. 47, вып. 2, с. 118—119. — 4. Коган Р. М., Назаров И. М., Фридман Ш. Д. Основы гамма-спектрометрии природных сред. М.: Атомиздат, 1976. — 5. Медицинское ра-

диоизотопное сканирование. — Протоколы семинара МАГАТЭ и МОЗ. Перев. с англ. М.: Госмедиздат, 1962. — 6. Тимонов А. А., Танана В. П. Об одном численном методе определения концентрации радиоактивных элементов по измеренным значениям интенсивности гамма-излучения. М.: Атомная энергия, 1977, т. 43, вып. 1, с. 49—50. — 7. Фурман А. О., Кобазев Е. И., Будников В. К. Многоканальная автоматическая радиометрическая установка для испытания ионитов в дина-

мических условиях. — Докл. ТСХА, 1965, вып. 109, с. 259—265. — 8. Фурман А. О. Радиометрическое продольное сканирование источников гамма-излучения. — Изв. ТСХА, 1980, вып. 3, с. 155—162. — 9. Шкарин Б. И., Фурман А. О. Автоматическая установка для регистрации гамма-излучения смеси радионуклидов в динамическом режиме на базе сцинтилляционного спектрометра. — Изв. ТСХА, 1977, вып. 5, с. 188—195.

*Статья поступила 1 июня 1981 г.*

## SUMMARY

Results of investigation in the sphere of theory of radiometric longitudinal scanning of extended  $\gamma$ -sources are discussed. Distribution of the activity by the length of the latter is determined by configuration of a flat radioactive model moving with constant speed relative to collimating slit which releases the flow of  $\gamma$ -photons recorded by scintillation spectrometer, intensimeter, and self-recorder. For different exponential models a direct scanning problem is discussed—the formulae connecting the investigated distribution (original) with the recorded intensity (image) are derived. Dependence of original distortion and statistical errors of the image on model parameters, the width of collimating slit, the scanning speed and the time constant of intensimeter is studied. Optimum scanning conditions are discussed. The reverse problem—restoration of the original by experimental curves of the image is considered. Analytical expressions for coefficients determining the exponential function of the source are obtained.