«Известия ТСХА», выпуск 4, 1980 год

УДК 536.2:517.9

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ И ЗАДАЧА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Г. Б. ЗАБОЛОТСКИХ

(Кафедра высшей математики)

Решение задач движения газа в пористой среде и задач теории пограничного слоя в переменных Мизеса сводится к решению квазилинейных уравнений типа уравнения теплопроводности. Так, для одномерного движения газа в пористой среде имеем уравнение [3]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \varphi(P)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где

$$\varphi(P) = P^{\frac{n}{n+1}}D,\ D = \frac{nk}{m\mu} = \text{const},$$

$$P = p^{\frac{n+1}{n}}.$$

Заметим, что частный случай $n=1$ соответствует как изотермическому течению газа, так и неустановившемуся движению грунтовых вод.

В настоящей статье для решения (1) применяются новые переменные, аналогичные тем, которые использовались в задачах нелинейной теплопроводности [4, 5].

Если продифференцировать уравнение (1) по x и ввести новую функцию $q = \frac{\partial P}{\partial x}$, то приведем рассматриваемое уравнение к виду

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dP}q\frac{\partial q}{\partial x} + \varphi(p)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Перейдем затем к новым независимым переменным P и t:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = q\frac{\partial q}{\partial P},$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = q\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^2 + q^2\frac{\partial^2 q}{\partial P^2},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} => \varphi(P)\,d\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^2 + \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Подставляя найденные значения производных в (2), получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q^2\frac{\partial}{\partial P}\left[\varphi(P)\frac{\partial q}{\partial P}\right]. \qquad (3)$$

Введем далее переменную

$$z = (n+1)\,P^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (4)$$

тогда (3) примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \psi(z)\,q^2\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \qquad (5)$$

где $\psi(z) = D(n+1)^n z^{-n}$.

Полученное уравнение в частных производных совпадает с преобразованным уравнением теплопроводности [4]. Поэтому для решения (5) можно применить метод, аналогичный используемому в [4].

В частном же случае, когда решение (1) ищем как функцию от одной независимой переменной $\eta = x/\sqrt{t}$, уравнение (5) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим нахождение решения (1) при граничных условиях

$$P(0, t) = P_0,\ P(\infty, t) = \overline{P},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=\infty} = 0 \qquad (6)$$

и начальном условии $P(x, 0) = P$. (7)

Будем искать решение задачи в виде $P = P(\eta)$. Тогда (1) запишется

$$-\frac{\eta}{2}\frac{dP}{d\eta} = \varphi(P)\frac{d^2P}{d\eta^2}. \qquad (8)$$

Полученное уравнение продифференцируем по η

$$-\frac{1}{2} = \frac{d}{dP}\left[\frac{\varphi(P)\frac{d^2P}{d\eta^2}}{\frac{dP}{d\eta}}\right]\frac{dP}{d\eta}.$$

Вводя далее новые функцию $\alpha = \frac{dP}{d\eta}$ и аргумент P, имеем

$$-\frac{1}{2} = \alpha\frac{d}{dP}\left[\varphi(P)\frac{d\alpha}{dP}\right]. \qquad (9)$$

Учитывая граничные условия, вводим новую переменную

$$z_1 = \frac{1-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{m_1}, \qquad (10)$$

где

$$m_1 = 1-\left(\frac{\overline{P}}{P_0}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Тогда (9) перепишется в виде

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dz_1^2}=-\frac{P_0^{\frac{n}{n+1}}\left(1-m_1z_1\right)^n}{2Da^2},$$

где $$a=-\frac{1}{m_1\,(n+1)\,P_0^{\frac{1}{n+1}}}. \qquad (11)$$

Если обозначить

$$\alpha_1=-\alpha\frac{\sqrt{D}\,a}{P_0^{\frac{n}{2(n+1)}}}, \qquad (12)$$

то будем иметь

$$\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dz_1^2}=-\frac{1}{2}\,(1-m_1z_1)^n. \qquad (13)$$

Рассматривая значения m_1, для которых выполняется неравенство

$$|m_1|<1, \qquad (18)$$

что соответствует условию $\overline{P}/P_0<2^{n+1}$.

Для правой части уравнения (13) запишем разложение в ряд

$$(1-m_1z_1)^n=1-nm_1z_1+$$
$$+\frac{n\,(n-1)}{2}m_1^2z_1^2-$$
$$-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot2\cdot3\ldots}\cdot m_1^3z_1^3+\ldots+$$
$$+(-1)^N\cdot\frac{n\,(n-1)\ldots(n-N+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot N}\times$$
$$\times m_1^Nz_1^N+\ldots \qquad (19)$$

В силу (17) для произвольного n имеем

$$\boxed{\gamma^2=\frac{15}{16}\left[\frac{1}{3}-\sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{N+1}\Big/\frac{n\,(n-1)\ldots(n-N+1)}{(N+1)!\,(N+3)}m_1^N\right].} \qquad (20)$$

Перейдем в условиях (6—7) к новым переменным. При $x=0$ имеем $\eta=0$, $P=P_0$, $z_1=0$. Из (8) следует, что $\frac{d^2P}{d\eta^2}=0$ или

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dP}{d\eta}\right)=\frac{d\alpha}{d\eta}=\frac{d\alpha}{dz_1}\,\frac{dz_1}{dP}\,\frac{dP}{d\eta}=$$
$$=\frac{d\alpha}{dz_1}\,aP_0^{-\frac{n}{n+1}}\alpha=0,$$

а это возможно лишь при $\frac{d\alpha}{dz_1}=0$, т. е.

$$\frac{d\alpha_1}{dz_1}=0. \qquad (14)$$

Если $x\longrightarrow\infty$, то $\eta\longrightarrow\infty$ и $z_1=1$.

В силу (6) $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{dP}{d\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$, откуда получаем

$$\alpha_1(1)=0. \qquad (15)$$

Для решения (13) используем метод Галеркина. Выбираем линейно независимые функции $f_i(z_1)=(z_1^{i+1}-1)$, $i=1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющие условиям (14—15). Будем искать приближенное решение в виде

$$\alpha_1=\gamma(z_1^2-1), \qquad (16)$$

где коэффициент γ определяется из условия

$$4\gamma^2\int_0^1\left(z_1^2-1\right)dz_1=-$$
$$-\int_0^1\left(1-m_1z_1\right)^n\left(z_1^2-1\right)dz_1. \qquad (17)$$

Дальнейшие вычисления проведем для частного случая $n=1$, предварительно рассмотрев, какой знак должен иметь коэффициент γ.

При изменении x от 0 до ∞ переменная η меняется в тех же самых пределах, а функция P — от P_0 до $\overline{P}$, поэтому

$$\alpha=\frac{dP}{d\eta}>0.$$

Учитывая (11), (12), (18), имеем $\alpha_1(z_1)<0$, т. е. $\gamma>0$. Полагая в (20) $n=1$, находим

$$\gamma=0{,}125\sqrt{2{,}5\,(8-3m_1)},$$

и решение уравнения (13) будет иметь вид

$$\alpha_1=0{,}125\sqrt{2{,}5\,(8-3m_1)}\left(z_1^2-1\right). \qquad (21)$$

Далее будем искать функцию P в виде ряда по степеням $e^{-\eta}$

$$P\,(\eta)=\sum_{N=0}^{\infty}\beta_Ne^{-N\eta}. \qquad (22)$$

Удовлетворяя условиям (6—7), получаем два уравнения, одно из которых дает соотношение коэффициентов

$$\beta_0=\overline{P},\quad \sum_{N=1}^{\infty}\beta_n=P_0-\overline{P}.$$

Используя (12), (21), (22), имеем

$$\left(\frac{dP}{d\eta}\right)_{\eta=0}=P_0^{\frac{n}{2(n+1)}}\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{D}\,a},$$

$$\left(\frac{dP}{d\eta}\right)_{\eta=0}=-\sum_{N=1}^{\infty}\beta_NN,$$

откуда получаем еще одно уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты

$$\sum_{N=1}^{\infty} N\beta_N = -P_0^{\frac{n}{2(n+1)}}\frac{\gamma}{\sqrt{D}\ a}.$$

Далее, последовательно дифференцируя (21) и (22) и находя значения производных при $\eta=0$, получаем систему для определения коэффициентов β_N.

Решение уравнения (13) можно также искать в виде ряда

$$\alpha_1 = \sum_{N=0}^{\infty} b_N z_1^N. \tag{23}$$

Удовлетворяя граничному условию (14), сразу получаем $a_1=0$. Подставим (23) в (13), предварительно представив правую часть уравнения в виде (19), и, воспользовавшись рекуррентной формулой, выведенной в [5], запишем выражения для коэффициентов ряда (23)

$$b_2 = -\frac{1}{4b_0},\quad b_3 = \frac{nm_1}{12b_0},$$

$$b_4 = -\frac{n(n-1)}{2\cdot 24b_0}m_1^2 - \frac{2b_2^2}{12b_0},\ldots,$$

$$b_N = \frac{1}{N(N-1)\,b_0}\Bigg[(-1)^{N+1}\times$$

$$\times\frac{n(n-1)\ldots(n-N+3)}{2\cdot(N-2)!}m_1^{N-2} -$$

$$-\sum_{k_1=2}^{N-2}(N-k_1)(N-k_2-1)\times$$

$$\times b_{k_1}b_{N-k_1}\Bigg],\ N\geqslant 4.$$

Все коэффициенты выражаются через b_0, который можно найти, используя условие (15), дающее нам соотношение

$$\sum_{N=0}^{\infty} b_N = 0. \tag{24}$$

Найдя значения для коэффициентов (23), будем искать, как и в предыдущем случае, решение в виде ряда по степеням $e^{-\eta}$

$$P=\gamma_0+\gamma_1 e^{-\eta}+\gamma_2 e^{-2\eta}+\gamma_3 e^{-3\eta}+\cdots \tag{25}$$

Для нахождения N коэффициентов (25) продифференцируем последовательно (23), (25) $(N-1)$ раз по η и, найдя значения производных при $\eta=0$, получим алгебраическую систему. Еще одно уравнение дает краевое условие. Таким образом, для неизвестных γ_N получаем систему вида

$$\sum_{N=1}^{\infty}\gamma_N = P_0-\overline{P},$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}N\gamma_N = \frac{P_0^{\frac{n}{2(n+1)}}}{\sqrt{D}\,a}\cdot b_0,$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}N^2\gamma_N = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Перейдем далее к задачам теории пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя для установившегося движения в переменных типа Мизеса, как известно, сводятся к квазилинейному уравнению типа теплопроводности [2]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \nu\sqrt{2(z_0-z)}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}, \tag{26}$$

где

$$z(x,\psi) = \frac{\bar{u}^2-u^2}{2}, \tag{27}$$

$$z_0 = \frac{\bar{u}^2}{2},$$

$\bar{u}$ — скорость внешнего потока.

Система уравнений пограничного слоя рассматривается при пограничных условиях

$$y=0,\ u=0, \tag{28а}$$

$$y=\infty,\ u=\bar{u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{28б}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y} = u\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -u\frac{\partial u}{\partial y},$$

т. е. $\dfrac{\partial z}{\partial\psi} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тогда $\dfrac{\partial z}{\partial\psi}=0.$

Проинтегрируем (26) от 0 до $b(x)$, где $b(x)$ — аналог толщины пограничного слоя для переменного ψ

$$\int_0^{b(x)}\frac{\partial z}{\partial x}d\psi =$$

$$=\sqrt{2}\,\nu\int_0^{b(x)}\sqrt{z_0-z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}\cdot d\psi. \tag{29}$$

Применим к левой части (29) дифференцирование интеграла по параметру, а к правой — интегрирование по частям

$$\frac{d}{dx}\int_0^{b(x)} z(x,\psi)\,d\psi - \frac{db}{dx}\cdot\bar{z} =$$

$$=\sqrt{2}\,\nu\left[\left(\sqrt{z_0-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)\right]_0^{b(x)} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{b(x)}\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2\frac{d\psi}{\sqrt{z_0-z}}$$

или

$$\frac{d}{dx}\int_0^{b(x)} z\,d\psi =$$

$$=\frac{\nu}{\sqrt{2}}\int_0^{b(x)}\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{z_0-z}}. \tag{30}$$

Введем безразмерную переменную $\eta=\dfrac{\psi}{b(x)}$, тогда (30) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[b(x)\int_0^1 z d\eta\right] =$$

$$= \frac{\nu}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{b(x)} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \cdot \frac{d\eta}{\sqrt{z_0 - z}}. \quad (31)$$

Далее рассмотрим случай продольного обтекания плоской пластины, при этом будем иметь $z = z(\eta)$ и $\bar{u} = \text{const}$. Тогда соотношение (31) запишется в форме

$$b\frac{db}{dx} = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\int_0^1 \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{d\eta}{\sqrt{z_0 - z}}}{\int_0^1 \eta z d}. \quad (32)$$

Или проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в числителе (32), имеем

$$b\frac{db}{dx} =$$

$$= \frac{\nu}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\int_0^1 \sqrt{z_0 - z}\frac{d^2 z}{d\eta^2} d\eta}{\int_0^1 z d\eta}. \quad (33)$$

Функцию z будем искать в виде полинома $z = a_0 + a_1(\eta - 1) + a_2(\eta - 1)^2$. Удовлетворяя условиям $z(1) = 0$, $z(0) = z_0$, $\left.\frac{dz}{d\eta}\right|_{\eta=1} = 0$, которые получаются из (27), (28а), (28б), имеем

$$z = z_0(\eta - 1)^2. \quad (34)$$

Подставляя (34) в соотношение (33) и считая $b(0) = 0$, определим

$$b(x) = \sqrt{3\pi\nu\bar{u}x}, \quad (35)$$

что позволит найти распределение скоростей и напряжение трения на стенке. Так как $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, используя (28), (34), получим равенство

$$y = \frac{b(x)}{\bar{u}}\left[\arcsin(\eta - 1) + \frac{\pi}{2}\right], \quad (36)$$

из которого находим

$$\psi = b(x)\left[1 - \cos\frac{\bar{u}y}{b(x)}\right]. \quad (37)$$

Определив ψ, получаем

$$u = \bar{u}\sin y\sqrt{\frac{\bar{u}}{3\pi\nu x}}. \quad (38)$$

Заметим, что распределение скоростей (38) уже использовалось в теории пограничного слоя [1].

Так как напряжение трения определяется формулой $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$, то в рассматриваемых переменных имеем

$$\tau = -\mu\frac{\partial z}{\partial\psi} = -\mu\frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\psi} =$$

$$= -\mu\frac{\bar{u}^2(\eta - 1)}{b(x)},$$

и значение этой величины на поверхности пластины равно

$$\tau_0 = \mu\sqrt{\frac{\bar{u}^3}{3\pi\nu x}} = 0{,}326\sqrt{\frac{\mu\rho\bar{u}^3}{x}}.$$

Заметим, что в формуле Блазиуса коэффициент равен 0,332. Значит, уже первое приближение дает удовлетворительный результат.

Для получения следующего приближения умножим обе части уравнения (26) на $F'(z)$, где $F(z)$ — некоторая функция произвольного вида, и проинтегрируем по ψ от 0 до $b(x)$

$$\int_0^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x} d\psi =$$

$$= \nu\sqrt{2}\int_0^{b(x)} \sqrt{z_0 - z}\, F_z'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d\psi.$$

Применяя те же преобразования, что и для (29), с учетом краевых условий получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^{b(x)} F d\psi - \frac{db}{dx}F(0) =$$

$$= -\sqrt{2}\nu\int_0^{b(x)} \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2 \left[\sqrt{z_0 - z}\, F_z'\right]_z' d\psi. \quad (39)$$

Так же, как при решении (1), введем переменную $\eta = \frac{\psi}{b(x)}$, тогда (39) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[b(x)\int_0^1 F d\eta\right] - \frac{db}{dx}F(0) =$$

$$= -\sqrt{2}\nu\frac{1}{b(x)}\int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2 \left[\sqrt{z_0 - z}\, F_z'\right]_z' d\eta. \quad (40)$$

В случае же пластины имеем

$$b\frac{db}{dx} = -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\nu\int_0^1 \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 \left[\sqrt{z_0 - z}\, F_z'\right]_z' d\eta}{\int_0^1 [F(z) - F(0)]\, d\eta}. \quad (41)$$

Эта бесконечная система интегральных соотношений для произвольных $F(z)$ эквивалентна уравнению типа (26).

Положим $F'(z)=1$ и $F'(z)=z$. Тогда (41) дает

$$b\frac{db}{dx}=\sqrt{2}\,\nu\frac{\int\limits_0^1\sqrt{z_0-z}\,\frac{d^2z}{d\eta^2}\,d\eta}{\int\limits_0^1 z\,d\eta}, \qquad (42)$$

$$b\frac{db}{dx}=\sqrt{2}\,\nu\frac{2\int\limits_0^1 z\sqrt{z_0-z}\,d\eta\,\frac{d^2z}{d\eta^2}}{\int\limits_0^1 z^2\,d\eta}. \qquad (43)$$

Обозначим $z_0-z=q^2$, получим

$$b\frac{db}{dx}=\nu\sqrt{2}\frac{-2\int\limits_0^1 q\left(q_\eta'^2+qq_\eta''\right)d\eta}{\int\limits_0^1 (z_0-q^2)\,d\eta}=$$

$$=-\nu\sqrt{2}\frac{4\int\limits_0^1\left(q_\eta'^2+qq_\eta''\right)q\left(z_0-q^2\right)d\eta}{\int\limits_0^1 (z_0-q^2)^2\,d\eta}.$$

Неизвестную функцию q можно искать в форме

$$q=b_0+b_1(\eta-1)+b_2(\eta-1)^2+b_3(\eta-1)^3.$$

Коэффициенты определяются из краевых условий и одного из соотношений (42) или (43), при этом второе соотношение служит для определения $b(x)$. Аналогичный метод может быть применен и для решения уравнений пограничного слоя газа. В этом случае для пластины уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\mu\rho u\frac{\partial u}{\partial\psi}\right).$$

В случае $\mu\rho=\mathrm{const}$, что соответствует линейной зависимости вязкости от температуры, получаем уравнение Мизеса для несжимаемой жидкости, т. е. рассмотренные методы решения можно использовать для решения уравнения пограничного слоя газа. Если же $\mu\rho\neq\mathrm{const}$, то можно применить метод интегральных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Л. Ф. Ламинарный пограничный слой при наличии отсасывания. Киев: Наукова думка, 1968. — 2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. Е. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. — 3. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, 1947. — 4. Файнзильбер А. М. Методы решения уравнений теплопроводности и химической кинетики при наличии переменных коэффициентов. — Изв. ТСХА, 1975, вып. 6, с. 179—188. — 5. Файнзильбер А. М., Заболотских Г. Б. Задачи теплообмена с учетом зависимостей физических параметров от температуры и их применение к теории пограничного слоя. — Изв. ТСХА, 1980, вып. 2, с. 167—171.

Статья поступила 27 марта 1980 г.

SUMMARY

Methods of solving the equations of gas movement in the porous medium as well as of boundary layer equations are presented in the paper. Solving of these problems coming to quasi-linear equations of heat conduction is connected with great mathematical difficulties which are overcome by using transformation to new variables and the method of integral relations, the first approximation giving good coincidence with the results of accurate solution.