«Известия ТСХА».
выпуск 4, 1978 год

УДК 63:378.001.57

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВУЗОВ

ФАЙНЗИЛЬБЕР А. М., ВОРОБЬЕВА Г. А.
(Кафедра высшей математики)

Экономико-математическое моделирование уже нашло широкое применение в сельскохозяйственном производстве. Однако для сельскохозяйственного высшего образования экономико-математические модели еще не разработаны, хотя значение их здесь не менее существенно, например, при определении оптимальных размеров вузов и их подразделений, для распределения контингентов приемов по вузам и т. п.

Построение экономико-математической модели приема в вузы республики (или зоны)

Пусть в данной зоне n сельскохозяйственных вузов, в каждом из которых идет подготовка по m специальностям (агрономии, агрохимии, животноводству и т. п.). Для простоты рассмотрения будем считать, что число специальностей во всех вузах одинаковое. Отсутствие некоторых из них в каком-то вузе соответствует нулевому контингенту приема по данной специальности.

Число студентов, обучающихся j-й специальности в i-м вузе, обозначим x_{ij}, где $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., m$; p_{ij} — стоимость годового обучения студента i-го вуза по j-й специальности, отнесенная к расходам на зарплату преподавателей и оборудование, а t_j — продолжительность (в годах) обучения по данной специальности. Структура p_{ij} определяется важностью фактора обеспеченности вуза более квалифицированными кадрами и оборудованием.

Тогда общая стоимость обучения студентов всех вузов данной зоны будет выражаться формулой

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}t_j p_{ij} x_{ij}. \qquad (1)$$

Требуется распределить прием по вузам таким образом, чтобы z было наименьшим. При этом, однако, следует учесть ряд ограничений, связанных с наличием ресурсов в том или ином вузе, а также с необходимостью обеспечить заданную потребность народного хозяйства в специалистах того или иного профиля.

Главные из этих ограничений следующие:

1) по наличию преподавателей; при этом следует учитывать, что преподаватели общетеоретических кафедр ведут занятия со студентами разных специальностей, а преподаватели специальных кафедр в некоторых случаях — только со студентами отдельных специальностей или факультетов;

2) по учебной площади;

3) по обеспеченности вуза учебно-опытными хозяйствами;

4) по площади и обеспеченности инвентарем общежитий;

5) по наличию учебного оборудования;

6) по установленной потребности сельского хозяйства данной зоны в специалистах различных специальностей (агрономах, зооинженерах и т. п.).

Ограничение по наличию преподавателей может быть записано

$$k_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant A_i + \sum_{j=1}^{m} M_{ij} (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Здесь k_i — установленные формы отношения числа преподавателей к числу студентов для i-го вуза; A_i — количество преподавателей общеобразовательных кафедр i-го вуза; M_{ij} — количество преподавателей i-го вуза, работающих со студентами j-й специальности.

Ограничение по учебной площади записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{m} t_j x_{ij} \leqslant \frac{B_i}{\gamma} (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где Bi — учебная площадь i-го вуза; γ — норма учебной площади, приходящейся в среднем на одного студента.

Ограничение по обеспеченности учебно-опытными хозяйствами выражается следующим образом:

$$t_j a_j x_{ij} \leqslant C_{ij} \ (i=1, 2, \ldots, n; \ j=1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

где C_{ij} определяется размерами опытных хозяйств i-го вуза (например, площадью земли, количеством животных и т. п.); a_j — соответствующий размер, приходящийся на одного студента j-й специальности.

Ограничения по площади общежитий и обеспеченности их инвентарем имеют вид

$$\sum_{j=1}^{m} t_j x_{ij} \leqslant \frac{D_i}{6}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} t_j x_{ij} \leqslant \frac{E_i}{139{,}95} (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Здесь D_i — полезная площадь общежитий i-го вуза; E_i — стоимость инвентаря общежитий с учетом ремонта и амортизации; 6 (м^2) — норма полезной площади, приходящейся на одного студента; 139,95 руб. — норма стоимости инвентаря, приходящегося на одного студента.

Ограничения по обеспечению студентов учебным оборудованием записываются

$$t_j m_j x_{ij} \leqslant F_{ij} \ (i=1, 2, \ldots, n; \ j=1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

где F_{ij} — стоимость учебного оборудования, m_j — норма обеспеченности оборудованием, приходящимся на одного студента.

Ограничение по потребности в специалистах j-го профиля имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_{ij} = A_j (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Таким образом, задача распределения контингентов приема по вузам данной зоны или республики сводится к решению задачи линейного программирования: минимизировать функцию (1) при выполнении ограничений (2) — (8).

Задача распределения приема в аспирантуру по вузам

В связи с тем, что при планировании работы аспирантуры очень большое значение придается своевременному представлению диссертаций, целесообразно отразить этот фактор при формировании структуры критерия оптимальности. Поэтому примем в качестве условия оптимальности

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_{ij} = \max, \tag{9}$$

где n — число вузов, m — число кафедр, x_{ij} — норма приема аспирантов на j-ю кафедру i-го вуза, $\alpha_{ij} = \frac{3}{t_{ij}}$ — статистический коэффициент своевременного представления диссертаций аспирантами данной кафедры (t_{ij} — средняя за ряд последних лет продолжительность выполнения диссертационных работ). Здесь должны выполняться также ограничения:

1) по обеспеченности научными руководителями (существующим положением предусматривается, что у одного научного руководителя не может быть больше пяти аспирантов); 2) по обеспеченности аспирантов площадью общежитий; 3) по наличию рабочих мест и оборудования; 4) по потребности в кандидатах наук по каждой из m специальностей.

Все эти ограничения записываются следующим образом:

Первое:

$$x_{ij} \leqslant 5A_{ij} \; (i=1, 2, ..., n; \; j=1, 2, ..., m), \tag{10}$$

где A_{ij} — число научных руководителей, которые могут быть выделены для нового приема.

Второе:

$$\beta \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant B_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

где B_i — площадь общежитий i-го вуза, выделяемая для нового приема, β — норма площади общежитий на одного аспиранта.

Третье:

$$x_{ij} \leqslant C_{ij}^{1} \tag{12}$$

$$x_{ij} \leqslant C_{ij}^{2} (i=1, 2, \ldots, n; \; j=1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Четвертое:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant D_j (j=1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Таким образом, задача сводится к выполнению условия оптимизации (9) при ограничениях (10) — (14), т. е. к задаче линейного программирования.

Задача определения оптимального состава кафедры [1]

Пусть на кафедре имеется x_1 профессоров, x_2 доцентов, x_3 старших преподавателей, x_4 ассистентов; эти числа и подлежат определению. Прежде всего необходимо записать ограничения по выполнению учебной работы преподавателями различных категорий, которые, как известно, регламентируются установленными нормами учебной нагруз-

[1] Аналогично можно решить задачу об оптимальном составе лаборатории, факультета или других подразделений вуза.

ки. Эти ограничения учитываются отдельно для профессоров и доцентов, для старших преподавателей и ассистентов. При этом для простоты рассмотрения будем считать, что профессора и доценты целиком выполняют лекционную, экзаменационную и консультационную нагрузки и ведут также практические занятия в одной группе каждого из потоков. Профессора осуществляют также руководство аспирантами. Что касается руководства дипломниками, то долю соответствующих часов, приходящихся на профессоров и доцентов, обозначим через m. Случаи, когда старшие преподаватели также читают лекции и принимают экзамены, легко учесть введением соответствующих коэффициентов.

Таким образом, учебная нагрузка S, которую должны выполнить профессора и доценты, выражается в виде

$$S=\sum_{i=1}^{n} a_i+30\sum_{i=1}^{n} k_i+0{,}15\sum_{i=1}^{n} k_i a_i+\sum_{i=1}^{n} r_i+50a_S+35mD, \quad (15)$$

где n — число лекционных потоков; a_i — число часов лекций в каждом потоке; k_i — число групп в i-м потоке; коэффициент 30 соответствует экзаменационной нагрузке на группу (2 экзамена в год); коэффициент 0,15 — норме консультаций, отнесенной к числу лекционных часов; r_i — число часов практических занятий, приходящихся на одну группу; a_S — число аспирантов на кафедре; D — число дипломников. На руководство аспирантами отводится 50 ч в год, на руководство дипломниками — 35 ч в год.

Ограничения по выполнению учебной нагрузки профессорами и доцентами могут быть представлены следующим образом:

$$\left(1-\frac{f}{100}\right)S\leqslant A_1x_1+A_2x_2\leqslant\left(1+\frac{f}{100}\right)S, \quad (16)$$

где A_1 — норма годовой учебной нагрузки профессора; A_2 — норма годовой учебной нагрузки доцента; $\frac{f}{100}$ — некоторый (небольшой) процент отклонения нагрузки от плана $\left(\text{например, } \frac{f}{100}=0{,}05\right)$, вызываемый случайными причинами. Отметим, что в выражение (16) нетрудно ввести также поправку, учитывающую меньшую норму для заведующего кафедрой или декана.

Учебная нагрузка Q старших преподавателей и ассистентов выражается в виде

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)r_i+20\sum_{i=1}^{n}k_i+35(1-m)D. \quad (17)$$

Здесь второй член соответствует нагрузке по зачетам (из расчета 2 зачета в год по $^1/_3$ часа на группу в 30 человек). Ограничение по выполнению учебной нагрузки старшими преподавателями и ассистентами записывается

$$\left(1-\frac{f}{100}\right)Q\leqslant A_3x_3+A_4x_4\leqslant\left(1+\frac{f}{100}\right)Q. \quad (18)$$

Кроме ограничений (16), (18), нужно учитывать также ограничения по руководству аспирантами

$$x_1\geqslant\frac{a_S}{5}, \quad (19)$$

а также некоторые другие ограничения, связанные со спецификой работы той или иной кафедры, руководством производственной практикой, участием в ГЭК, работой на подготовительном отделении и т. д., которые мы здесь не приводим.

В качестве условия оптимальности примем требование минимизации следующего критерия

$$H = \frac{R + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} \gamma_i x_i} = \min. \tag{20}$$

Здесь β_i — годовая заработная плата той или иной категории преподавателей; R — прочие расходы на кафедру; γ_i — коэффициент «качества работы» преподавателя данной категории, например,

$$\gamma_1 = 4;\ \gamma_2 = 2{,}6;\ \gamma_3 = 1{,}6;\ \gamma_4 = 1.$$

Коэффициент H представляет собой условную себестоимость единицы работы кафедры, и поэтому естественно требование его минимизации.

Таким образом, задача определения оптимального состава кафедры и оптимальных соотношений между преподавателями различных категорий сводится к задаче дробно-линейного программирования, выражаемого условием (20) при ограничениях (16), (18) и (19).

Расчет оптимального размера вуза

Пусть число студентов — x, а число преподавателей — y. Здесь имеются следующие ограничения:

Первое:

$$x \geqslant 2000 \tag{21}$$

(поскольку не должно быть «карликовых» вузов).

Второе:

$$0{,}95Lx \leqslant Ky \leqslant 1{,}05Lx, \tag{22}$$

где K — средняя годовая нагрузка преподавателя, ч, L — средняя годовая учебная нагрузка в расчете на одного студента.

Третье:

$$U = cx + dy + N \leqslant W, \tag{23}$$

где U — учебные расходы в расчете на одного студента в год; $cx + dy + N$ — зависимость учебных расходов от числа студентов и числа преподавателей, которая в силу условия (21) для вузов, рассчитанных на обучение более 2000 студентов, может быть выравнена линейным законом.

В качестве условия оптимизации может быть принято

$$D = \frac{\alpha x + \beta y}{ax + b} = \max. \tag{24}$$

Здесь α — представляет собой ежегодные расходы на оборудование в расчете на одного студента; β — средняя годовая заработная плата одного штатного преподавателя; $z = ax + b$ — зависимость расходов от размера вуза, определяемого числом студентов, которая получается аналогично условию (23).

По данным табл. 1, методом наименьших квадратов получена зависимость учебных расходов от числа студентов и числа преподавателей:

$$U = -0{,}0011x + 0{,}1930y + 470{,}9631, \tag{25}$$

а также зависимость стоимости обучения в расчете на одного студента от размера сельскохозяйственного вуза

$$z = 0{,}018x + 474{,}598. \tag{26}$$

Эта же задача может быть решена с учетом распределения студентов по факультетам.

Влияние размеров сельскохозяйственного вуза на стоимость обучения

Показатели	Группы вузов по численности штатных преподавателей, чел.		
	200—290	300—399	400 и более
Средняя численность педагогического персонала	252	331	504
Средняя численность студентов	2321	3360	4957
Расходы в расчете на одного студента в год, руб. [3]	528	513	570

Пусть $x_i (i=1, 2, ..., n)$ — число студентов i-го факультета; α_i — ежегодные расходы на оборудование в расчете на одного студента i-го факультета; y_i — число преподавателей, работающих на данном факультете (поскольку некоторые преподаватели могут вести занятия на двух и более факультетах, числа $y_1, y_2, ..., y_n$ могут быть дробными).

При решении задачи учитываются следующие ограничения:

$$x_i \geqslant 600 \tag{27}$$

(что соответствует наличию не менее 120 человек, т. е. 4 групп на одном курсе факультета).

Условие выполнения учебной нагрузки преподавателями данного факультета записывается в виде

$$0{,}95 L_i x_i \leqslant m_i K_i y_i \leqslant 1{,}05 L_i x_i, \tag{28}$$

здесь K_i — средняя годовая учебная нагрузка преподавателей факультета, ч; m_i — коэффициент использования преподавателя на данном факультете (если преподаватель работает только на этом факультете, $m=1$); L_i — средняя годовая учебная нагрузка в расчете на одного студента.

$$U = c\sum_{i=1}^{n} x_i + d\sum_{i=1}^{n} y_i + N \leqslant W. \tag{29}$$

Условие (29) аналогично (23).

В качестве условия оптимизации принимается

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i}{a\sum_{i=1}^{n} x_i + b} = \max. \tag{30}$$

После того, как оптимальные значения x_i и y_i определены, находится и оптимальное отношение $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$, представляющее собой число студентов на одного преподавателя.

В заключение отметим, что рассмотренные задачи могут быть решены и при выборе других критериев оптимальности, а также для вузов другого профиля и корректировки контингентов вузов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файнзильбер А. М., Воробьева Г. А. Статистический анализ учебного процесса в сельскохозяйственном вузе. Тез. докл. Всесоюз. науч. конференции «Математ. методы и технич. средства в науч. организации учеб. процесса», Ростов н/Д, 1977, с. 68—69. — 2. Полунин И. Ф. Математическое программирование. Минск, «Высшейшая школа», 1970. — 3. Дайновский А. Б. Экономика высшего образования. М., «Экономика», 1976.

Статья поступила 9 декабря 1977 г.