

УДК 519.24

## СЖАТИЕ ИНФОРМАЦИИ С БОЛЬШИХ ОБЛАСТЕЙ И ОБРАБОТКА ЕЕ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ УОЛША

Н. А. ФРИДЛЕНДЕР  
(Кафедра высшей математики)

Настоящая работа посвящена вопросам хранения больших массивов чисел, определяющих некоторые функции с заданной точностью, и операциям с ними. Эти массивы чисел, в частности, могут подробно описывать состояние хозяйственных параметров (плотность населения, урожайность, производительность труда, количество осадков, информация о почве, рельефе местности и др.) в различных точках на большой территории и использоваться при установлении корреляционных зависимостей между ними, что необходимо для планирования.

При выявлении таких зависимостей на определенной территории требуются запоминание в некоторой двумерной области большого числа ( $N$ ) функций, зависящих от двух переменных, и нахождение корреляционных связей между ними. Указанные функции должны быть записаны в памяти ЭВМ в компактной форме, чтобы можно было быстро вывести нужные данные на печать, а также производить различные расчеты [3].

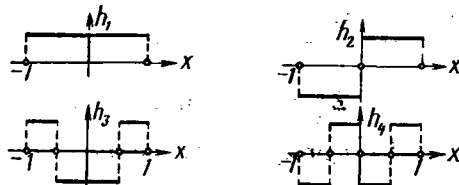


Рис. 1. Функции Уолша для  $n=4$ .

Одним из наиболее эффективных способов записи сложных статистических зависимостей является разложение их по попарно ортогональным функциям Уолша — Адамара. Поясним такое разложение примером. Рассмотрим для простоты сначала целочисленные функции одномерной области, принимающие значения  $+1$  и  $-1$ . Пусть сегмент  $[-1, +1]$  разделен на четыре равные части, тогда таких функций будет четыре  $h_1(x)$ ;  $h_2(x)$ ;  $h_3(x)$ ;  $h_4(x)$ . Функции показаны на рис. 1.

Определим далее скалярное произведение двух любых ступенчатых функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , заданных на сегменте  $[-1; +1]$ , как сумму произведений значений этих функций в точках  $-3/4$ ;  $-1/4$ ;  $-3/4$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1(x); \varphi_2(x)) &= \varphi_1\left(-\frac{3}{4}\right)\varphi_2\left(-\frac{3}{4}\right) + \varphi_1\left(-\frac{1}{4}\right)\varphi_2\left(-\frac{1}{4}\right) + \\
 &+ \varphi_1\left(\frac{1}{4}\right)\varphi_2\left(\frac{1}{4}\right) + \varphi_1\left(\frac{3}{4}\right)\varphi_2\left(\frac{3}{4}\right) = \sum_i \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $x_i = -3/4; -1/4; 1/4; 3/4; i=1, 2, 3, 4$ .

В этом евклидовом пространстве функции  $h_1(x), \dots, h_4(x)$  попарно ортогональны, в чем можно убедиться, проведя непосредственную проверку. Докажем, к примеру, ортогональность функций  $h_3(x)$  и  $h_4(x)$ :

$$(h_3(x); h_4(x)) = 1(-1) + (-1)1 + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 = 0. \quad (2)$$

Найдем теперь норму этих функций

$$\|h_1(x)\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2. \quad (3)$$

Аналогично имеем

$$\|h_2(x)\| = \|h_3(x)\| = \|h_4(x)\| = 2. \quad (4)$$

Отсюда ортонормированная система функций  $\bar{h}_1(x), \dots, \bar{h}_4(x)$  определяется формулами

$$\bar{h}_k(x) = \frac{1}{\|h_k(x)\|} \cdot h_k(x). \quad (5)$$

Любая ступенчатая функция  $Z(x)$  с разрывами в точках  $-0,5; 0$  и  $0,5$  может быть единственным образом представлена в виде разложения по функциям  $\bar{h}_1(x)$  или нормированным функциям  $\bar{h}_1(x)$

$$Z(x) = \alpha_1 \bar{h}_1(x) + \alpha_2 \bar{h}_2(x) + \alpha_3 \bar{h}_3(x) + \alpha_4 \bar{h}_4(x), \quad (6)$$

где  $\alpha_k$  — коэффициенты Фурье для функции  $Z(x)$ , определяемые по формулам

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^4 Z(x_i) \bar{h}_k(x_i), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Пусть задана функция  $Z(x)$  некоторыми числовыми значениями, или статистическим рядом, или графиком, как на рис. 2. Например, известно, что

$$Z\left(-\frac{3}{4}\right) = 3; \quad Z\left(-\frac{1}{4}\right) = -1; \quad Z\left(\frac{1}{4}\right) = 1; \quad Z\left(\frac{3}{4}\right) = 2. \quad (8)$$

По формулам (7) вычисляем коэффициенты Фурье

$$\alpha_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (-3 + 1 + 1 + 2) = \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} (3 + 1 - 1 + 2) = \frac{5}{2},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} (-3 - 1 - 1 + 2) = -\frac{3}{2}.$$

Откуда получаем аппроксимирующую функцию

$$Z(x) \approx \frac{5}{2} \bar{h}_1(x) + \frac{1}{2} \bar{h}_2(x) + \frac{5}{2} \bar{h}_3(x) - \frac{3}{2} \bar{h}_4(x). \quad (10)$$

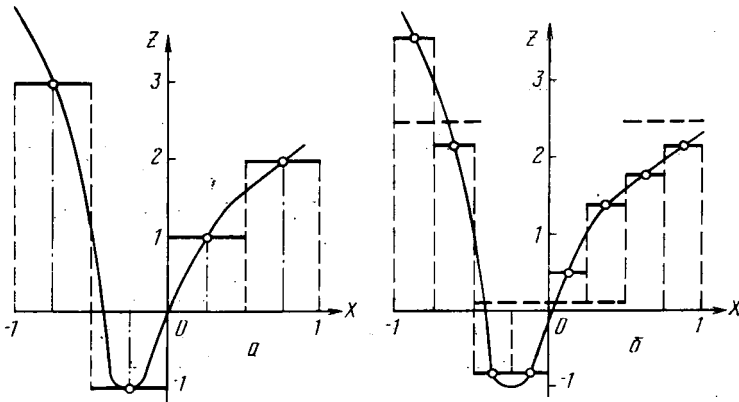


Рис. 2. Разложение данной функции при  $n=2; n=4; n=8$ .

Простота получения аппроксимирующей функции очевидна. График этой функции представлен на рис. 2, а отрезками горизонтальных прямых; из рис. 2 видна и погрешность аппроксимации.

Если требуется большая точность аппроксимации, то на сегменте  $[-1; +1]$  можно построить не 4, а 8 базисных функций. Нормы этих функций равны

$$\|h_1\| = \dots = \|h_8\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \quad (11)$$

Аппроксимируем ту же функцию  $Z(x)$ , что на рис. 2, а, но возьмем не 4, а 8 значений и аппроксимацию произведем с помощью восьми базисных функций  $h_1(x); h_2(x); \dots h_8(x)$ .

Исходя из рис. 2, имеем

$$Z\left(-\frac{7}{8}\right) = 3,6; \quad Z\left(-\frac{5}{8}\right) = 2,2; \quad Z\left(-\frac{3}{8}\right) = -0,8; \quad Z\left(-\frac{1}{8}\right) = -0,8; \quad (12)$$

$$Z\left(\frac{1}{8}\right) = 0,5; \quad Z\left(-\frac{3}{8}\right) = 1,4; \quad Z\left(\frac{5}{8}\right) = 1,8; \quad Z\left(\frac{7}{8}\right) = 2,2.$$

Коэффициенты Фурье для этого случая будут иметь следующие значения

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 10,1; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 1,7; \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 9,5; \quad \alpha_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-5,3); \quad (13)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0,9; \quad \alpha_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-1,9); \\ \alpha_7 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2,7; \quad \alpha_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-0,1).$$

Значение аппроксимирующей функции в дискретных заданных точках должно совпадать со значениями  $Z(x)$ . Проверим это, например, для  $x=7/8$ :

$$Z\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} \cdot (10,1 + 1,7 + 0,9 - 5,3 + 0,9 - 1,9 + 2,7 - 0,1) = \frac{17,6}{8} = 2,2. \quad (14)$$

График аппроксимирующей ступенчатой функции имеет уже 8 ступеней (рис. 2, б).

Из (12) и (13) следует выполнение равенства Парсеваля

$$\sum_i Z^2(x_i) - \sum_k \alpha_k^2 = 0. \quad (15)$$

При аппроксимации функции  $Z(x)$  линейной комбинацией функций Уолша отбрасывание некоторых членов с малыми по абсолютному значению коэффициентами  $\alpha_k$  не приводит к большой ошибке.

Исследуем этот вопрос подробнее. Расположим коэффициенты Фурье рассматриваемой функции  $Z(x)$  в порядке убывания их абсолютных значений

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_7 \alpha_6 \alpha_2 \alpha_5 \alpha_8) \quad (16)$$

и запишем аппроксимирующую функцию в порядке убывания значений коэффициентов Фурье

$$Z(x) = \alpha_1 \bar{h}_1(x) + \alpha_3 \bar{h}_3(x) + \alpha_4 \bar{h}_4(x) + \alpha_7 \bar{h}_7(x) + \alpha_6 \bar{h}_6(x) + \alpha_2 \bar{h}_2(x) + \alpha_5 \bar{h}_5(x) + \alpha_8 \bar{h}_8(x). \quad (17)$$

Если в (17) отбросить слагаемое с наименьшим значением коэффициента  $\alpha$ , то аппроксимирующая функция, оставаясь ступенчатой, изменится мало. Средняя квадратическая ошибка  $s$  будет равна

$$\sqrt{s^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^8 Z^2(x_i) - \sum_{k=1}^7 \alpha_k^2} = \sqrt{\frac{0,01}{64}} = 0,0125; \quad (18)$$

$$s = 0,0125.$$

Если отбросить  $\alpha_8$  и  $\alpha_5$ , то  $s = 0,1132$ , если оставить только два первых члена (17), то  $s = 0,8168$  (рис. 2, б и рис. 3).

График средней квадратической ошибки в зависимости от числа членов в разложении (17) построен в полулогарифмической шкале (рис. 3). Он позволяет сжать информацию с заданной точностью.

На том же принципе основывается разложение двумерной функции. За базисные функции рационально взять функции Уолша — Адамара как наиболее удобные для вычислений [1].

Рассмотрим две системы функций Уолша:

$$h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x), \quad (19)$$

$$h_1(y), h_2(y), \dots, h_n(y)$$

и составим мультипликативную систему функций

$$h_1(x)h_1(y); h_1(x)h_2(y); h_2(x)h_1(y); \dots; h_n(x)h_n(y) \quad (20)$$

в квадрате  $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$ .

Таких функций будет  $n^2$ .

Рассмотрим в квадрате систему точек  $(x_i, y_i)$ , где

$$x_i = -\frac{n-1}{n}; -\frac{n-3}{n}; \dots; -\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}, \quad (21)$$

$$y_j = -\frac{n-1}{n}; -\frac{n-3}{n}; \dots; -\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}.$$

Как и для одномерного случая, определяем скалярное произведение для некоторых двух заданных функций  $f_1(x; y)$  и  $f_2(x; y)$

$$(f_1 \cdot f_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_1(x_i; y_j) f_2(x_i; y_j). \quad (22)$$

Введенная мультипликативная система функций (20) будет при этом ортогональной. Нормируем систему (20).

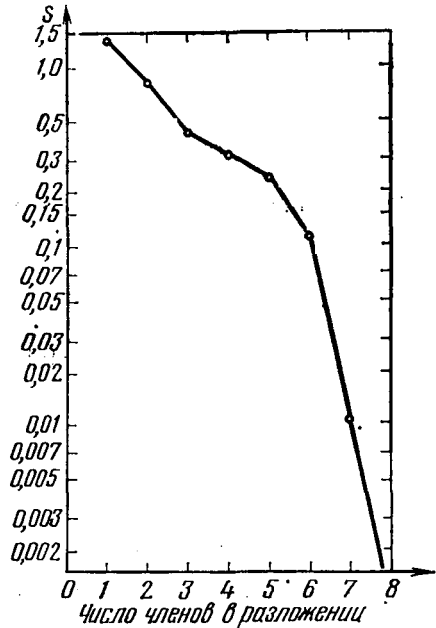


Рис. 3. Средняя квадратическая ошибка в зависимости от числа членов в разложении функции.

Так как при любом  $n$  квадрат нормы должен быть равен единице, то система функций

$$\varphi_{kl} = \frac{1}{n} h_k(x) h_l(y) \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

будет ортонормированной.

Примем (23) за базис и найдем разложение любой функции  $f(x; y)$ , заданной в точках (21) квадрата, в этом базисе:

$$f(x; y) = \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \varphi_{kl}(x; y). \quad (24)$$

Коэффициенты Фурье в данном разложении определяются по формулам:

$$\alpha_{kl} = \sum_i \sum_j f(x_i; y_j) \varphi_{kl}(x_i; y_j). \quad (25)$$

Мы не приводим примера аппроксимации двумерной функции, так как схема приближения или тождественного равенства по формуле (24) такая же, как в одномерном случае.

Равенство Парсеваля для двумерной задачи принимает вид

$$\sum_i \sum_j f^2(x_i; y_j) - \sum_k \sum_l \alpha_{kl}^2 = 0, \quad (26)$$

а среднее квадратическое отклонение  $s$  при отбрасывании части слагаемых в формуле (26) определяется следующим образом:

$$s = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_i \sum_j f^2(x_i; y_j) - \sum_k \sum_l \alpha_{kl}^2}. \quad (27)$$

Описанные выше алгоритмы нахождения коэффициентов  $\alpha_{kl}$  по данным значениям функции  $f_{ij}$  (25) можно рассматривать как линейные преобразования и записать в форме преобразования матриц, для чего построим ортогональную матрицу, содержащую в столбцах и строках функции Уолша (таблица). Непосредственная проверка позволяет убедиться, что различные строки (столбцы) матрицы взаимно ортогональны. Скалярный квадрат любого столбца равен  $n$  (у нас 16). Из структуры матрицы следует, что число изменений знаков с увеличением номера столбца (строки) на единицу также увеличивается на единицу. Так, в первом столбце перемен знака нет, а в последнем — их 15. Нахождение обратной матрицы сводится просто к операции транспонирования.

Если  $n=16$ , то число мультипликативных попарно ортогональных функций будет равно  $16^2$ , т. е. 256.

Коэффициенты линейной комбинации базисных функций будем определять с помощью произведения матриц.

Обозначим ортогональную матрицу из функций Уолша (таблица) через  $T$ . Тогда матрица  $G$ , состоящая из коэффициентов  $\alpha_{kl}$  может быть найдена по формуле

$$G = \frac{1}{n^2} T A T^T \quad (28)$$

или

$$\|\alpha_{kl}\| = \frac{1}{n^2} T \|f_{ij}\| T^T, \quad (29)$$

где  $A$  — исходная матрица числовых значений функции в отдельных точках, которую мы должны преобразовать для определения коэффициентов  $\alpha_{kl}$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
5	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
6	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
7	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
8	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
9	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
10	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
12	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
14	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
15	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1
16	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

В качестве примера возьмем для преобразования матрицу  $A (4 \times 4)$  и найдем для нее коэффициенты разложения по функциям Уолша:

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 16 & 30 \\ 10 & 4 & 6 & 16 \\ 14 & 4 & 2 & 8 \\ 28 & 14 & 8 & 10 \end{vmatrix}; \quad T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$TA = \begin{vmatrix} 64 & 32 & 32 & 64 \\ -20 & -14 & 12 & 28 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ -12 & -4 & 4 & 12 \end{vmatrix}. \quad (30)$$

$$(TA)T^T = \begin{vmatrix} 192 & 0 & 64 & 0 \\ 6 & -74 & 10 & -22 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & -16 \end{vmatrix} = G. \quad (31)$$

Элементами полученной матрицы являются с точностью до множителя  $1/4^2$  коэффициенты разложения по функциям Уолша функции, заданной матрицей  $A$ . Для сжатия информации часть членов с малыми по абсолютному значению коэффициентами можно отбросить, как это было сделано в одномерном случае. Всего можно отбросить 9 членов из 16.

Нахождение коэффициентов по правилу умножения матриц при больших  $n$  весьма громоздкая операция, даже для матриц  $T$  и  $T^T$ , элементами которых являются  $+1$  и  $-1$ , когда операция умножения сводится к сложению и вычитанию элементов матрицы  $A$ .

При больших размерах исходной матрицы  $A$  следует применять алгоритм быстрого преобразования столбцов. Так, на графе (рис. 4), построенном для матрицы  $16 \times 16$ , каждая внутренняя ячейка соединена двумя линиями с ячейками справа и слева, при этом сплошные линии означают операцию сложения, а пунктирные — вычитания. Если от ячейки отходят влево сплошная и пунктирная линии, то, следовательно, число, стоящее в этой ячейке получено вычитанием: уменьшаемым является число, к которому ведет сплошная линия, а вычитаемым — число, к которому ведет пунктирная линия [2]. Из рис. 4 следует, что в данном случае получается всего 4 общих конфигурации, которые легко запрограммировать на ЭВМ.

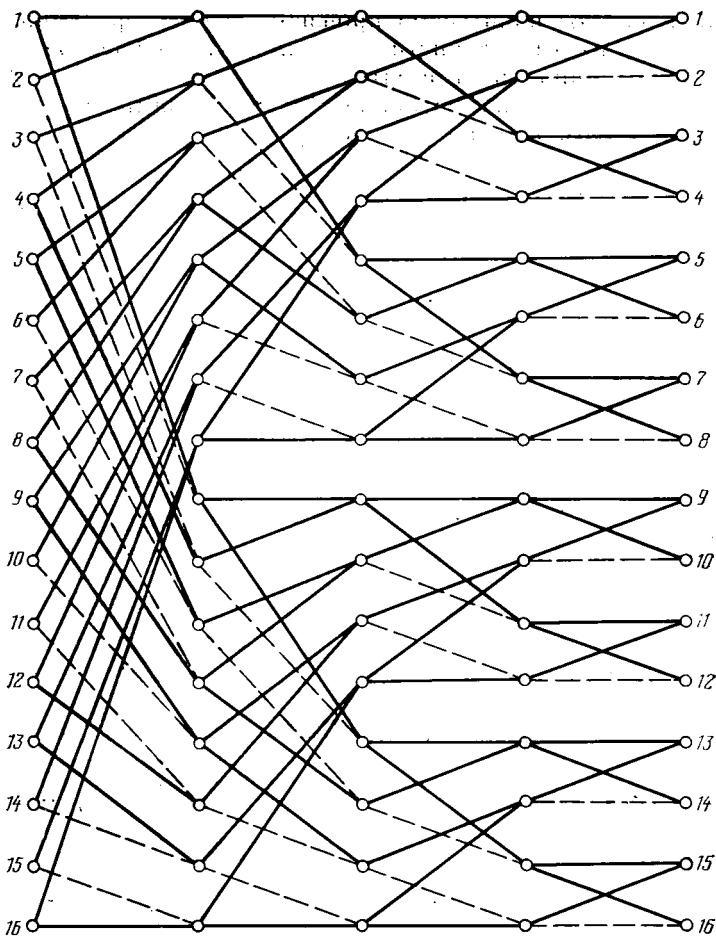


Рис. 4. Граф быстрого преобразования столбцов матриц при  $n=16$ .

В качестве примера рассмотрим преобразование первого столбца матрицы  $A$  в первый столбец промежуточной матрицы  $TA$  (30). Составим граф (рис. 5, *a*), являющийся частью общего графа на рис. 4 (см. в верхнем углу). В левые его ячейки поместим элементы первого столбца матрицы  $A$  (рис. 5, *б*). С помощью сложения и вычитания, указанных сплошными и пунктирными линиями, получаем сначала элементы среднего столбца ( $12+10=22$ ;  $14+28=42$  и т. д.), а из них сложением и вычитанием получаем правый столбец — первый столбец промежуточной матрицы  $TA$  (30). Указанный алгоритм на много сокращает количество вычислений на ЭВМ. Сравнительно сложный процесс умножения матриц сведен к простейшей для ЭВМ операции сложения, причем алгоритм составлен таким образом, что сложение дважды не производится, в памяти сохраняется один шаг алгоритма. Отсюда следует, что с возрастанием размера матрицы увеличивается выигрыш в числе операций при ее обработке.

Покажем, что, зная коэффици-

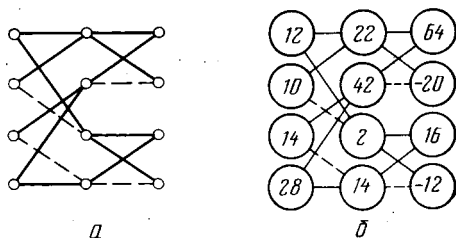


Рис. 5. Граф быстрого преобразования столбцов матриц при  $n=4$ .

енты разложения  $\alpha_{kl}$  каких-либо производственных функций, можно вычислить такие их характеристики, как математическое ожидание, дисперсия, корреляционные моменты.

Пусть в квадрате задана функция  $f(x; y)$  своими  $n^2$  значениями. Найдем математическое ожидание этой функции:

$$\begin{aligned} M[f(x; y)] &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j f(x_i; y_j) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j \left\{ \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \varphi_k(x_i; y_j) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Меняя порядок суммирования

$$M[f(x; y)] = \frac{1}{n^2} \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \sum_i \frac{h_k(x_i)}{\sqrt{n}} \sum_j \frac{h_l(y_j)}{\sqrt{n}} \quad (33)$$

и учитывая, что сумма значений  $\sum_{i=1}^n h_k(x_i)$  равна нулю для всех  $k$ , кроме

$k=1$ , т. е.  $\sum_i h_1(x_i) = n$  (аналогично для  $l=1$ ), получаем

$$M[f(x; y)] = \frac{1}{n^2} \alpha_{11} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\alpha_{11}}{n}. \quad (34)$$

Здесь математическое ожидание выражено через коэффициент разложения.

Пусть теперь в этом квадрате заданы две функции

$$\begin{aligned} f_1(x; y) &= \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \varphi_{kl}(x_i; y_j); \\ f_2(x; y) &= \sum_{k_1} \sum_{l_1} \beta_{k_1 l_1} \varphi_{k_1 l_1}(x_i; y_j). \end{aligned} \quad (35)$$

Найдем корреляционный момент

$$\begin{aligned} K(f_1 f_2) &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j f_1(x_i; y_j) f_2(x_i; y_j) - \\ &- \frac{\alpha_{11} \beta_{11}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \beta_{kl} - \frac{\alpha_{11} \beta_{11}}{n^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Дисперсия функции  $f(x; y)$  получается из (36) приравниванием коэффициентов  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$

$$D[f(x; y)] = \frac{1}{n^2} \sum_k \sum_l \alpha_{kl}^2 - \frac{\alpha_{11}^2}{n^2}. \quad (37)$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s[f(x; y)] = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{kl}^2 - \alpha_{11}^2}. \quad (38)$$

Определив корреляционные моменты некоторого числа функций, характеризующих, к примеру, состояние хозяйства на данной территории и средние квадратические отклонения этих функций, легко построить корреляционную матрицу



$$\begin{vmatrix}
 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & \dots & r_{1n} \\
 & 1 & r_{23} & \dots & \dots & r_{2n} \\
 & & & \dots & & \\
 & & & & \dots & \\
 & & & & & \dots \\
 & & & & & & \dots \\
 & & & & & & & \dots \\
 & & & & & & & & \dots \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{vmatrix} \quad (39)$$

Мы рассмотрели случай, когда территория имеет форму квадрата. Если это не так, то вокруг нее следует описать квадрат и вне территории принять некоторые средние значения функций. Можно применять и другие приемы: например, использовать неравномерную сетку по строкам (или по столбцам), что позволяет отобразить данную территорию в форме криволинейной трапеции на квадратную область. Для практических вычислений проще всего вписать в неквадратную область многоугольник, который разбивается на квадраты разной величины, но с одними и теми же шагами разбиения, и обрабатывать последовательно каждый квадрат.

В экономических исследованиях часто встречаются выражения вида:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} \text{ или } \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} c_{ij} \text{ и др.} \quad (40)$$

Например,  $a_{ij}$  — площадь, занятая некоторой культурой,  $b_{ij}$  — средняя урожайность этой культуры для данной местности. Тогда  $\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$  — ожидаемый урожай культуры. Подобные характеристики могут быть рассчитаны непосредственно через коэффициенты отображений.

Покажем это:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} &= \sum_i \sum_j \left\{ \sum_{k_1} \sum_{l_1} \alpha_{k_1 l_1} h_{k_1}(x_i) h_{l_1}(y_j) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{k_2} \sum_{l_2} \beta_{k_2 l_2} h_{k_2}(x_i) h_{l_2}(y_j) \right\} = \\
 &= \sum_{k_1} \sum_{l_1} \alpha_{k_1 l_1} \sum_{k_2} \sum_{l_2} \beta_{k_2 l_2} \{h_{k_1}(x_i) h_{k_2}(x_i)\} \cdot \{h_{l_1}(y_j) h_{l_2}(y_j)\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Учитывая ортонормированность функций, имеем окончательно

$$\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} = \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \beta_{kl}, \quad (42)$$

где  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$  — коэффициенты отображения  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ .

Заметим, что суммы вида (40) встречаются также в задачах линейного программирования. В частности, основная задача линейного программирования становится следующим образом.

Найти  $\max$  ( $\min$ ) целевой функции

$$Z = \sum_i \sum_j p_{ij} x_{ij} \quad (43)$$

при заданных ограничениях

$$\sum_i \sum_j a_{ijk} x_{ij} \geq b_k; \quad x_{ij} \geq 0, \quad (44)$$

где  $k=1, 2, \dots, m$ .

В области отображения эта задача ставится аналогично.

Найти

$$\max Z = \sum_k \sum_l P_{kl} X_{kl} \quad (45)$$

при заданных ограничениях

$$\sum_k \sum_l \alpha_{kl} X_{kl} \leq b_k, \quad (46)$$

$$\sum_k \sum_l \xi_{kl} X_{kl} \geq 0. \quad (47)$$

В настоящей работе мы не ставили целью исследовать решение задачи линейного программирования в преобразованной области, важен сам факт, что задача решается и число технических коэффициентов можно уменьшить, если допустить определенную погрешность. Алгоритм решения основной задачи линейного программирования такой же, как и в обычных координатах. Размерности коэффициентов в области отображения  $\alpha_{kl}$  совпадают с размерностями  $a_{ij}$ . Вектор ограничения ( $b_1, b_2, \dots, b_m$ ) и целевая функция  $Z$  остаются прежними, но добавляются коэффициенты  $\xi_{kl}$  матрицы влияния, имеющей сравнительно простую форму ( $\pm 1$ ).

Обычно в связи с неодинаковыми природными и другими условиями сельскохозяйственные предприятия распределены в области неравномерно. Описанный способ позволяет построить ступенчатые функции, которые с достаточной точностью аппроксимируют закон изменения рассматриваемых производственных параметров в зависимости только от местоположения. Приведенные алгоритмы дают возможность установить корреляционные зависимости между производственными параметрами, что может использоваться в планировании и статистической обработке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Обработка изображений и цифровая фильтрация. / Под ред. Т. Хуанга. М.: Мир, 1979, с. 31—80.
2. Andreus H. C.—Proc. IEEE, 1969, vol. 57, p. 58.—3. Wintz P. A.—IEEE, 1972, vol. 60, p. 809.

*Статья поступила 6 апреля 1981 г.*

#### SUMMARY

Problems of compression, storage and utilization of big masses of numbers, which may be economic, technical, biological, or coefficients of any other kind defining agricultural production in big areas, are discussed. Compression is based on correlation between coefficients in various points of the area and on the application of fast Walsh-Hadamard transformation.