# МЕТОДИКА

Известия ТСХА, выпуск 1,1987 год

УДК 519.863:636.084

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОСТА ЖИВОЙ МАССЫ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЖИВОТНЫХ И ОПТИМИЗАЦИЯ ИХ РАЦИОНОВ

**А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Г. В. ПОПОВА**

**(Кафедра высшей математики)**

В работе представлены уравнения для расчета прироста живой массы сельскохозяйственных животных в зависимости от времени откорма. Эти уравнения являются основанием для математического моделирования прироста массы. Рассмотрены вопросы оптимизации кормовых рационов с учетом оплаты корма приростом живой массы.

Изучение закономерностей изменения массы сельскохозяйственных животных в зависимости от времени их роста (периода откорма) имеет большое прикладное значение для определения оптимальных сроков откорма животных. При получении таких зависимостей наиболее общей постановкой задачи может быть математическое моделирование процесса роста животных за достаточно малый промежуток времени с последующим интегрированием за весь период откорма. Разработка такой схемы связана с составлением и последующим интегрированием дифференциальных уравнений роста животных, при решении которых представляется возможность определить вид аналитической зависимости.

Прирост массы $\Delta m$ имеет различные значения в зависимости от времени роста животных и соответствующей их массы, т. е. для некоторого момента времени $t$ $\Delta m = f(m)$. Здесь функция $f$ определяется путем выравнивания опытных данных. Если же необходимо определить прирост массы животных не в данный момент $t$, а за некоторый период [$t$; $t+\Delta t$], то

$$\Delta m = f(m)\Delta t. \qquad (1).$$

Причем зависимость (1) можно считать линейной относительно $\Delta t$, так как значение $\Delta t$ мало. Заменяя $\Delta t$ через $\Delta t$, а $\Delta m$ в силу малости $\Delta t$ через $\Delta t$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{f(m)} = dt. \qquad (2)$$

Интегрируя уравнение при некотором начальном условии $t = t_0$, $m = m_0$, получаем зависимость кривой роста в виде

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{f(m)} = t - t_0. \qquad (3)$$

Для выявления вида зависимости $f(m)$ обратимся к опытным данным. На свиноводческом комплексе «Кузнецовский» совхоза-комбината имени 50-летия СССР Московской области откорм молодняка свине! (54—108 тыс. гол. в год) ведется по следующей схеме [2]:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст, дн. | 111 | 123 | 135 | 147 | 159 | 171 | 183 | 195 | 207 | 219 |
| Живая масса, кг | 41 | 48 | 56 | 63 | 71 | 78 | 86 | 94 | 102 | 109 |
| Среднесуточный прирост массы, г | 575 | 591 | 608 | 620 | 629 | 645 | 658 | 675 | 695 | 700 |

Обработка этих данных по методу наименьших квадратов позволила получить зависимость между приростом массы животных $\Delta m$ (в начале рассматриваемого 12-дневного периода, $\Delta t$) и имеющейся массой $m$ в виде

$$\Delta_0 m = f(m) = 0,261 m^{0,21}. \qquad (4)$$

При определении прироста массы за весь период откорма $\Delta t$ зависимость будет иметь вид

$$\Delta m = \Delta_0 m \cdot \Delta t = 0,261 m^{0,21} \Delta t.$$

Заменяя $t$ через $\Delta t$ и $\Delta m$ (ввиду малости $\Delta t$ через $\Delta m$, получаем дифференциальное уравнение

$$dm = 0,261 m^{0,21} dt, \qquad (5)$$

интегрируя которое, имеем

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m^{0,21}} = 0,261\,(t - t_0), \qquad (6)$$

где $m_0$ — масса животных при постановке на откорм. Вычисление интеграла дает уравнение кривой роста в виде

$$m = \left[0,79 \cdot 0,261\left(t - t_0\right) + m_0^{0,79}\right]^{\frac{1}{0,79}} = [0,206\,(t - t_0) + 18,8]^{1,266}.$$

Подставляя численные значения $m_0=41$, $t_0=111$, получаем

$$m = (0,206t - 3,98)^{1,266}. \qquad (7)$$

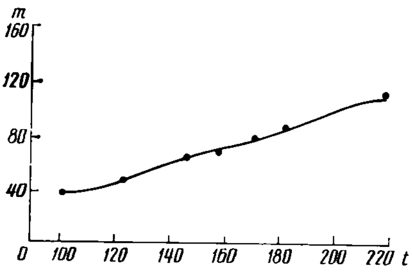


Рис. 1. Теоретическая кривая изменения массы животных (точки — по данным комплекса «Кузнецовский»),

Таблица 2

**Содержание питательных веществ в кормах**

| Питательные вещества | Корм $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_n$ | Потребность в питательных веществах |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | $\beta_{11}$ | $\beta_{12}$ | ... | $\beta_{1n}$ | От $d_{11}$ до $d_{12}$ |
| $B_2$ | $\beta_{21}$ | $\beta_{22}$ | ... | $\beta_{2n}$ | От $d_{21}$ до $d_{22}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_m$ | $\beta_{m1}$ | $\beta_{m2}$ | ... | $\beta_{mn}$ | От $d_{m1}$ до $d_{m2}$ |

Таким образом, как видно из (7), зависимость между массой животного и временем его роста носит нелинейный характер (рис. 1).

В данном случае уровень кормления был задан и определялся условиями производства на свиноводческих комплексах промышленного типа. Рассмотрим вопрос о влиянии уровня кормления животных на прирост массы в связи с производственной необходимостью получения наибольшей окупаемости корма.

Существующие методы расчета оптимальных рационов для сельскохозяйственных животных основаны на требовании минимизации себестоимости кормовой смеси [I, 2, 4]. Однако при этом не исключено, что рацион, обеспечивающий минимальную себестоимость, не позволяет получить достаточно значительные приросты массы животных. Поэтому построим экономико-математическую модель оптимального рациона не по минимуму критерия себестоимости кормовой смеси, а по максимуму критерия оплаты корма приростом живой массы.

Пусть имеем $n$ кормов (табл. 1). Кроме того, в наличии имеются данные о содержании в 1 кг корма питательных веществ, а также данные о потребности в них животных (табл. 2). Исходя из коэффициентов $\beta_{ik}$ где $i$ = 1,2,...m, а $к$ = 1,2,... n, можно судить о содержании j-го питательного вещества в 1 кг $к$-го вида корма.

Ограничения задачи следующие: по питательным веществам —

$$d_{i1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} x_k \leqslant d_{i2}, \qquad (8)$$

где ( = 1,2, ...m; по наличию кормов —

$$x_к \leqslant D_к, \qquad (9)$$

Таблица 1

**Характеристика рациона животных**

| Показатель | Корм $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Количество корма, кг | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| Цена 1 кг корма, коп. | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | ... | $\alpha_n$ |
| Количество корма в наличии, кг | $Д_1$ | $Д_2$ | ... | $Д_n$ |

где $к$—1,2, ...п. Кроме того, имеются обычные ограничения

$$x_к \geqslant 0, \quad к = 1,2,...n. \qquad (10).$$

Таким образом, получаем $2m+n$ ограничений.

Далее составим выражение для критерия оптимизации, выражающего оплату корма приростом массы. Для стоимости кормовой смеси $З$, согласно табл. 1, имеем

$$З = \sum_{к=1}^{n} \alpha_k x_k. \qquad (11)$$

Зависимость между приростом массы животных Я и количеством кормов может быть выравнена при помощи метода наименьших квадратов линейной зависимостью вида

$$П = m_0 + \sum_{к=1}^{n} m_k x_k, \qquad (12)$$

где $m_к$ — известные коэффициенты. Тогда для минимизации критерия $S$, выражающего затраты корма на единицу прироста массы, согласно (11) и (12), имеем

$$S = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{m_0 + \sum_{к=1}^{n} m_k x_k} \to \min. \qquad (13)$$

Возможны также и другие постановки задачи. Так, пусть приросты живой массы выражаются нелинейной зависимостью между этим показателем и количеством затрачиваемых кормов $fI = f(x_1, x_2,...x_n)$, где $x_1, x_2, ...x_n$ — соответственно количество кормов. При этом

$$З = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

В общепринятой схеме, в которой ставится задача выбора значений $x_1$, $x_2$, —$x_n$, минимизирующих $З$ при заданных ограничениях по обеспечению животных питательными веществами, как уже указывалось выше, приросты массы могут оказаться недостаточно высокими. Поэтому можно предложить следующую схему задачи. Также требуется выполнение условия

$$З = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \to \min, \qquad (14)$$

но прирост массы $П$ должен иметь заданное значение $П_0$, т. е.

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = П_0. \qquad (15)$$

Данная задача — на условный экстремум, необходимыми условиями которого является обращение в ноль частных производных от функции Лагранжа.

$$\Phi(x_1, x_2, ...x_n) = З + \lambda f = \alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + ... + \alpha_n \times x_n + \lambda f(x_1, x_2, ...x_n).$$

Следовательно, получаем систему $n$ уравнений с (я+1) неизвестными

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \alpha_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \alpha_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad (17)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \alpha_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

К системе (17) надо присоединить еще условие (15). Из (15) и (17) определяются все неизвестные $x_1$, $x_2$, ...$x_n$, λ Если зависимость между приростом массы и количеством кормов имеет линейный характер $П = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n$, то задачу можно свести к схеме линейного программирования, т. е.

$$З = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \to \min$$

при ограничении J $П = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n \geqslant П_0$, где $П_0$ — плановый прирост, а также при ограничениях по обеспечению животных питательными веществами.

В случае, когда используются два вида корма, задачу можно решить проще. Рассмотрим в качестве примера задачу по оптимизации кормового рациона, исходя из данных комплекса имени 60-летия СССР Ярославской области, где для откорма свиней применяются комбикорма *(к)* и пищевые отходы (л). Запишем уравнение в виде

$$З = 14к + 2{,}2п. \quad (18)$$

При этом цена 1 кг комбикорма составляет 14 коп. и затраты на получение и переработку 1 кг корма из пищевых отходов — 2,2 коп.

В результате обработки опытных данных методом наименьших квадратов получена зависимость приростов *П* (в г) от количества кормов (в кг):

$$П = 158{,}6к + 17{,}9п + 84. \quad (15а)$$

Ограничения по содержанию в корме кормовых единиц и переваримого протеина записываются в виде [1]

$$к + 0{,}23п \geqslant 2{,}3, \quad (19)$$
$$0{,}125к + 0{,}017п \geqslant 0{,}260. \quad (20)$$

Введем также ограничения по соотношению между двумя видами кормов

$$0{,}7к \leqslant п \leqslant 1{,}9к. \quad (21а, б)$$

Правая часть ограничения (а) обусловлена зоотехническим требованием, в соответствии с которым доля пищевых отходов в рационе по питательности не должна превышать 30% [1, 3], левая (б) — дефицитом комбикормов, она определяется сложившимися в хозяйстве соотношениями между данными видами кормов.

Для сопоставления полученных результатов решим задачу сначала по условию минимума стоимости кормовой смеси, т. е. согласно (18)

$$З = 14к + 2{,}2п \to \min. \quad (18а)$$

Для определения искомых значений имеем систему 2 уравнений

$$\begin{cases} n = 0{,}7k, \\ k + 0{,}23n = 2{,}3, \end{cases} \quad (22)$$

при решении которой находим

$$к = 1{,}981,\ п = 1{,}387 \text{ кг}. \quad (22а)$$

Согласно (22а) и (18) стоимость рациона составит

$$З = 14 \cdot 1{,}981 + 2{,}2 \cdot 1{,}39 = 30{,}8 \text{ коп}.$$

Подставляя найденные значения (22а) в формулу (18), получаем

$$П = 158{,}6 \cdot 1{,}981 + 17{,}9 \cdot 1{,}387 + 84 = 423 \text{ (г)}.$$

Таким образом, при решении задачи по минимуму стоимости кормов обеспечиваются наименьшие затраты, но они соответствуют недостаточно высоким приростам массы животных. Это обстоятельство объясняется тем, что при решении задачи по данному критерию приросты живой массы вообще не учитывались. Поэтому введем ограничение по приросту живой массы П>500 (г), что согласно формуле (15а) соответствует ограничению

$$158{,}6к + 17{,}9п \geqslant 416. \quad (23)$$

Итак, кроме ограничений (19), (20) и (21), вводится еще ограничение (23). Соответствующий многоугольник и прямая затрат (18) даны на рис. 2. В этом случае искомому решению соответствует точка ***В***, полученная при пересечении прямых (21б) и (23), т. е. координаты точки ***В*** находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} n = 0{,}7k, \\ 416 = 158{,}6k + 17{,}9n, \end{cases}$$

откуда $к$=2,43, л =1,7 (кг).

Тогда согласно формуле (18) З=14Х Х 2,43+2,2-1,7=37,8 коп. При этом прирост живой массы, исходя из формулы (15а), будет составлять 500 г, т. е. возрастет на 77 г по сравнению с уровнем, рассчитанным для минимальной себестоимости рациона. При цене 1 кг свинины 2,15 руб. дополнительный доход за счет увеличе-

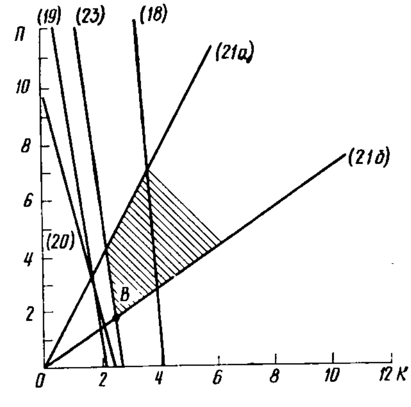


Рис. *2.* Многоугольник ограничений, построенный с учетом заданного уровня приростов.

ния прироста массы составит 2,15-0,077 = =0,166 руб., или 16,6 коп., в то время как затраты на корм увеличатся лишь на 7 коп., т. е. при откорме каждого животного за сутки чистый доход составит 9,6 коп.

## ЛИТЕРАТУРА.

**1.** Калашников А. П., Клейменов Н. И., Баканов В. Н. и др. Нормы и рационы кормления с.-х. животных. Справочное пособие. — М.: Агропромиздат, 1985. — **2.** Козловский В. Г. Технология промышленного производства свинины. — М.: Россельхозиздат, 1984. — **3.** Мысик А. Т., Нетеса А. И., Козловский В. Г. и др. Свиноводство. — М.: Колос, 1984. — **4.** Пастухов А. К. Актуальные проблемы организации производства свинины на промышленной основе. — М.: ТСХА, 1982.

***Статья поступила 26 мая 1986 г.***

## SUMMARY

Equations for calculating the increment of farm animals' live weight in relation to the time of fattening are deduced. These equations make up the ground for mathematical simulation of weight increment.