Известия ТСХА, выпуск 6, 1985 год

УДК 330.115:631.816.1

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМ УДОБРЕНИЙ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Е. Л. МАТВЕЕНКО

(Кафедра высшей математики)

При расчетах оптимальной нормы удобрений целесообразно использовать экономико-математические методы, которые позволяют учитывать наряду с агротехническими и экономические требования [4]. Это определяет важность математического описания зависимостей урожайности от норм удобрений и других факторов, постановки соответствующих математических задач и их решения.

Возможность применения методов экстремума в указанных целях изучалась нами на материалах, полученных в полевых опытах (ВИУА), проводимых в Суздальском районе Владимирской области, и в производственных (ЦИНАО), которые проводились в Калининской области. Данные были взяты в картотеке Географической сети полевых опытов ВИУА, а также в картотеке производственных опытов ЦИНАО.

В качестве критерия экономической эффективности удобрений используются минимум затрат, связанных с использованием удобрений при получении заданного урожая, и максимум чистого дохода от применения удобрений.

При программировании урожаев [7] решается одна из двух задач: 1 — получение заданного урожая при минимальных затратах; 2 — получение максимального урожая [3].

В общем случае зависимость урожайности y от азотных, фосфорных и калийных удобрений выражается формулой $y=f(\mathrm{N, P, K})$, при этом остальные факторы фиксируются на определенном уровне.

Рассмотрим задачу о программировании урожаев на заданном уровне y_0:

$$y=f(\mathrm{N, P, K})=y_0 \qquad (1)$$

при условии минимизации затрат на удобрения

$$Q=a_\mathrm{N}\mathrm{N}+a_\mathrm{P}\mathrm{P}+a_\mathrm{K}\mathrm{K}\to \min \qquad (2)$$

где a_N, a_P, a_K — затраты, связанные с использованием удобрений соответствующего вида и включающие цену удобрения, затраты на его применение и уборку дополнительно полученной продукции. В правой части формулы (2) может быть постоянное слагаемое Q_0, однако при минимизации оно несущественно.

Получается задача на условный экстремум функции трех переменных. Одну из них К выразим через N и Р и сведем задачу к обычному экстремуму функции двух переменных, тем более, что при этом упростится проверка достаточного условия экстремума. В случае, когда функция f (N, P, K) имеет линейный вид, задача сведется уже к схеме линейного программирования, при наличии двух переменных она легко решается графически. Этот случай мы рассмотрим далее.

Пусть левая часть зависимости (1) имеет нелинейный характер. Одну из переменных, например К, выразим через N и Р:

$$\mathrm{K}=\varphi(\mathrm{N, P}, y_0),$$

где φ — заданная функция. Подставляя это значение К в (2), получаем

$$Q=a_\mathrm{N}\mathrm{N}+a_\mathrm{P}\mathrm{P}+a_\mathrm{K}\varphi(\mathrm{N, P}, y_0)\to \min.$$

Необходимые условия минимума дают 2 уравнения для определения N и Р:

$$\begin{aligned}\partial\varphi/\partial\mathrm{N}&=-a_\mathrm{N}/a_\mathrm{K};\\ \partial\varphi/\partial\mathrm{P}&=-a_\mathrm{P}/a_\mathrm{K}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Достаточный признак минимума приводит к неравенствам

$$\partial^2\varphi/\partial\mathrm{N}^2\cdot\partial^2\varphi/\partial\mathrm{P}^2-(\partial^2\varphi/\partial\mathrm{N}\cdot\partial\mathrm{P})^2>0 \qquad (4)$$

$$\text{при } \partial^2\varphi/\partial\mathrm{N}^2>0 \text{ и } \partial^2\varphi/\partial\mathrm{P}^2>0. \qquad (5)$$

Рассмотрим в качестве примера зависимость прибавки урожайности ячменя y^n от норм минеральных удобрений (прибавка в кг/га, удобрения в кг д. в. на 1 га), полученную путем обработки данных полевых опытов ВИУА за 1977—1981 гг.

$$y^\text{п}=3{,}895\mathrm{N}^{0{,}657}\mathrm{P}^{0{,}419}\mathrm{K}^{0{,}673};\ R=0{,}890,$$

где R — коэффициент множественной корреляции.

Условие минимизации затрат на применение удобрений (Q) записывается в виде:

$$Q=0{,}272\mathrm{N}+0{,}226\mathrm{P}+0{,}062\mathrm{K}\to\min.$$

Проведем расчет для уровня программируемой прибавки урожайности $y_0^\text{п}=3000$ кг/га и найдем норму внесения азотных, фосфорных и калийных удобрений.

$$3{,}895\mathrm{N}^{0{,}657}\mathrm{P}^{0{,}419}\mathrm{K}^{0{,}673}=3000.$$

Выразим К через переменные N и Р и, подставляя значение К в выражение для Q, найдем минимум Q, приравняв к нулю частные производные:

$$Q=0{,}272\mathrm{N}+0{,}226\mathrm{P}+1207{,}535\mathrm{N}^{-0{,}976}\mathrm{P}^{-0{,}623};$$

$$\partial Q/\partial\mathrm{N}=0{,}272-1178{,}554\mathrm{N}^{-1{,}976}\mathrm{P}^{-0{,}623}=0;$$

$$\partial Q/\partial P = 0{,}226 -$$
$$- 752{,}294N^{-0{,}976}P^{-1{,}623} = 0.$$

Решая систему полученных уравнений, находим N=55,83 кг/га и P=25,11 кг/га. Подставляя эти значения в выражения для K, получим K=51,56 кг/га. Достаточный признак минимума для этих значений N, P, K выполняется, и минимум затрат на использование минеральных удобрений составляет 24,06 руб/га.

Нами были рассмотрены данные опытов, проводимых на хорошо окультуренной почве. Колебания урожайности составили от 19 ц/га в контроле до 55 ц/га при различных нормах минеральных удобрений. Заданная урожайность (49 ц/га) достигалась при внесении 60N40P40K. Эти данные вполне согласуются с полученными нами результатами.

Аналогично можно провести анализ и любой другой нелинейной зависимости урожайности от норм удобрений.

Для тех случаев, когда зависимость урожайности от норм удобрений можно считать линейной, задача может быть сведена к схеме линейного программирования. Линейная зависимость урожайности от норм азотных, фосфорных и калийных удобрений может быть записана в виде

$$y=aN+bP+cK+y_0, \qquad (6)$$

где y_0 — урожайность, получаемая без применения удобрений.

Затраты Q на применение удобрений можно аналогично (2) записать следующим образом:

$$Q=Q_0+\alpha N+\beta P+\gamma K\to\min, \qquad (7)$$

где α, β, γ — соответственно затраты на применение единицы удобрений; Q_0 — начальные затраты.

Нам требуется получить заданную урожайность y_* при минимальных затратах на удобрения. Так как постоянные затраты Q_0 не влияют на нахождение экстремума, то

$$\alpha N+\beta P+\gamma K\to\min, \qquad (8)$$

при условии

$$aN+bP+cK=y_*-y_0, \qquad (9)$$

т. е. получаем задачу линейного программирования.

Как известно, в случае двух переменных решение задачи упрощается, поскольку ее можно решать графически. В нашем случае (8) содержит три независимых переменных, однако одну из них, например, K, можно выразить через две другие из (9):

$$K=(y_*-y_0-aN-bP)/c. \qquad (10)$$

Подставляя найденное значение K в (8), получаем

$$mN+nP\to\min, \qquad (11)$$

где $m=\alpha-a\gamma/c$; $n=\beta-b\gamma/c$.

Запишем теперь ограничения задачи. Одна из систем ограничений связана с тем, что переменные N, P и K не могут быть отрицательны (обычно для схемы линейного программирования), и с тем, что линейный закон изменения урожайности от норм удобрений справедлив только до некоторых значений N_1, P_1 и K_1, т. е. имеем

$$0\leqslant N\leqslant N_1, \qquad (12)$$
$$0\leqslant P\leqslant P_1, \qquad (13)$$
$$0\leqslant K\leqslant K_1. \qquad (14)$$

Однако в силу того, что мы из условия (11) исключили переменную K, ее необходимо исключить и из условия (14), выразив ее через N и P, как в (10):

$$0\leqslant(y_*-y_0-aN-bP)/c\leqslant K_1, \qquad (15)$$

или иначе

$$y_*-y_0-cK_1\leqslant aN+bP\leqslant y_*-y_0. \qquad (16)$$

Сюда можно присоединить еще ограничение по соотношению отдельных видов удобрений, например: $P\geqslant dN$ или $K\geqslant lN$, где d и l — некоторые заданные положительные коэффициенты.

Аналогично решается задача по критерию себестоимости продукции. В этом случае задача сводится к схеме дробно-линейного программирования. Приведем пример решения задачи для Владимирской области по данным полевых опытов ВИУА, проведенных в 1977—1981 гг. Нами была получена зависимость урожайности ячменя от почвенно-климатических факторов и норм удобрений:

$$y=-43\,713{,}26+8{,}17N+3{,}59P-0{,}93K+$$
$$+5930{,}01pH+491{,}44P_п+1932{,}93Г+82{,}23t-$$
$$-7{,}85\cdot OC;\ R=0{,}889,$$

где y — урожайность ячменя, кг/га; N, P, K — соответственно нормы минеральных удобрений, кг д. в. на 1 га; pH — реакция почвенной среды; $P_п$ и $Г$ — соответственно содержание в почве подвижного фосфора, мг·экв/кг, и гумуса, %; t — средняя температура июня — июля, °C; OC — сумма осадков в июне — июле, мм.

Получение функции в таком виде связано с тем, что урожайность во многом определяется почвенно-климатическими факторами, тогда как прибавка урожайности в основном зависит от норм удобрений. Для того чтобы получить зависимость урожайности только от норм удобрений зафиксируем в данном уравнении регрессии почвенные и климатические факторы на следующем уровне.

Пусть pH=5,0; $P_п$=18,2; Г=3,72; t=16,7; OC=144,0. Тогда y=2315,6+8,2N+3,6P—0,9K. Пусть отношение N : K должно быть равным 1 : 0,9. Тогда K=0,9N, а y=2315,6+ +7,4N+3,6P. Затраты на применение удобрений составят:

$$Q=0{,}272N+0{,}137P.$$

Коэффициенты при N и P рассчитаны с учетом цены на удобрения. Зададим уровень программируемой урожайности y_0= =4000 кг/га, тогда 2315,6+7,4N+3,6P= =4000, или 7,4N+3,6P=1684,4.

Решим задачу графически, учитывая, что $0\leqslant N\leqslant 200$; $0\leqslant P\leqslant 200$; $0\leqslant K\leqslant 200$ и допустимые нормы фосфорных удобрений должны находиться в пределах $0{,}8N\leqslant P\leqslant 1{,}2N$.

Минимум Q будет достигнут в точке A, которая является пересечением прямых (рис. 1).

$$\begin{cases} 7{,}4N_* + 3{,}6P_* = 1684{,}4 \\ P_* = 0{,}8N_*, \end{cases}$$

откуда N_*=163,9 кг/га; P_*=131,1 кг/га. Норму внесения калийных удобрений найдем из уравнения K=0,9N, т. е. K_*= =147,5 кг/га.

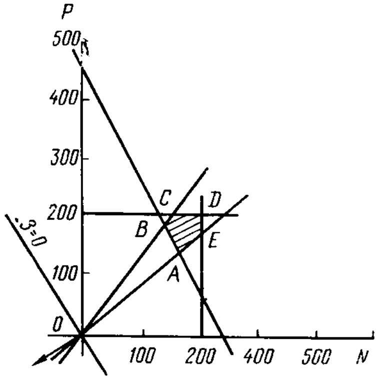

Рис. 1. Графическое решение задачи оптимального сочетания удобрений при условии минимума затрат на их применение.

Сравним полученное решение с результатами полевых опытов. Запрограммированная урожайность 40 ц/га в заданных почвенно-климатических условиях соответствовала нормам внесения удобрений 150N120P150K, что близко к найденным значениям N_*, P_* и K_*. Это подтверждает возможность использования описанного метода для оптимизации как норм удобрений, так и затрат на их применение с целью повышения экономической эффективности использования удобрений.

Рассмотрим далее в качестве примера получения максимума урожайности функцию прибавки урожая озимой ржи, полученную нами на основании обработки данных ВИУА. Опыты проводились в 1982 г. в Суздальском районе Владимирской области Государственной Владимирской областной опытной сельскохозяйственной станцией. Была получена следующая зависимость прибавки урожайности от удобрений ($y^п$, кг/га):

$$y^п = 94{,}36 + 9{,}91N + 8{,}33P - 0{,}09K - 0{,}06N^2 - 0{,}05P^2 + 0{,}01K^2; \quad R = 0{,}875. \qquad (17)$$

Зададим для калийных удобрений соотношение, связывающее их с азотными: $K = \alpha N$, где α — некоторый коэффициент пропорциональности. Подставим выражение для K в (17) и получим

$$y^п = 94{,}36 + (9{,}91 - 0{,}09\alpha)N + 8{,}33P - (0{,}06 - 0{,}01\alpha^2)^2 - 0{,}05P^2.$$

Для частных производных имеем

$$\partial y/\partial N = (9{,}91 - 0{,}09\alpha) - 2(0{,}06 - 0{,}01\alpha^2)N = 0,$$

$$\partial y/\partial P = 8{,}33 - 0{,}05 \cdot 2P = 0.$$

Отсюда

$$N = (9{,}91 - 0{,}09\alpha)/2(0{,}06 - 0{,}01\alpha^2);$$
$$P = 83{,}3 \text{ кг/га}.$$

Достаточный признак максимума выполняется, так как $\alpha^2 < 6$.

Зададим численное значение α. Например, для серых лесных почв Владимирской области $\alpha = 0{,}6$. В этом случае норма азотных удобрений составит 87,4 кг, калийных — 52,4 кг д. в. на 1 га, а максимальная прибавка урожайности $y^п_*$, соответствующая этим нормам, — 871,9 кг/га.

Рассмотрим далее влияние густоты посева на урожайность y. Пусть $\eta = l/S$ — густота посева, где l — количество зерен на площади S. Имея таблицу опытных данных для зависимости y от η

$$\frac{\eta \; \eta_1 \; \eta_2 \ldots \eta_n}{y \; y_1 \; y_2 \quad y_n},$$

можно выравнять их по методу наименьших квадратов зависимостью вида

$$y = A\eta^2 + B\eta + C, \qquad (18)$$

где $A<0$, $B>0$, т. е. график имеет вид параболы (рис. 2). Он согласуется с кривой средних урожаев сорта Мироновская 808 [5, с. 141].

Здесь значению η_* соответствует максимальная урожайность y_{max}. Это значение находим из необходимого условия экстремума

$$\eta_* = -B/2A = B/2|A|. \qquad (19)$$

Для y_{max} из (18) и (19) имеем

$$y_{max} = C + B^2/4|A|. \qquad (20)$$

Вблизи точки максимума урожайность растет медленно, так как производная функции y' близка к 0. Следовательно, затраты посевного материала мало окупаются урожаем. Поэтому целесообразно провести расчет по максимуму критерия чистого дохода $П$:

$$П = My - a\eta - B \to \max. \qquad (21)$$

Здесь M — закупочная цена зерна; a — затраты на посевной материал и посев; B — прочие затраты, которые в первом приближении можно считать постоянными. Необходимому условию максимума чистого дохода $П' = My' - a = 0$ соответствует некоторая точка η_0, для которой

$$y' = a/M. \qquad (22)$$

Заметим, что в прочие расходы можно включить также их часть, пропорциональную урожайности y, т. е. учесть дополнительные расходы, связанные с уборкой,

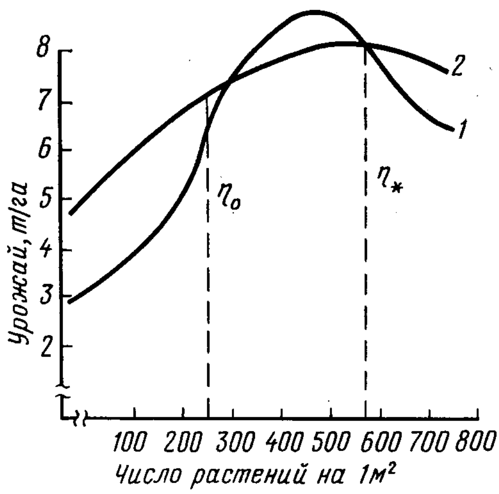

Рис. 2. Кривая средних урожаев сорта Мироновская 808.

1 — фактический уровень; *2* — выравнивание по функции (20).

07

транспортировкой и т. п. прибавки продукции. В этом случае

$$П=My-a\eta-B_1y-B_0\to\max.$$

Получаем условие для определения максимума чистого дохода

$$y'=a/(M-B_1). \qquad (23)$$

Условие (22) в силу (18) записывается так:

$$2A\eta+B=a/M.$$

Отсюда

$$\eta_0=-B/2A+a/2AM=B/2|A|-a/2|A|M=$$
$$=\eta_*-a/2|A|M. \qquad (24)$$

Соответствующее значение урожайности y_0 равняется

$$y_0=y_*-(a/M)^2/4|A|. \qquad (25)$$

Таким образом, на основе (24), (19) и (25) получаем, что при уменьшении густоты посева на величину $b=a/2|A|M$ урожай снижается на величину Ab^2.

Проведем расчет для данных, полученных в результате исследований, проведенных в ЧССР (рис. 2). Теоретическое распределение зависимости урожайности (в т/га) от числа сотен растений на 1 м² можно выразить зависимостью

$$y=-0{,}09\eta^2+1{,}05\eta+3{,}7.$$

Из (19) и (20) находим $y_{max}=6{,}76$ т/га, которой соответствует норма высева $\eta_*=5{,}80$ сотен растений на 1м². Оптимальное количество растений η_0 найдем из соотношения (24): оно составит 2,30 сотен растений на 1 м² Урожайность y_0 при этой норме высева будет равна 5,64 т/га.

Перейдем далее к учету совместного влияния удобрений и густоты посева на урожайность. Пусть количество вносимых удобрений X, густота посева η. Тогда урожайность можно выразить квадратичной зависимостью в виде

$$y=A\eta^2+B\eta+DX^2+EX+F\eta X+G. \qquad (26)$$

Необходимые условия максимума дают

$$\begin{aligned}2A\eta+FX&=-B,\\ F\eta+2DX&=-E.\end{aligned} \qquad (27)$$

Применяя достаточный признак максимума

$$\partial^2y/\partial\eta^2\cdot\partial^2y/\partial X^2-(\partial^2y/\partial X\cdot\partial\eta)^2>0$$

(причем $\partial^2y/\partial\eta^2$ и $\partial^2y/\partial X^2<0$), на основании (26) получаем

$$4AD-F^2>0, \qquad (28)$$
$$(29)$$

где A и $D<0$. Если выполняются условия (28) и (29), система (27) разрешима, так как определитель системы Δ не равен 0.

Решая систему уравнений (27), находим значения η и X.

Густоту посева и норму азотных удобрений, обеспечивающих максимальную урожайность кукурузы, найдем из описанной в [6, с. 508] зависимости

$$y=27{,}6+0{,}2051X+0{,}3553\eta-0{,}000641X^2-$$
$$0{,}0013\eta^2+0{,}0066X\eta;\ R=0{,}6125.$$

Здесь y — урожайность, буш/акр; X — количество азотных удобрений, фунт/акр; η — густота посева, сотни растений на 1 акр.

Мы видим, что условия (28) и (29) выполняются. Решая систему уравнений, находим $\eta=19\,873$ сотен растений на 1 акр; $X=256{,}88$ фунта азотных удобрений на 1 акр. Соответствующая урожайность $y_*=89{,}25$ буш/акр.

Приведем далее аналогичную задачу на получение максимальной урожайности в зависимости от количества удобрений при заданной густоте посева в производственных опытах ЦИНАО, проведенных с ячменем в 1974—1981 гг. в Калининской области. По этим данным нами была построена функция

$$y=1877{,}3+284{,}4\eta^2-0{,}9X^2-1458{,}4\eta+$$
$$+0{,}1X+1{,}7\eta X;\ R=0{,}644,$$

где y — урожайность ячменя, ц/га; η — норма высева семян, ц/га; X — сумма действующего вещества полного минерального удобрения, ц/га.

Если задаться нормой высева $\eta=\eta_0$, то можно установить связь между количеством удобрений X, обеспечивающим максимальный урожай, и нормой высева η_0. Получим

$$y=(1877{,}3+284{,}4\,\eta_0^2-1458{,}4\eta_0)+$$
$$+(1{,}7\,\eta_0+0{,}1)\,X-0{,}9\,X^2.$$

Необходимое условие максимума урожая дает

$$y'=1{,}7\,\eta_0+0{,}1-1{,}8\,X=0.$$

Отсюда $X_*=0{,}94\,\eta_0+0{,}06$.

Найдем η_0 по типовым перспективным технологическим картам возделывания сельскохозяйственных культур в Нечерноземной зоне РСФСР, которые рекомендуют норму высева ячменя 2,7 ц/га. Для этой нормы высева

$$X_*=261 \text{ кг д.в/га},\ y_*=19{,}01 \text{ ц/га}.$$

В производственных опытах ЦИНАО урожайность 19 ц/га была получена за счет внесения 200—300 кг д.в. минеральных удобрений на 1 га при норме высева семян 2,7 ц/га.

Покажем, что встречающиеся на практике основные виды зависимостей урожайности от азотных, фосфорных и калийных удобрений могут быть получены при помощи системы дифференциальных уравнений.

Первому виду дифференциальных уравнений соответствует система

$$\partial y/\partial N=\alpha(y_м-y), \qquad (30)$$
$$\partial y/\partial P=\beta(y_м-y), \qquad (31)$$
$$\partial y/\partial K=\gamma(y_м-y), \qquad (32)$$

где α, β, γ — некоторые постоянные коэффициенты, $y_м$ — наибольшее значение урожайности. Система (30)—(32) отвечает тому весьма распространенному на практике случаю, когда скорости изменения урожайности в зависимости от изменения норм удобрений убывают с ее ростом, а при достижении уровня, близкого к наибольшему, становятся весьма малыми.

Интегрируя систему (30) — (32), находим

$$y_м-y=Ce^{-(\alpha N+\beta P+\gamma K)}.$$

Для определения константы интегрирования C имеем начальное условие

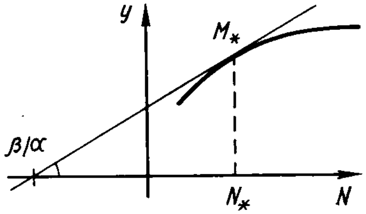

Рис. 3. Графический способ определения нормы азотных удобрений.

$$y=y_0 \text{ при } N=P=K=O, \qquad (33)$$

которое дает $C=y_м-y_0$. Окончательно получаем зависимость урожайности от норм удобрений в виде

$$Z=\alpha N+\beta P+\gamma K,$$

где $Z=\ln[y_м-y_0)/(y_м-y)]$.

Система уравнений (30)—(32) соответствует монотонному возрастанию урожайности. Однако при чрезмерном применении удобрений того или иного вида наблюдается даже ее снижение. Урожайность в этом случае имеет максимум и, следовательно, частные производные $\partial y/\partial N$, $\partial y/\partial P$ и $\partial y/\partial K$ при переходе через точку максимума обращаются в ноль и должны менять знак. Данной ситуации соответствует система дифференциальных уравнений

$$\partial y/\partial \mathrm{N}=l(\mathrm{N}_{max}-\mathrm{N}), \qquad (34)$$

$$\partial y/\partial \mathrm{P}=m(\mathrm{P}_{max}-\mathrm{P}), \qquad (35)$$

$$\partial y/\partial \mathrm{K}=n(\mathrm{K}_{max}-\mathrm{K}). \qquad (36)$$

Здесь N_{max}, P_{max}, K_{max} — значения норм удобрений при максимальной урожайности y_{max}. Для системы (34)—(36) находить нормы удобрений целесообразно с использованием критерия максимума чистого дохода $П$:

$$П = My - a_\mathrm{N}\mathrm{N} - a_\mathrm{P}\mathrm{P} - a_\mathrm{K}\mathrm{K} - B,$$

где a_N, a_P, a_K — затраты на единицу соответствующих удобрений; B — постоянные затраты, не связанные с применением удобрений; M — закупочная цена единицы произведенной продукции.

Необходимые условия максимума дают

$$\partial y/\partial \mathrm{N} = l\,(\mathrm{N}_{max} - \mathrm{N}) = a_\mathrm{N}/M,$$

$$\partial y/\partial \mathrm{P} = m\,(\mathrm{P}_{max} - \mathrm{P}) = a_\mathrm{P}/M,$$

$$\partial y/\partial \mathrm{K} = n\,(\mathrm{K}_{max} - \mathrm{K}) = a_\mathrm{K}/M.$$

Отсюда определяются значения N_*, P_* и K_*.

Следующим типом дифференциальных уравнений для установления связи урожайности с нормами удобрений являются соотношения вида

$$\partial y^п/\partial \mathrm{N}=\alpha y^п/\mathrm{N}, \qquad (37)$$

$$\partial y^п/\partial \mathrm{P}=\beta y^п/\mathrm{P}, \qquad (38)$$

$$y^п/\partial \mathrm{K}=\gamma y^п/\mathrm{K}, \qquad (39)$$

где $y^п$ — прибавка урожая, α, β и $\gamma \geqslant 0$.

Система (37)—(39) соответствует предположению о постоянстве коэффициентов эластичности по каждому из видов удобрений. Интегрируя ее, получаем зависимость типа Кобба — Дугласа, рассмотренную выше, которая описывает монотонное возрастание урожая

$$y = A\mathrm{N}^\alpha \mathrm{P}^\beta \mathrm{K}^\gamma.$$

Выводы

1. Задачи программирования урожая при минимальных затратах на удобрения и задачи получения максимального урожая могут решаться методами математического анализа и линейного программирования. При этом в качестве условия оптимизации можно использовать максимум чистого дохода от применения удобрений или минимум затрат на них.

2. Для случая линейной зависимости урожайности от норм удобрений задача может решаться не только аналитически, но и графическим способом.

3. Получена зависимость, отражающая совместное влияние норм удобрений и густоты посева на урожайность.

4. Теоретические результаты согласуются с данными полевых и производственных опытов, проводимых во Владимирской и Калининской областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод указания по определению эконом. эффективности удобрений и других средств химизации, применяемых в сельск. хоз-ве. М.: Колос, 1979. — 2. Метод. указания по определению эконом. эффективности удобрений в производственных опытах. М.: Колос, 1981. — 3. Файнзильбер А. М. Экономико-математические методы учета влияния удобрений при программировании урожайности сельскохозяйственных культур. — Изв. ТСХА, 1984, вып. 5, с. 180—185. — 4. Фефелов В. П. Определение экономической эффективности удобрений и других средств химизации сельского хозяйства. — Изв. ТСХА, 1983, вып. 3, с. 12—21. — 5. Формирование урожая основных сельскохозяйственных культур. М.: Колос, 1984. — 6. Хеди Э., Дилон Д. Производственные функции в сельск. хоз-ве. М.: Прогресс, 1965. — 7. Шатилов И. С., Чудновский А. Ф. Агрофизические, агрометеорологические и агротехнические основы программирования урожая. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

Статья поступила 21 февраля 1985 г.