

ISBN 978-5-9546-0095-7

О.В. Чеха

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ,
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Учебно-методическое пособие

Москва

ООО «УМЦ «Триада»

2014

УДК 531.25:378.14(076)

ББК 22.21

Ч 56

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «РГАУ – МСХА имени К.А. Тимирязева»

Бабудаев А.Я.

кандидат технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика»
«Университет машиностроения»

Рябов В.Г.

Чеха О.В.

Ч 56 Теоретическая механика. Краткие сведения, задания для контрольной работы с примерами решения задач: учебно-методическое пособие. – М.: ООО «УМЦ «Триада», 2014. – 75 с.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, утвержденным Министерством образования и науки РФ по изучению дисциплины «Теоретическая механика».

Изложены краткие сведения по некоторым темам из разделов «Статика», «Кинематика» и «Динамика. Аналитическая механика», задания для контрольной работы, разноплановые схемы механических систем с подробным пояснением и разбором решения типовых задач, контрольные вопросы по темам для оценки качества освоения разделов, примерные тесты для проверки остаточных знаний по дисциплине, а также пример оформления титульного листа контрольной работы.

Предлагаемое пособие можно рекомендовать для самостоятельной работы бакалавров, магистров и аспирантов основных технических специальностей всех форм образования.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Статика абсолютно твёрдого тела.....	7
1.1. Основные физические величины, применяемые в статике.....	14
1.2. Варианты заданий по теме «Плоская система произвольно расположенных сил».....	15
1.3. Пример решения задачи на тему «Плоская система произвольно расположенных сил».....	22
1.4. Контрольные вопросы.....	25
2. Кинематика точки и простейших движений абсолютно твёрдого тела...26	
2.1. Основные физические величины, применяемые в кинематике.....	32
2.2. Варианты заданий по теме «Кинематика точки».....	32
2.3. Пример решения задачи на тему «Кинематика точки».....	33
2.4. Варианты заданий по теме «Простейшие движения абсолютно твёрдого тела».....	35
2.5. Пример решения задачи на тему «Простейшие движения абсолютно твёрдого тела».....	41
2.6. Контрольные вопросы.....	44
3. Динамика. Аналитическая механика.....	45
3.1. Основные физические величины, применяемые в аналитической механике.....	53
3.2. Варианты заданий по теме «Динамика. Аналитическая механика».....	54
3.3. Примеры решения задач по теме «Динамика. Аналитическая механика».....	61
3.4. Контрольные вопросы.....	70
4. Примерные тесты для проверки остаточных знаний.....	70
5. Пример оформления контрольной работы.....	73
6. Литература.....	74

ВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – это наука о простейшей форме движения материи, об общих законах механического движения и равновесия материальных тел. Курс состоит из трёх разделов (рис. 1)



Рис 1.

В результате изучения курса «Теоретическая механика» студент должен:

➤ **демонстрировать** и применять на практике базовые знания, методы и алгоритмы исследования, усвоенные в ходе её изучения; имеющуюся информацию механического характера о природных объектах и технических системах с целью последующего создания соответствующих математических моделей, динамических процессов и явлений; знания о механической компоненте современной естественнонаучной картины мира для понимания процессов и явлений, происходящих в природе и техносфере.

➤ **знать** основные естественнонаучные законы механики, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами; предметное содержание всех изучаемых разделов теоретической механики, её основные понятия и законы, понимание их значимости как теоретического фундамента современной техники и технологий

➤ **уметь** применять методы математического описания и моделирования; самостоятельно строить и исследовать математические и механические модели

технических систем, квалифицированно применяя при этом аналитические и численные методы исследования и используя возможности современных компьютеров и информационных технологий; находить рациональный подход к решению механических проблем повышенной сложности, в том числе требующих оригинальных подходов; читать и анализировать учебную и научную литературу по математике, информатике и теоретической механике.

➤ **владеть** основывающимися на законах механики методами и алгоритмами исследования равновесия и движения материальной точки, твёрдого тела и механической системы, математической и естественнонаучной культурой.

Значение курса «Теоретическая механика» в агроинженерном образовании определяется тем, что она является научным и прикладным фундаментом для успешного освоения дисциплин профессионального цикла:

- теория механизмов и машин;
- сопротивление материалов;
- гидравлика;
- детали механизмов и машин с их многочисленными приложениями в теории тракторов и автомобилей;
- сельскохозяйственные машины;
- машины и оборудование по механизации, электрификации и автоматизации АПК.

Прикладной характер теоретической механики заключается в возможности использовать её общие законы и принципы для разработки расчетных методик инженерных дисциплин, которые дают универсальный аналитический аппарат для исследования сложных задач, относящихся не только к числу механических, но и к электрическим и электромеханическим явлениям.

Исходя из квалификационной характеристики специальностей, где читается курс теоретической механики, студент после изучения этого курса должен знать следующие разделы:

- статика абсолютно твердого тела;
- кинематика движения точки и тела;
- динамика механической системы на основе основных теорем и принципов (включая динамику механизмов);
- аналитическая механика;

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения по некоторым темам из разделов «Статика», «Кинематика» и «Динамика. Аналитическая механика», задания для контрольной работы, разноплановые схемы механических систем с подробным пояснением и разбором решения типовых задач, контрольные вопросы по темам для оценки качества освоения разделов, примерные тесты для проверки остаточных знаний по дисциплине, а также пример оформления титульного листа контрольной работы.

Традиционное построение курса теоретической механики во втузах оставляет слишком мало времени для изучения элементов аналитической механики и уравнений Лагранжа 2-го рода. Самостоятельное выполнение студентами контрольной работы позволяет закрепить и систематизировать полученные знания по основным разделам дисциплины.

1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Статика (от греческого «неподвижный») – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием приложенных к ним сил и моментов.

В статике материальные тела считают **абсолютно твёрдыми**, т.к. изменение размеров тел обычно мало по сравнению с начальными размерами.

Абсолютно твёрдое тело (А.Т.Т) находится в равновесии, если оно покоится или движется равномерно и прямолинейно относительно выбранной **инерциальной системы отсчёта**.

Мерой механического взаимодействия является **сила** (рис.2), которая определяется тремя факторами: **направлением, точкой приложения и численным значением**.

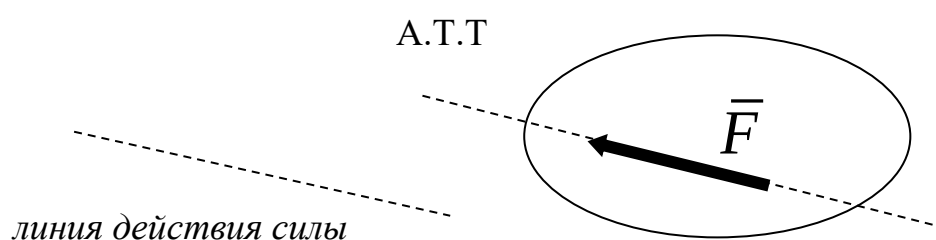


Рис.2

Если на А.Т.Т. действует совокупность сил, тогда это называется **системой сил**. Классификация систем сил:

1. Плоская (действующая на плоскости) система сил.

- Плоская система сходящихся сил, когда линии действия сил пересекаются в одной точке;
- Плоская система произвольно расположенных сил, когда линии действия всех сил не пересекаются в одной точке;
- Плоская система параллельных сил, когда линии действия сил не пересекаются;

2. Пространственная (действующая в пространстве) система сил.

- Пространственная система сходящихся сил;
- Пространственная система произвольно расположенных сил;

- Пространственная система параллельных сил.

Аксиомы статики

Статика основана на аксиомах, которые представляют собой законы природы, установленные опытным путём и подтверждённые всей практикой человечества. К аксиомам статики относятся следующие:

1. Материальная точка (А.Т.Т) находится в покое или совершает равномерное прямолинейное движение, если на неё действует уравновешенная система сил (У.С.С.)
2. Не нарушая механического состояния тела, к нему можно приложить или отбросить уравновешенную систему сил (рис. 3).

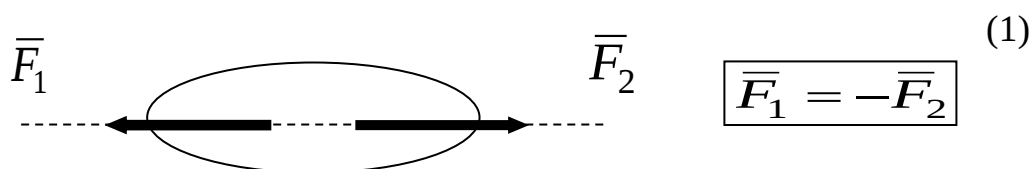


Рис. 3

3. О действии и противодействии. При всяком действии одного тела на другое со стороны другого тела имеется равное противодействие, такое же по величине, но противоположное по направлению (рис. 4).

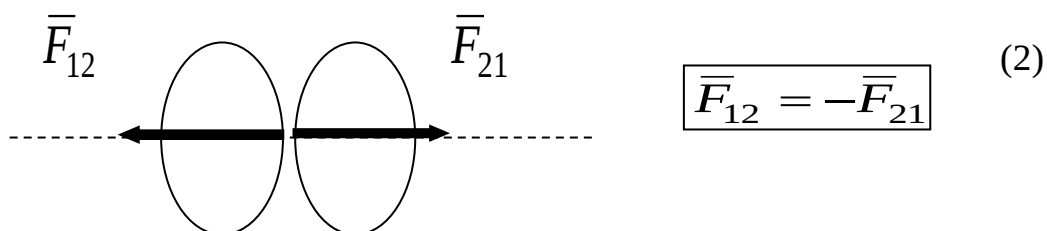
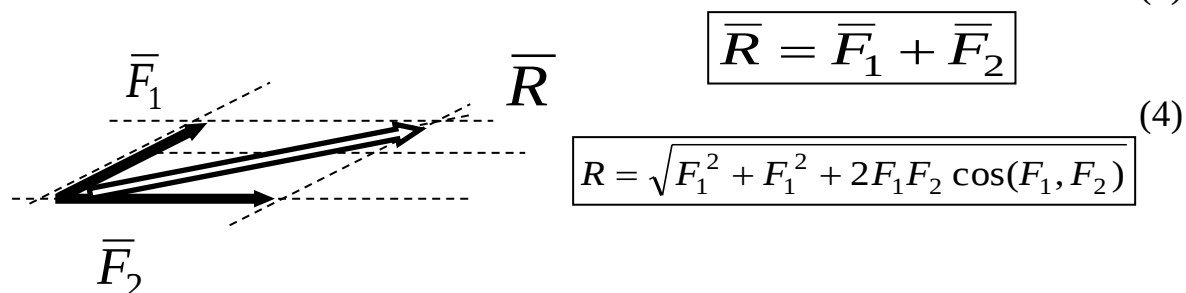


Рис. 4

4. О двух силах. Две силы, приложенные к одному и тому же телу, взаимно уравновешены (их действие эквивалентно нулю) тогда и только тогда, когда они равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны.

5. О равнодействующей. Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена к той же точке и равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как сторонах (рис. 5).

(3)



6. Аксиома затвердевания. Если деформируемое тело находилось в равновесии, то оно будет находиться в равновесии и после его затвердевания.
7. Аксиома о связях. Механическое состояние системы не изменится, если освободить её от связей и приложить к точкам системы силы, равные действовавшим на них силам реакций связей.

Следствия из аксиом:

- При переносе силы вдоль её линии действия, действие этой силы на тело не меняется.
- Сумма всех внутренних сил равна нулю.

Если систему сил, действующую на А.Т.Т., можно заменить на другую систему сил (не изменяя механического состояния тела), то такие системы сил называются **эквивалентными**.

На А.Т.Т. влияют внешние силы, а также другие материальные тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве. Такие тела называют **связями**.

Свободное тело — свобода перемещений тела не ограничивается никакими другими телами. **Несвободное тело** — его движение ограничено другими телами.

Сила, с которой связь действует на тело, ограничивая его перемещение, называется *реакцией связи*.

Принцип освобождения от связи – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

Для записи условия равновесия системы связи убирают, а реакции связей заменяют на равные им силы. Например, если тело закреплено на шарнире, то шарнир является связью. Реакцией связи при этом будет сила, проходящая через ось шарнира.

Виды связей и реакции связей

Общее правило для связей любого вида: *если связь препятствует одному или нескольким перемещениям (максимальное число перемещений – три поступательных и три вращательных), то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).*

1. Нить (гибкая связь), любой стержень (рис.6): Реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню).

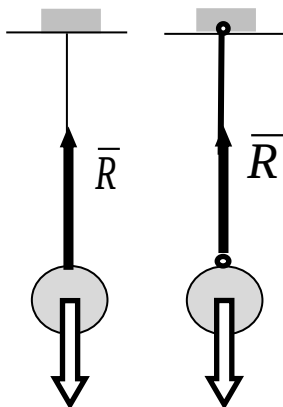


Рис. 6

2. Абсолютно гладкая поверхность (рис.7): Реакция направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи.

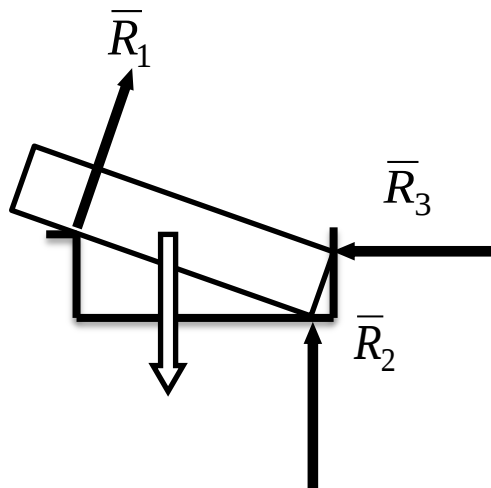


Рис. 7

3. Неподвижный цилиндрический шарнир (рис.8): Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира, которую можно разложить на две составляющие (например R_x и R_y), параллельные координатным осям x и y

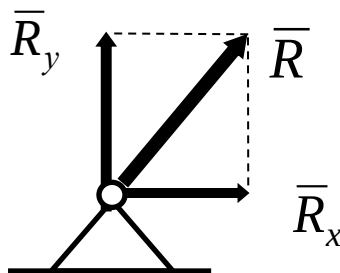


Рис.8

4. Неподвижный сферический шарнир (рис. 9 а, б): Реакция неподвижного сферического шарнира проходит через центр шарнира и имеет произвольное направление в пространстве. Реакцию неподвижного сферического шарнира можно разложить на три составляющие (например R_x , R_y , R_z), параллельные координатным осям.

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z \quad (5)$$

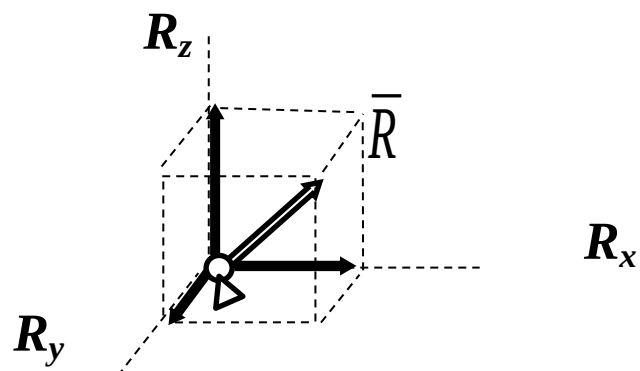


Рис. 9 а

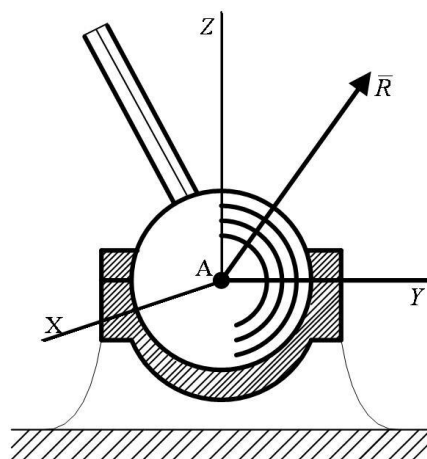


Рис. 9 б

5. Подвижный цилиндрический шарнир (рис.10): Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опоры.

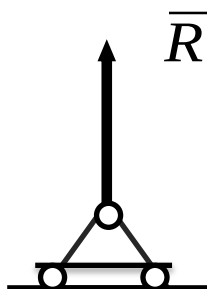


Рис.10

6. Жесткая плоская заделка (рис.11): В жесткой плоской заделке возникает три реактивных фактора: две составляющие реактивные силы R_x и R_y , а также реактивный момент (пара сил) M_A .

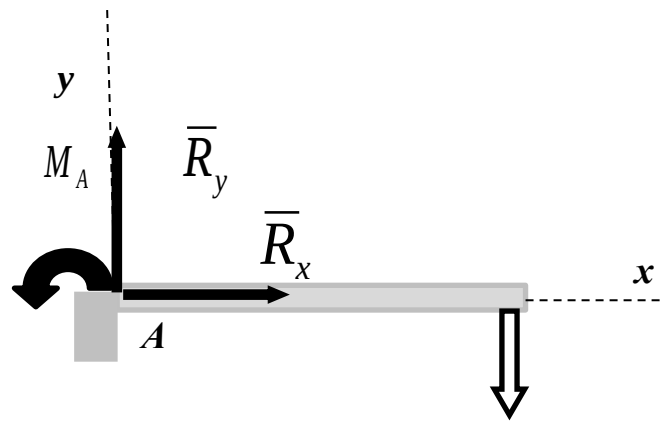
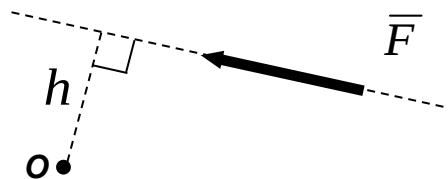


Рис. 11

Момент силы относительно точки на плоскости

Для рассмотрения плоской произвольной системы сил необходимо ввести понятие о моменте силы относительно точки: M_O – это произведению модуля силы F на плечо h (перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы) взятое со знаком «+» или «-».



$$M_O(\bar{F}) = F \cdot h \quad (6)$$

Рис.12

При решении задач статики устанавливаем правило знаков для момента силы относительно точки:



Рис. 13

Условие равновесия плоской произвольной системы сил

Для любой системы сил, приложенных к твёрдому телу, можно найти эквивалентную систему сил, состоящую из силы, приложенной в произвольной точке O (центре приведения), и пары сил.

Сила называется **главным вектором** $\bar{R}^*$ системы сил:

$$\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0} \quad (7)$$

Главный вектор равен векторной сумме всех сил системы и не зависит от выбранного центра приведения.

Парой сил, называется – **главным моментом** M_O^* относительно выбранного центра приведения:

$$\boxed{M_O^* = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n} \quad (8)$$

Главный момент равен сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения и зависит от выбранного произвольно центра приведения.

Для записи **условия равновесия системы**, состоящей из твёрдых тел, систему разделяют на отдельные части, и записывают **уравнения равновесия** как для всей системы, так и для её частей. При этом возможны несколько эквивалентных вариантов записи условий равновесия в зависимости от выбора частей системы, для которых записываются уравнения:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{io} &= 0. \end{aligned}} \quad \text{или} \quad (9)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum M_{iB} &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0. \end{aligned}} \quad \text{при условии, что } \mathbf{AB} \text{ не параллельна оси } x \quad (10)$$

1.1. Основные физические величины, применяемые в статике

P или G – вес тела [Н];

F_k – активная сила [Н];

N_k – реакция связи при опирании тела о поверхность [Н];

T_k – реакция гибкой связи [Н];

R_k – реакция шарнирной связи и плоской заделки [Н];

M_o – момент силы относительно точки [Нм];

M_x, M_y, M_z – момент силы относительно соответствующих осей [Нм];

q – распределённая нагрузка [Н/м];

R_{Σ} – равнодействующая системы сил [Н];

h – перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы [м];

1.2. Варианты заданий по теме

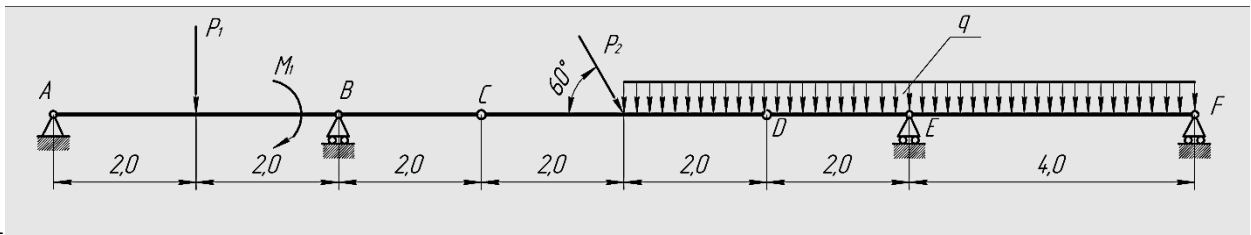
«Плоская система произвольно расположенных сил»

Задание: Найти реакции опор и давления в промежуточных шарнирах составной балки, схемы балок представлены на рисунках, нагрузка представлена в таблице 1.

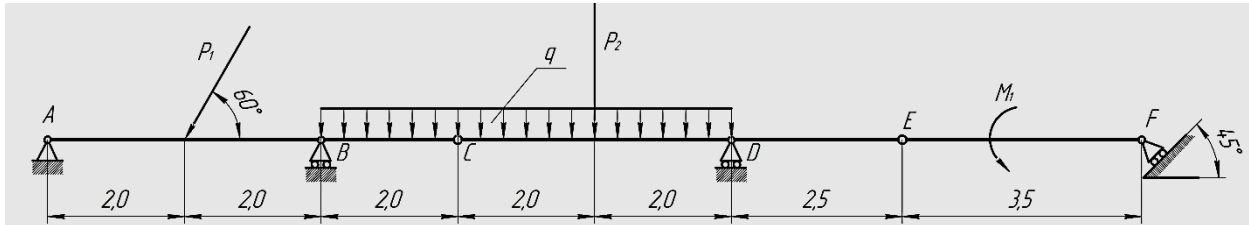
Таблица 1

№ варианта	P_1	P_2	P_3	M_1	M_2	q кН/м
	кН			кНм		
1	4	11	-	26	-	0.5
2	7	3	-	19	-	1
3	11	17	-	33	-	1.6
4	7	9	4	31	22	-
5	9	15	-	24	-	2.2
6	10	7	-	20	-	2.4
7	4	6	10	18	24	-
8	5	4	-	12	-	0.9
9	12	7	17	26	-	3.2
10	8	13	-	30	-	3
11	10	5	11	14	25	-
12	7	12	6	16	-	2.8
13	6	11	-	22	-	2.6
14	10	7	-	34	-	1
15	14	9	-	23	28	-
16	13	15	5	36	-	-
17	8	12	-	20	-	3
18	10	16	-	22	-	4
19	9	13	-	40	-	2.2
20	11	6	-	36	30	4
21	6	10	-	30	-	0.5
22	12	21	-	22	-	6
23	4	14	8	31	23	-
24	9	14	11	27	-	3.5
25	9	15	-	42	-	4.1
26	3	12	-	38	-	2
27	10	15	18	30	-	-
28	8	10	14	28	-	1.4
29	5	12	-	35	-	0.8
30	15	7	11	44	-	-

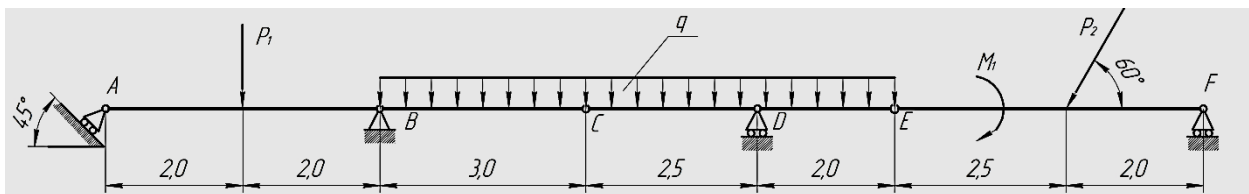
1



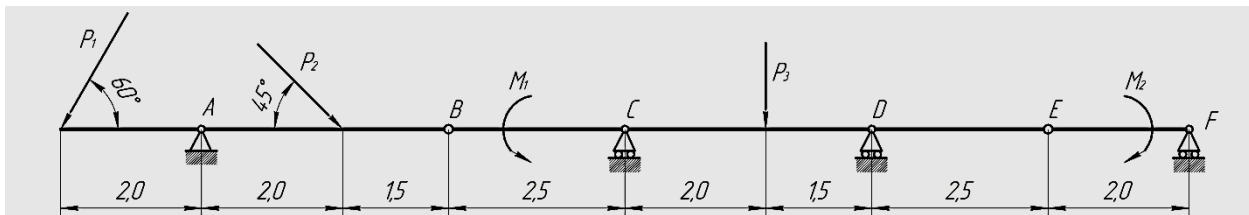
2



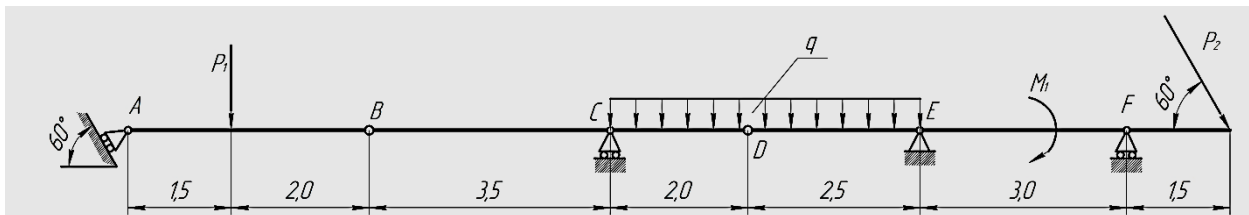
3



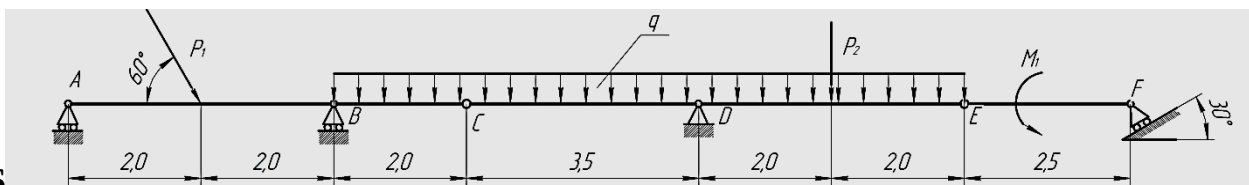
4



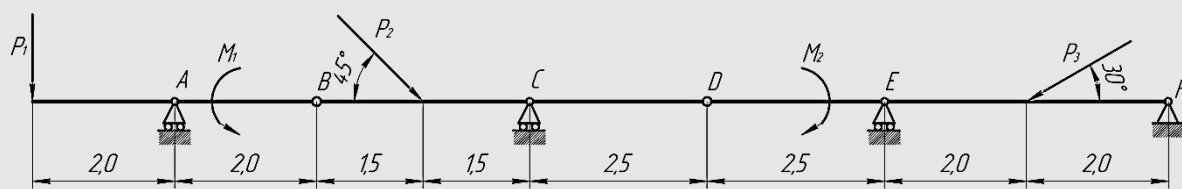
5



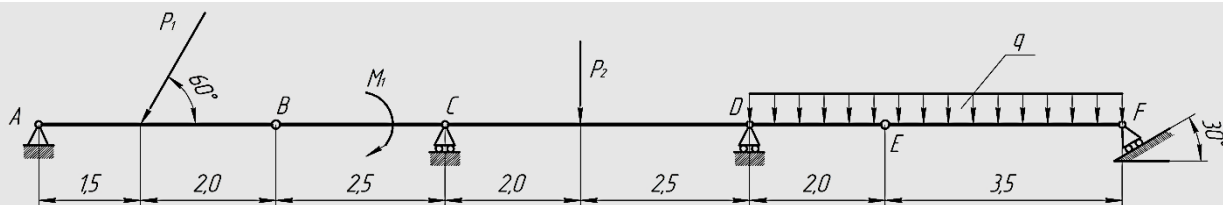
6



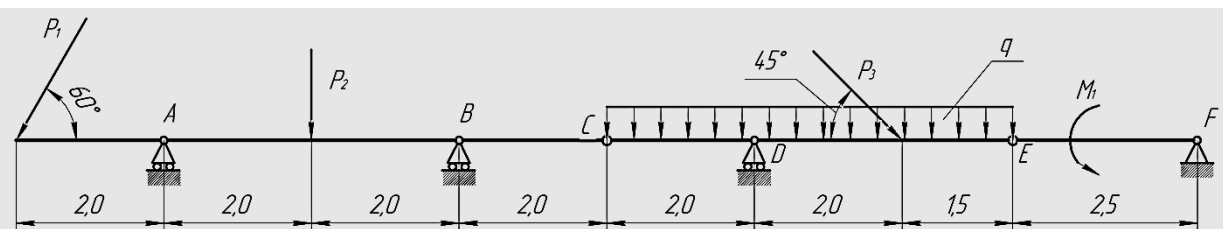
7



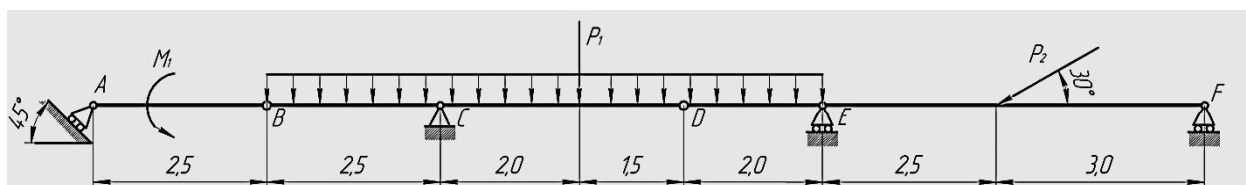
8



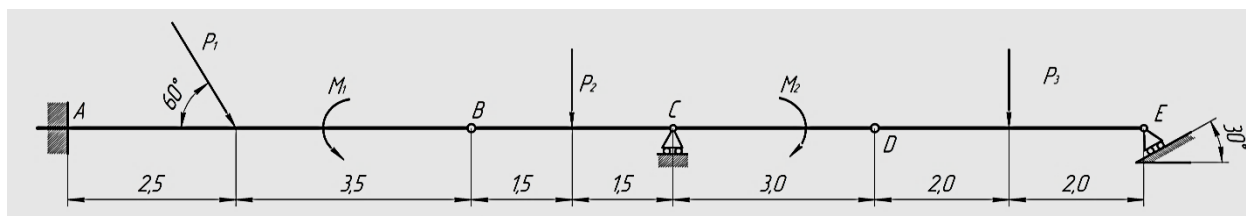
9



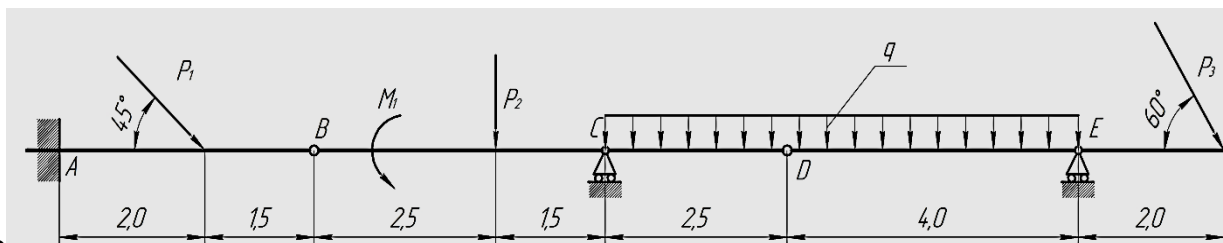
10

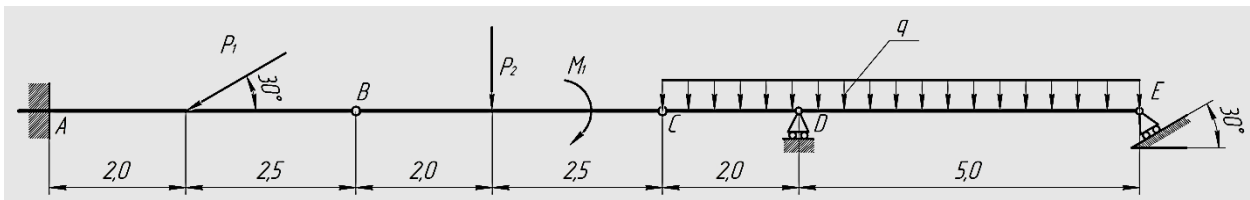


11

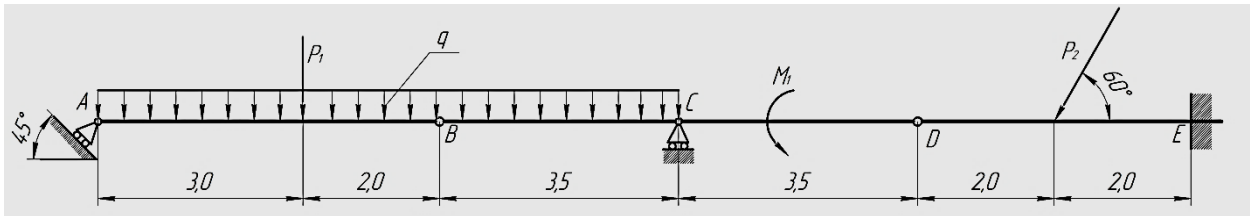


12

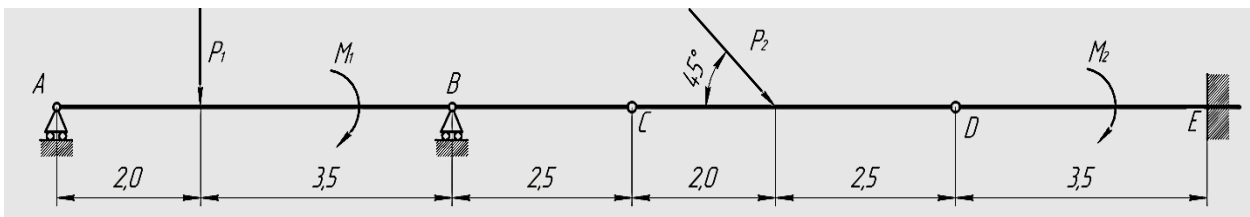




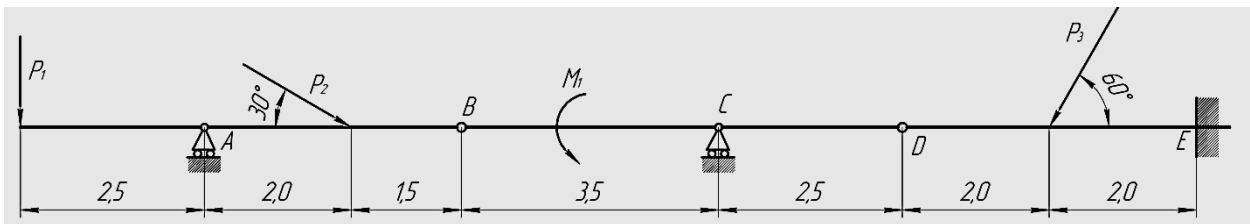
13



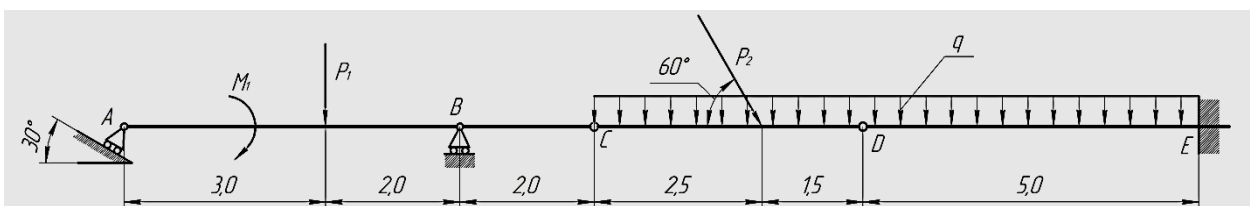
14



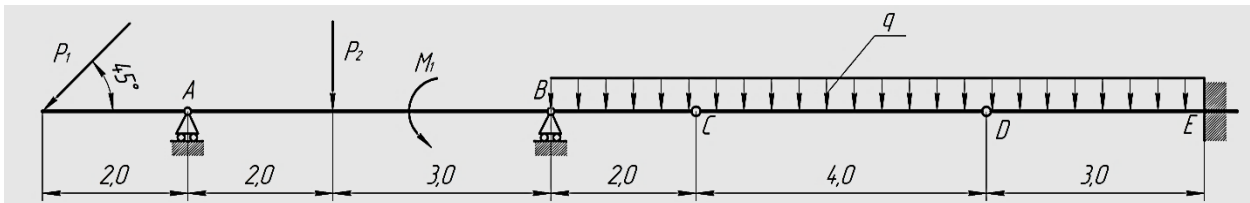
15



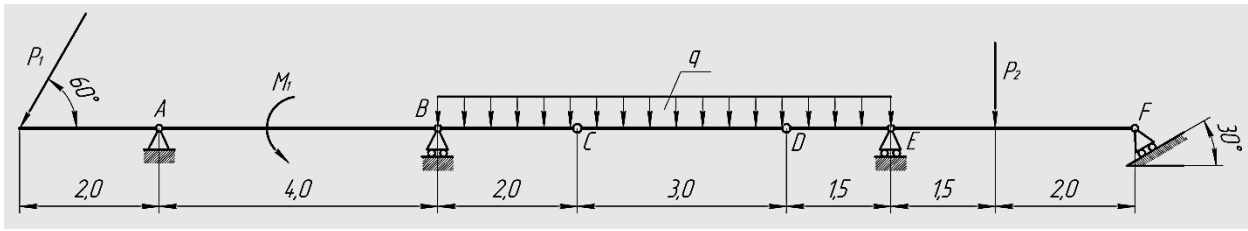
16



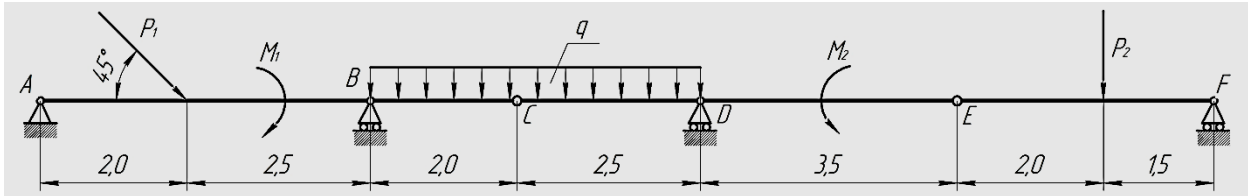
17



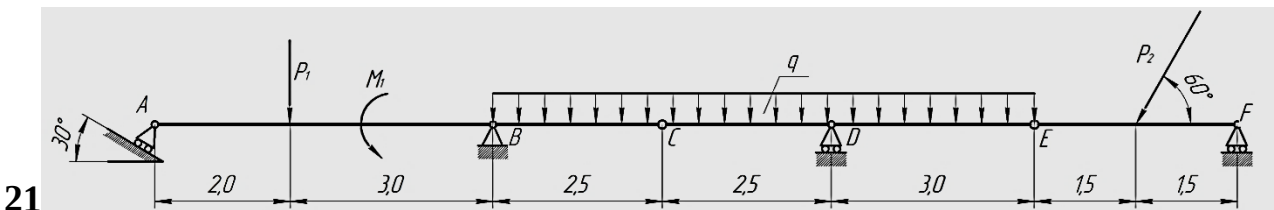
18



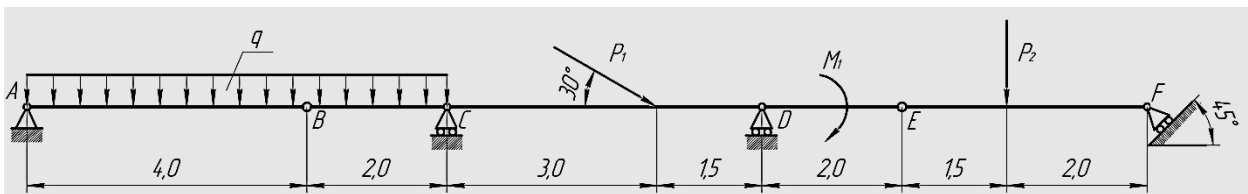
19



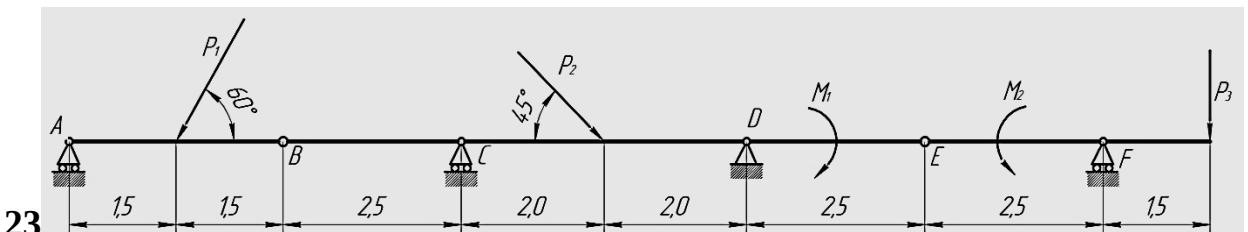
20



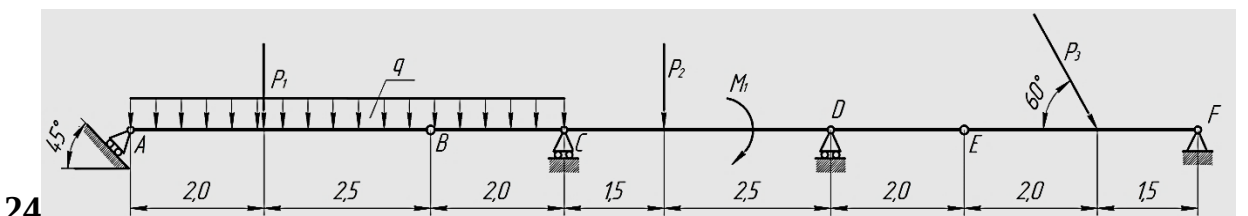
21



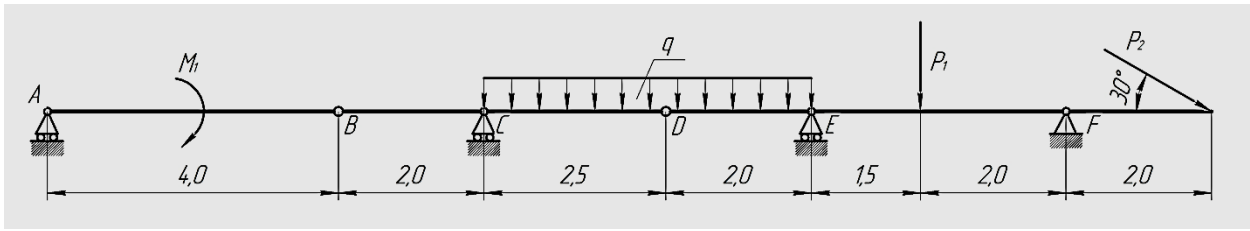
22



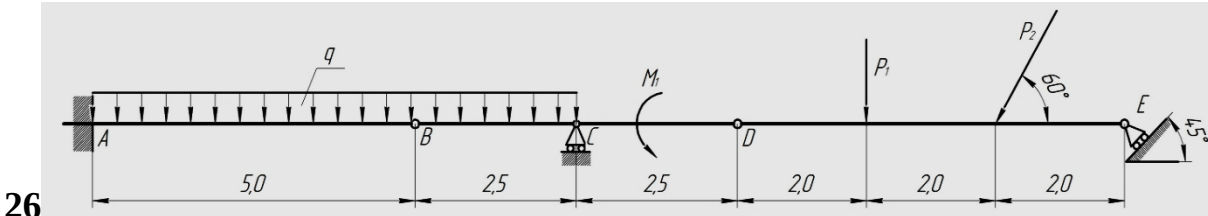
23



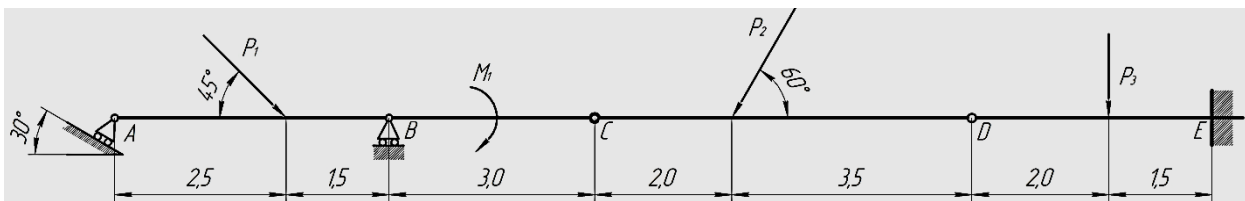
24



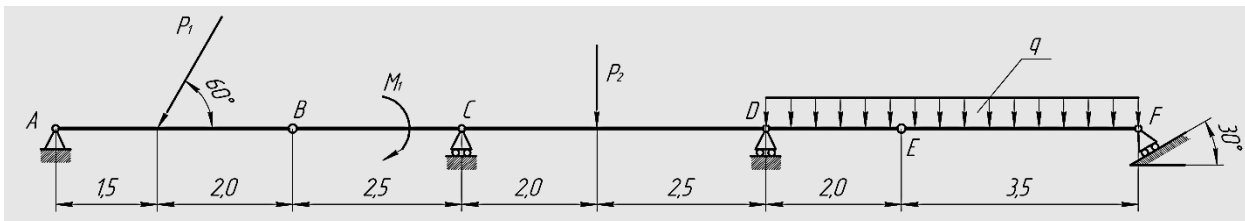
25



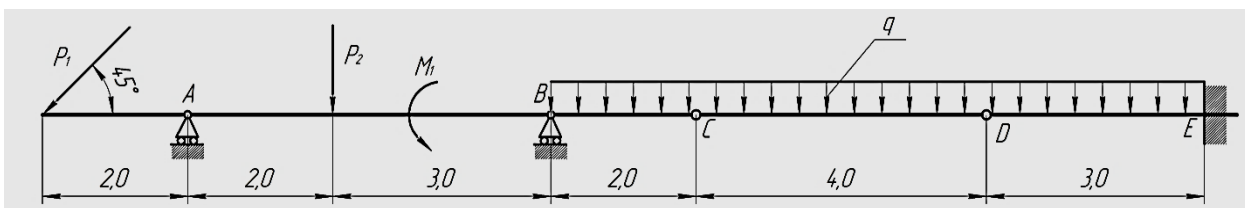
26



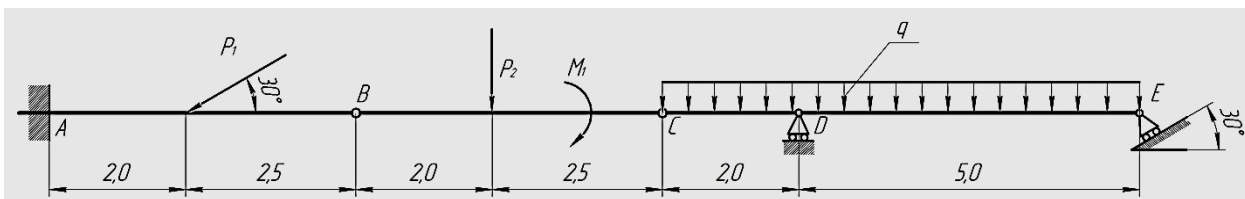
27



28



29



30

При решении задачи следует учесть, что внешние силы (активные и реакции связей), приложенные к системе, удовлетворяют тем же уравнениям равновесия, что и в случае равновесия одного тела. Если система сил разделяется на отдельные тела, то при замене их взаимодействия реакциями внутренних связей последние должны иметь противоположные направления и равные модули.

Задание можно решить двумя способами:

1. Сначала составляют уравнения равновесия для всей системы тел в целом, в которые входят только внешние активные силы и реакции связей. Затем, расчленив систему на отдельные тела, составляют уравнения равновесия одного из тел, изображая его отдельно и указывая реакции внутренних связей;

2. Систему тел разделяют на отдельные тела с указанием, как внешних сил, так и реакций внутренних связей для каждого из тел в отдельности и составляют уравнения равновесия указанных тел системы. Системы координат, на оси которых определяются проекции действующих сил, могут выбираться отдельно как для каждого тела, так и для всей системы тел.

Проекция силы на ось

Проекция силы (как и любого другого вектора) на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый – проекция положительна, если тупой – отрицательна, а если сила перпендикулярна оси – ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рисунке 14

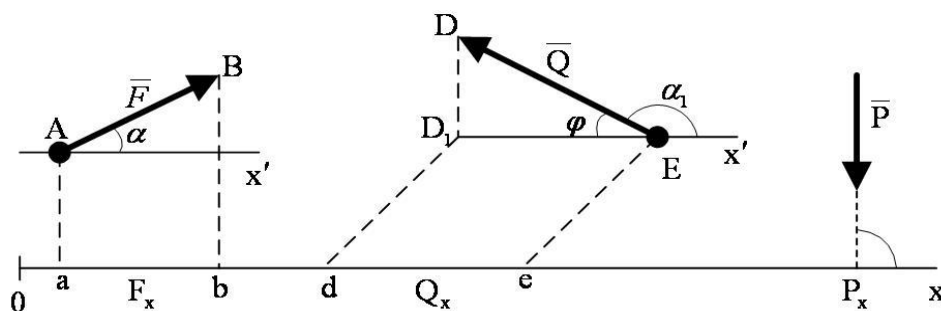


рис. 14

$$F_x = F \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi = -de, \quad P_x = 0 \quad (11)$$

1.3. Пример решения задачи на тему

«Плоская система произвольно расположенных сил»

Дано: Схема составной балки (рис.15), где $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 20$ кН, $M = 50$ кНм, $q = 2$ кН/м.

Определить: Реакции опор и давления в промежуточных шарнирах составной балки.

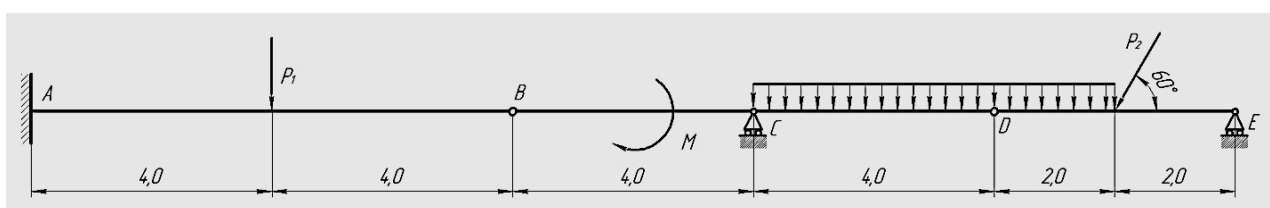


Рис.15

Решение: Составная балка представляет собой систему простых балок, соединённых шарнирами (рис.15). Поэтому рассматриваем системы уравнивающих сил, приложенных к каждой простой балке в отдельности, учитывая давления в шарнирах, соединяющих эти балки.

1. Начинаем с балки **DE** (рис.16).

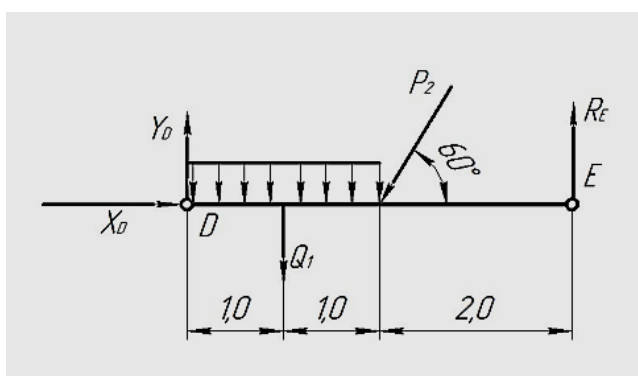


Рис.16

Так как число неизвестных сил (R_E , X_D , Y_D) приложенных к этой балке, равно числу уравнений равновесия, где сосредоточенная нагрузка имеет значение:

$$Q_1 = q \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}, \quad (1)$$

Получаем три уравнения:
$$\begin{cases} \sum X_i = 0; X_D - P_2 \cos 60^\circ = 0; (2) \\ \sum Y_i = 0; Y_D - Q_1 - P_2 \cos 30^\circ + R_E = 0; (3) \\ \sum M_{iD} = 0; R_E \cdot 4 - Q_1 \cdot 1 - P_2 \cos 30^\circ \cdot 2 = 0. (4) \end{cases}$$

Из уравнения (4) получаем:

$$R_E = \frac{P_2 \cos 30^\circ \cdot 2 + Q_1 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot (2\sqrt{3}/2) + 4 \cdot 1}{4} = 9,66 \text{ кН}$$

Из уравнения (3) получаем:

$$Y_D = Q_1 + P_2 \cos 30^\circ - R_E = 4 + 20 \cdot (2\sqrt{3}/2) - 9,66 = 11,6 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) получаем:

$$X_D = P_2 \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}$$

2. Составляем уравнения равновесия для балки **BD** (рис.17), где сосредоточенная нагрузка имеет значение:

$$Q_2 = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}, (5)$$

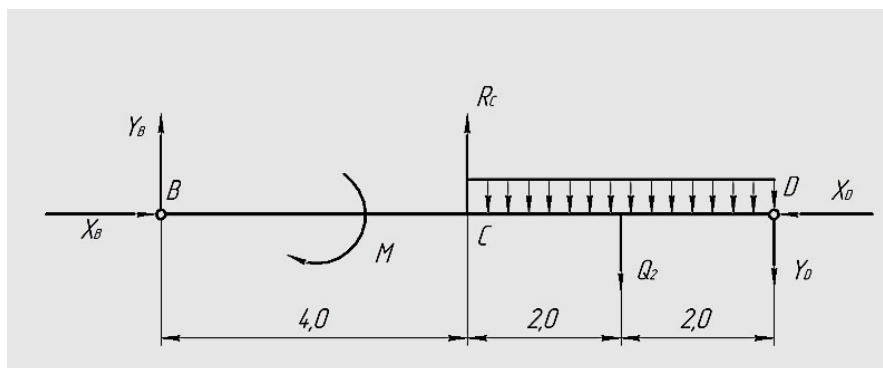


Рис. 17

Получаем три уравнения:
$$\begin{cases} \sum X_i = 0; X_B - X'_D = 0; (6) \\ \sum Y_i = 0; Y_B - Q_2 - Y'_D + R_C = 0; (7) \\ \sum M_{iB} = 0; R_C \cdot 4 - Q_2 \cdot 6 - M - Y'_D \cdot 8 = 0; (8) \end{cases}$$

Из уравнения (8) получаем:

$$R_C = \frac{M + Q_2 \cdot 6 + Y_D' \cdot 8}{4} = \frac{50 + 8 \cdot 6 + 11,6 \cdot 8}{4} = 47,7 \text{ кН}$$

Из уравнения (7) получаем:

$$Y_B = Q_2 + Y_D' - R_C = 8 + 11,6 - 47,7 = -28,1 \text{ кН}$$

Из уравнения (6) получаем:

$$X_B = X_D' = 10 \text{ кН}$$

3. Составляем уравнения равновесия для балки **AB** (рис.18):

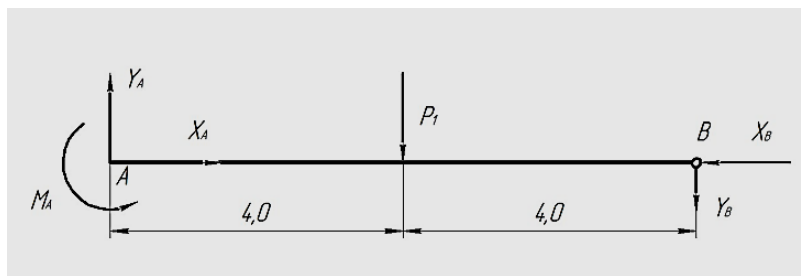


Рис.18

Получаем три уравнения:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; X_A - X_B' = 0; (9) \\ \sum Y_i = 0; Y_A - P_1 - Y_B' = 0; (10) \\ \sum M_{iA} = 0; M_A - P_1 \cdot 4 - Y_B' \cdot 8 = 0; (11) \end{cases}$$

Из уравнения (11) получаем:

$$M_A = P_1 \cdot 4 + Y_B' \cdot 8 = 12 \cdot 4 - 28,1 \cdot 8 = -177 \text{ кНм}$$

Из уравнения (10) получаем:

$$Y_A = P_1 + Y_B' = 12 - 28,1 = -16,1 \text{ кН}$$

Из уравнения (9) получаем:

$$X_A = X_B' = 10 \text{ кН}$$

4. Для проверки правильности произведённых расчётов следует убедиться в том, что соблюдается любое из уравнений равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции, например:

$$\sum Y_i = 0; Y_A - P_1 + R_C - Q_2 - Q_1 - P_2 \cdot \cos 30^\circ + R_E = 0; (12)$$

$$-16,2 - 12 + 47,7 - 8 - 4 - 20\left(\sqrt{3/2}\right) + 9,66 \approx -57,4 + 57,4 = 0, (13)$$

5. Результаты расчёта:

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{10^2 + (-16,1)^2} = 18,95 \text{ кН}, \\ M_A &= -177 \text{ кНм}, R_C = 47,7 \text{ кН}, R_E = 9,66 \text{ кН}, \\ R_B &= \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{10^2 + (-28,1)^2} = 29,83 \text{ кН}, \\ R_D &= \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{10^2 + (-11,6)^2} = 15,35 \text{ кН}. \end{aligned}$$

1.4. Контрольные вопросы, для оценки качества освоения раздела

«Статика абсолютно твёрдого тела»

1. Основные понятия и аксиомы статики.
2. Связи и виды связей, реакции связей.
3. Системы сходящихся сил геометрический и аналитический способы сложения сил.
4. Произвольная плоская система сил. Алгебраический момент силы относительно точки. Пара сил. Алгебраический момент пары.
5. Теоремы об эквивалентности пар в плоскости. Равновесие системы пар.
6. Лемма о параллельном переносе силы. Теорема о приведении плоской системы сил к данному центру.
7. Главный вектор и главный момент системы сил. Приведение плоской системы сил к простейшему виду.
8. Равновесие плоской системы сил. Три формы условий равновесия.
9. Равновесие при наличии трения. Коэффициент трения.
10. Произвольная пространственная система сил. Момент силы относительно точки как вектор. Момент силы относительно оси и способы его вычисления.

11. Теорема о связи между моментом силы относительно оси и относительно центра на оси.
12. Пара сил в пространстве. Момент пары сил как вектор. Теоремы об эквивалентности пар в пространстве.
13. Сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Равновесие систем пар.
14. Приведение пространственной системы сил к центру.
15. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.
16. Равновесие произвольной пространственной системы сил. Аналитические уравнения равновесия.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Кинематика точки. Введение в кинематику

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения материальных объектов (м.о.) без учета их инертности (массы) и действующих на них сил. Основной задачей кинематики является нахождение положения м.о. в любой момент времени, если известны: *положение, скорость и ускорение* в начальный момент времени.

Механическое движение – это изменение положения тел (или частей тела) относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Для определения положения движущегося м.о. в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.

Тело отсчета – тело (или группа тел), принимаемое в данном случае за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета – это система координат (X, Y, Z), связанная с телом отсчета (рис. 19).

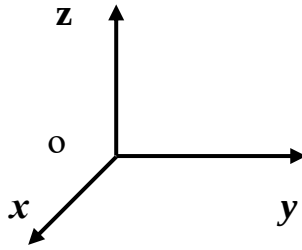


Рис.19

Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки

- закон, по которому движется точка: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}$ – радиус – вектор; (1)

- скорость точки: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; (2)

- ускорение точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; (3)

2. Координатный способ задания движения точки (рис.20):

Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты, которые всегда постоянны, тогда радиус-вектор разложим на составляющие: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (4)

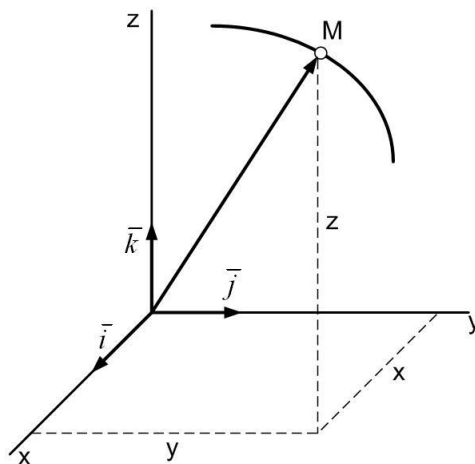


Рис. 20

- закон движения для точки: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$; (5)

- скорость точки, где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси X, Y, Z ,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' \quad (6), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y' \quad (7), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = z' \quad (8);$$

Тогда вектор $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$ (9) или модуль $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; (10)

- ускорение точки, где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v'_x = x'' \quad (11),$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = v'_y = y'' \quad (12),$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = v'_z = z'' \quad (13);$$

Тогда вектор полного ускорения: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$; (14)

модуль полного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$; (15)

3. Естественный способ задания движения точки (рис.21)

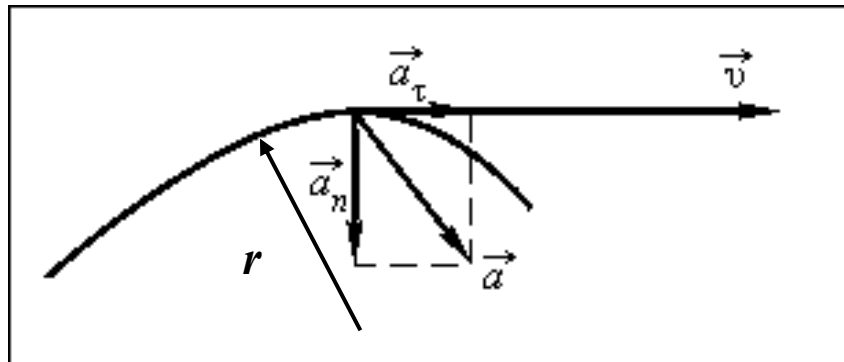


Рис.21

- закон движения для точки: $s = s(t)$, (16)

- скорость точки $v = \frac{ds}{dt} = s'$, (17)

- ускорение показывает, как быстро изменяется *скорость по*

величине $a_\tau = \frac{dv}{dt} = v', (18)$ – это тангенциальное (касательное) ускорение; и

как быстро изменяется *скорость по направлению* $a_n = \frac{v^2}{r}, (19)$ – это центростремительное (нормальное) ускорение, где r – радиус кривизны в данном положении точки. Тогда модуль полного ускорения принимает вид:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (20)$$

Кинематика простейших движений абсолютно твёрдого тела

Существует пять видов движения твердого тела:

1. ***Поступательное*** (ползун, поршень насоса двигателя, спарник колес паровоза, движущегося по прямолинейному пути, кабина лифта, дверь-купе на полозьях, кабина колеса обозрения).
2. ***Вращательное*** (маховик, кривошип, коромысло, колесо обозрения, дверь на петлях).
3. ***Плоскопараллельное или плоское*** (шатун, колесо по неподвижной поверхности, подвижный шлифовальный круг).
4. ***Сферическое*** (гироскоп, шаровая опора).
5. ***Общий случай движения или свободный полет*** (пуля, камень, небесное тело).

Поступательное движение абсолютно твёрдого тела

Это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе. Рассмотрим спарник AB (рис.22), при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A = O_2B$), он движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

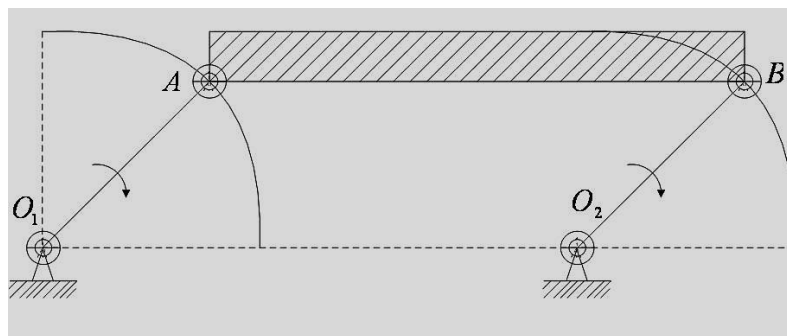


Рис.22

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой:
при поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки, принадлежащей этому телу и выбранной произвольным образом. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной, т.е. все параметры движения этой точки (траектория, скорость и ускорение) описываются уравнениями и соотношениями кинематики точки.

Вращательное движение абсолютно твёрдого тела

Это движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной прямой, и описывают окружности с центрами, лежащими на этой прямой, называемой ***осью вращения***.

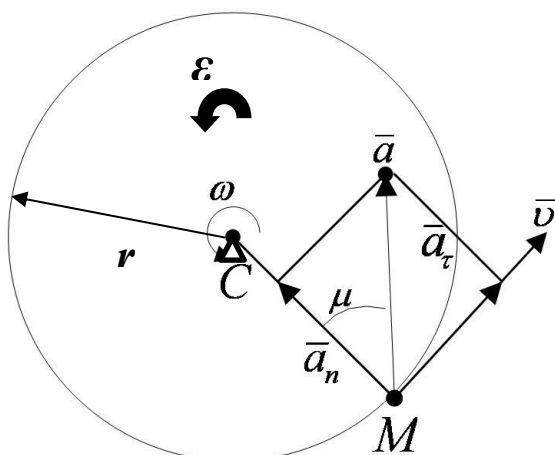


Рис. 23

При повороте радиуса, проведенного в точку М (рис.23), на угол φ точка пройдет по дуге окружности путь S . Дуговая координата связана с радиусом окружности: $S = r \cdot \varphi$. (21)

- закон вращательного движения: $\varphi = \varphi(t)$. (22)

• угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$, (23) – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота и на схеме изображается дуговой стрелкой в сторону вращения.

• угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega' = \varphi''$, (24) изображается дуговой стрелкой в сторону увеличения или уменьшения угловой скорости.

Кинематические уравнения поступательного и вращательного движений сведены в таблицу 2

Таблица 2

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$s = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
$a = const$	$\varepsilon = const$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Линейные и соответствующие им угловые величины связаны между собой. Поскольку далее работают с модулем угловой скорости после изображения её в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для модуля скорости:

$$v = \omega \cdot r, \quad (25)$$

и вектор скорости направляют перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Как следует из формулы скорость точки пропорциональна расстоянию ее до оси вращения (радиусу вращения).

Ускорение точки при вращательном движении твердого тела – так как траектория точки известна, можно применить формулы для определения ускорений точки при естественном задании движения:

$$a_n = \omega^2 \cdot r \text{ (26); } a_\tau = \varepsilon \cdot r \text{ (27); } a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ (28).}$$

2.1. Основные физические величины, применяемые в кинематике простейших движений А.Т.Т.

$\vec{r}$ – радиус – вектор [м];

s – перемещение [м];

V_x, V_y, V_z – проекции скорости на оси X, Y, Z [м/с];

a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси X, Y, Z [м/с²];

$\vec{V}$ – вектор действительной скорости [м/с];

$\vec{a}$ – вектор полного ускорения [м/с²];

a_n – центростремительное (нормальное) ускорение [м/с²];

a_τ – тангенциальное (касательное) ускорение [м/с²];

ω – угловая скорость [1/с, с⁻¹];

ε – угловое ускорение [1/с², с⁻²];

2.2. Варианты заданий по теме «Кинематика точки»

Задание: По заданным уравнениям движения точки M установить вид её траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость, ускорения, радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ		t_1 (с)
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3)$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + 1$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6)$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) - 3$	1

2.3. Пример решения задачи на тему «Кинематика точки».

Дано: Точка М движется согласно законам

$$x = 4t, \text{ см}; \quad y = 16t^2 - 1, \text{ см}, \text{ а время } t_1 = 0,5 \text{ с.}$$

Определить: вид траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость, ускорения, радиус кривизны траектории.

Решение:

1. Определяются уравнение движения, вид траектории и положение точки на траектории.

Чтобы получить уравнение движения в координатной форме, исключается время t из уравнений: $x = 4t \rightarrow t = x/4$, соответственно $y = x^2 - 1$, т.е. траекторией точки является часть параболы, полученной в результате построения от M до $+\infty$

Имеется точка M с координатами $x = 2$ см, $y = 3$ см.

2. Определяется действительная скорость точки через сумму проекций скоростей на соответствующие оси координат по формулам (9) и (10).

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = 4 \text{ см/с}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y' = 32t = 32 \cdot 0,5 = 16 \text{ см/с};$$

Тогда модуль скорости находится так: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16,5 \text{ см/с}$.

3. Определяются ускорения точки.

Полное ускорение через сумму проекций ускорений на соответствующие оси координат по формулам (14) и (15).

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v_x' = x'' = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = v_y' = y'' = 32 \text{ см/с}^2.$$

Тогда модуль ускорения находится так: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_y = 32 \text{ см/с}^2$.

Модуль тангенциального (касательного) ускорения по формуле (18)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \left| \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} \right| = 31 \text{ м/с}^2.$$

Модуль центростремительного (нормального) ускорения по формуле (20)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 7,8 \text{ см/с}^2.$$

4. Находится радиус кривизны траектории из формулы (19)

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = 35 \text{ см}.$$

5. На рис.24 показано положение точки в заданный момент времени.

Вектор действительной скорости строим по составляющим v_x и v_y , причем этот вектор должен совпадать с касательной к траектории.

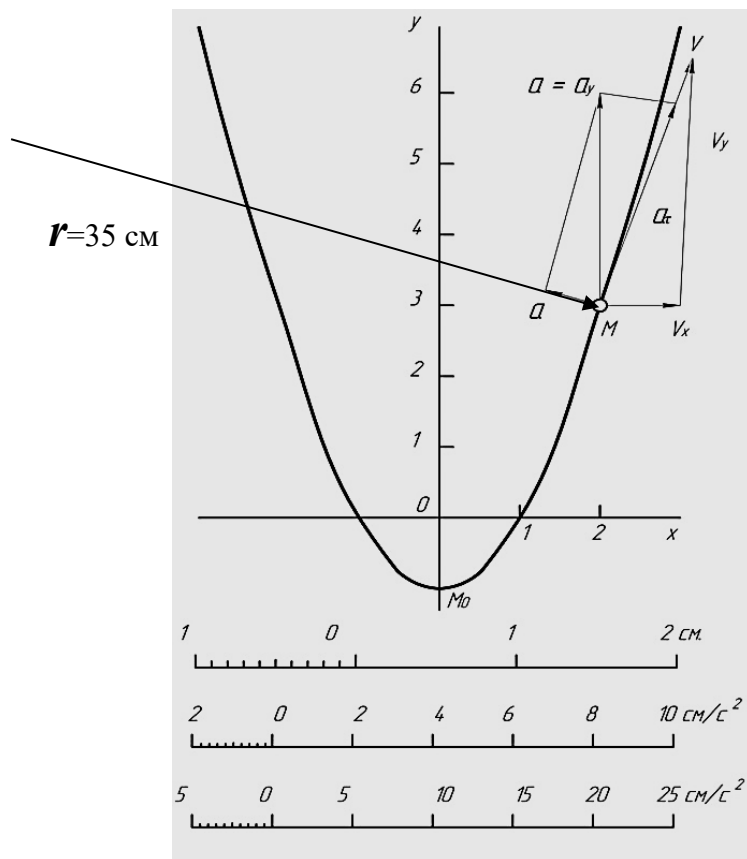


Рис. 24

Вектор полного ускорения строим по составляющим a_x и a_y , а затем раскладываем на составляющие a_τ и a_n . Совпадение величин a_τ и a_n найденных на чертеже, с их значениями, полученными аналитически, служит проверкой правильности решения данной задачи.

2.4. Варианты заданий по теме

«Простейшие движения абсолютно твёрдого тела»

Задание: Для некоторых тел заданы уравнения движения, а для других линейные или угловые скорости, линейные или угловые ускорения (таблица 4). При начальных условиях равных нулю определить линейные скорости и ускорения точек M , а также угловые параметры пронумерованных звеньев

механизма (таблица 5). Нанести все полученные кинематические параметры на чертёж.

Таблица 4

№ варианта	r ₁	R ₁	r ₂	R ₂	r ₃	R ₃	s	х, м φ, рад	υ, м/с ω, с ⁻¹	а, м/с ² ε, с ⁻²
	М									
1	-	-	0,4	1,2	0,8	-	0,4	0,2+t ²	-	-
2	-	-	0,5	1,5	2	-	0,2	-	0,4t	-
3	-	-	0,2	1,2	0,9	-	0,6	-	-	4
4	-	-	0,6	1,8	0,5	-	0,3	0,1+t ²	-	-
5	0,6	-	0,8	1,4	-	-	0,5	0,8+1,2t ²	-	-
6	0,5	-	0,4	1,2	0,6	-	0,8	2,4t ²	-	-
7	-	-	0,8	1,8	2	-	1,2	-	-	3
8	-	-	0,5	0,8	0,8	-	0,6	-	-	5
9	-	-	0,6	1,8	0,5	-	1,4	-	0,6t	-
10	-	-	0,8	2,4	0,9	-	1,0	-	1,2t	-
11	-	-	0,5	1,4	1,2	-	1,2	0,5+1,6t ²	-	-
12	-	-	0,8	1,2	1,4	-	0,8	-	0,8t	-
13	0,8	-	0,9	1,8	1,2	-	0,6	0,8t ²	-	-
14	-	-	1,2	1,9	1,5	-	0,5	-	-	1,8
15	0,9	-	0,4	1,2	0,8	1,6	0,4	1,2t ²	-	-
16	-	-	0,8	2,2	1,2	-	0,8	0,5+t ²	-	-
17	-	-	0,5	1,2	0,8	1,8	0,6	-	1,2t	-
18	-	-	0,4	0,9	0,6	1,2	0,4	0,4+1,2t ³	-	-
19	0,6	-	0,8	1,4	1,8	-	1,2	-	0,8t	-
20	1,2	-	0,4	-	2,4	-	0,5	-	-	2
21	-	-	0,6	2,4	0,8	-	0,8	-	1,5t	-
22	-	-	0,8	-	1,4	-	0,4	-	t	-
23	1,2	-	0,4	-	1,5	2	0,6	-	-	1,6
24	0,4	-	0,8	-	1,2	2	0,8	-	1,2t	-
25	-	-	0,6	2	0,8	-	1,2	-	-	2,5
26	0,8	-	1,4	-	1,2	2	0,4	0,2+1,4t ²	-	-
27	0,5	-	1,5	-	0,8	1,2	0,6	-	0,8t	-
28	0,4	-	0,6	1,2	0,5	-	0,5	2t ²	-	-
29	0,8	1,2	0,5	-	1,6	-	0,8	-	1,4t	-
30	0,4	1,4	0,6	1,2	0,8	-	1,2	-	-	4

Таблица 5

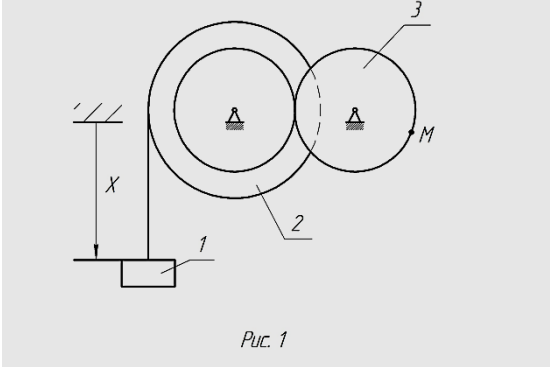
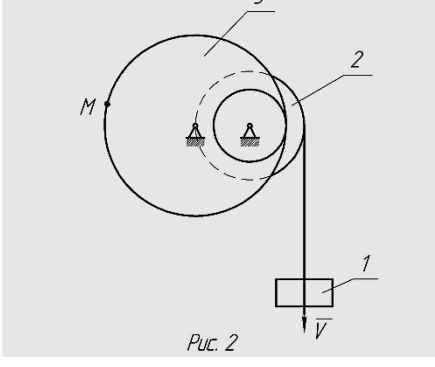
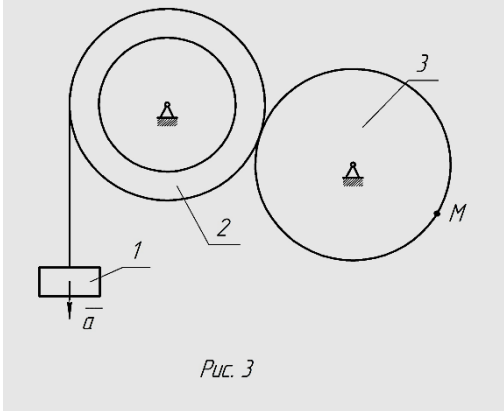
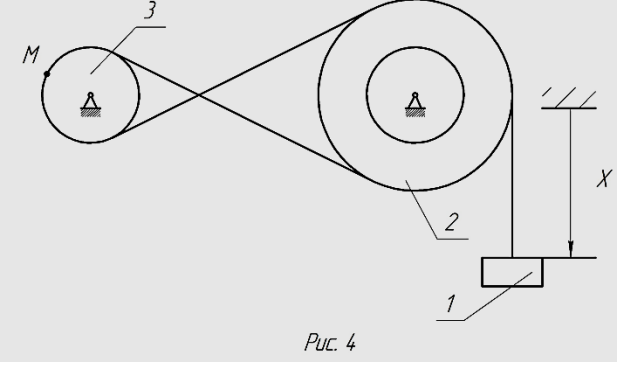
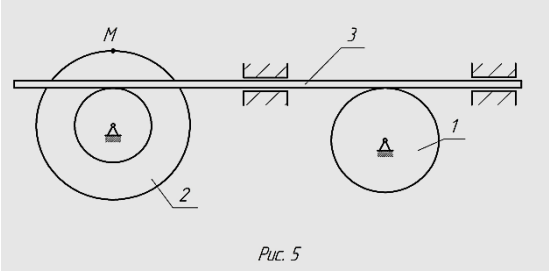
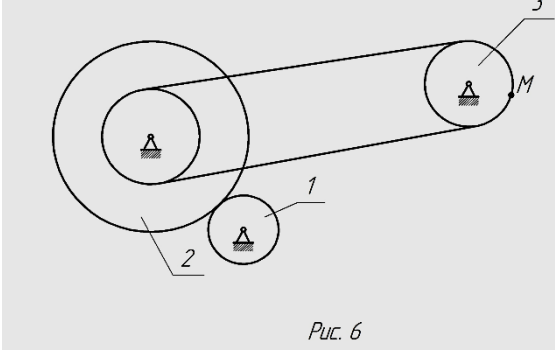
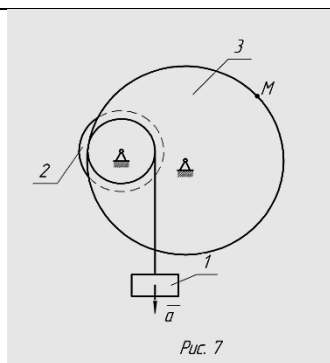
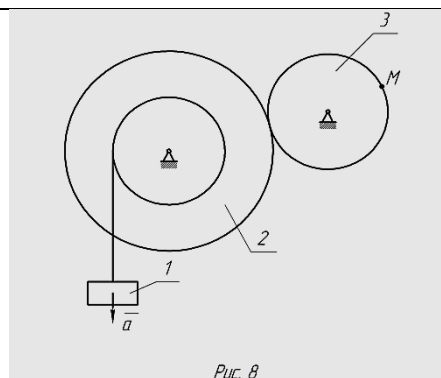
 Puc. 1 B 1	 Puc. 2 B 2
 Puc. 3 B 3	 Puc. 4 B 4
 Puc. 5 B 5	 Puc. 6 B 6

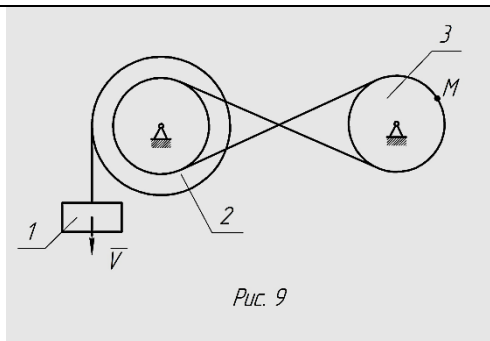
Таблица 4 (продолжение)



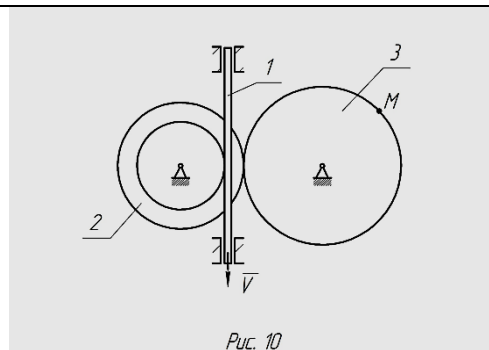
B 7



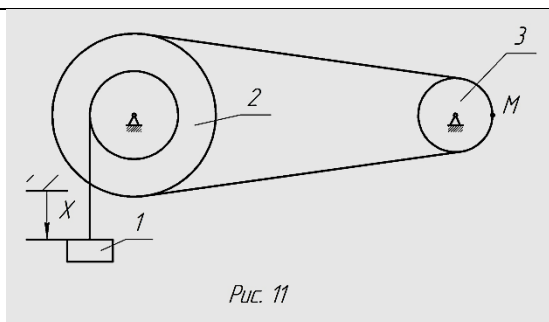
B 8



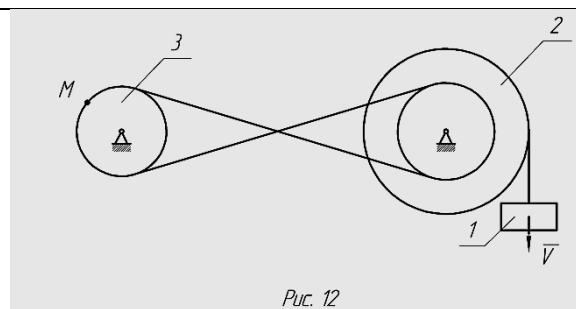
B 9



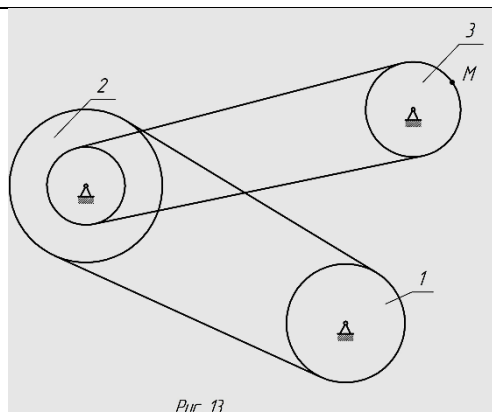
B 10



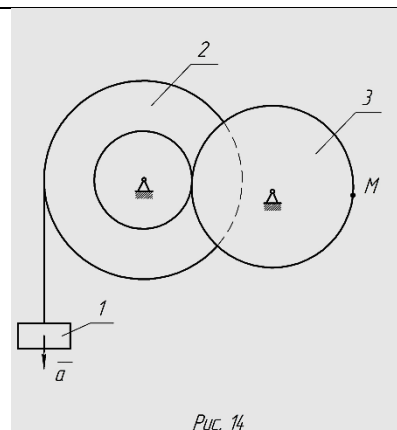
B 11



B 12

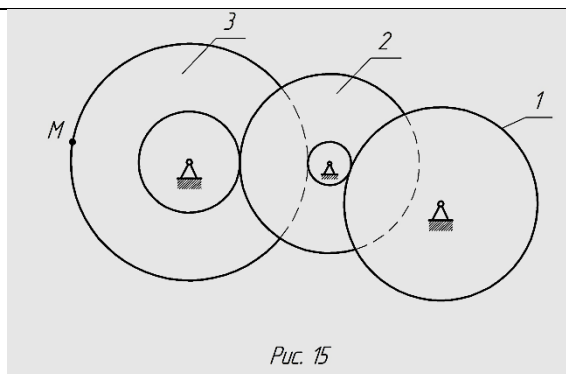


B 13

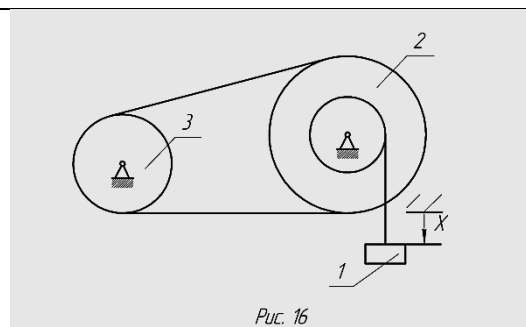


B 14

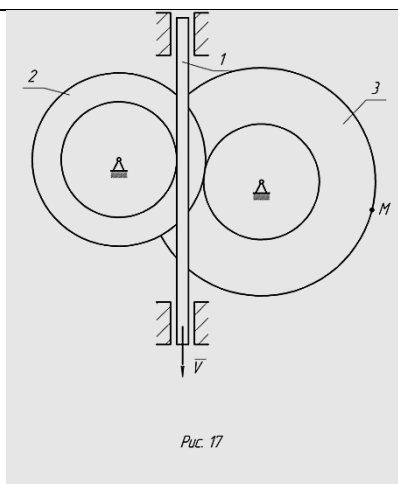
Таблица 4 (продолжение)



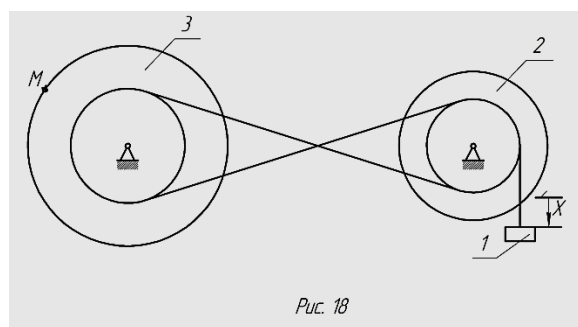
B 15



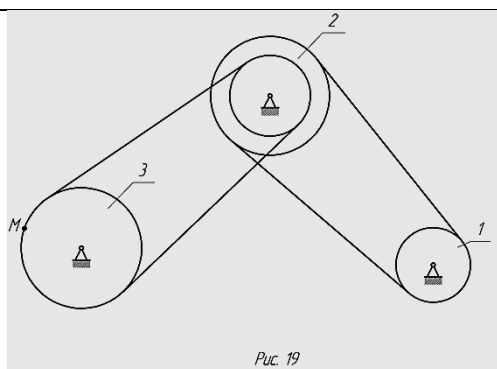
B 16



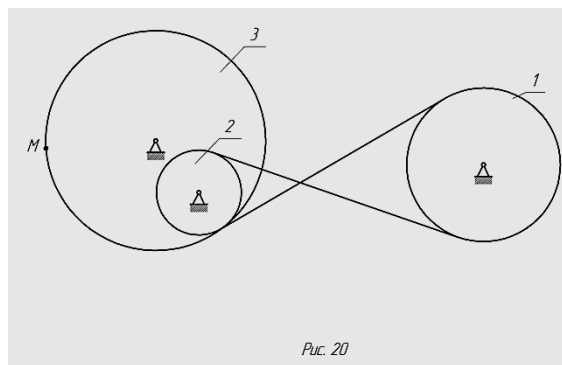
B 17



B 18

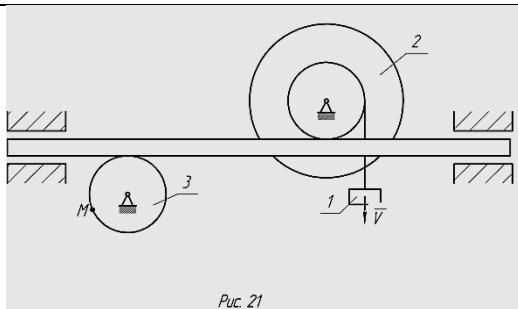


B 19

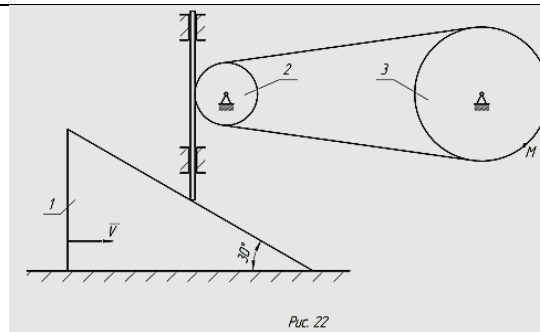


B 20

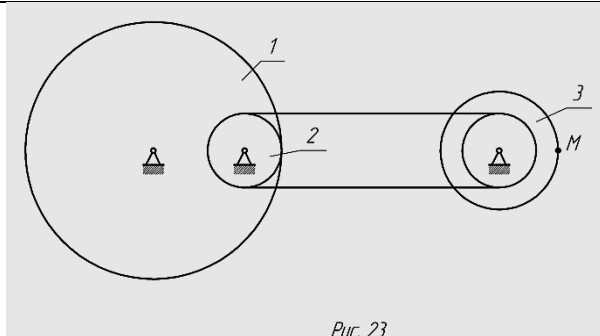
Таблица 4 (продолжение)



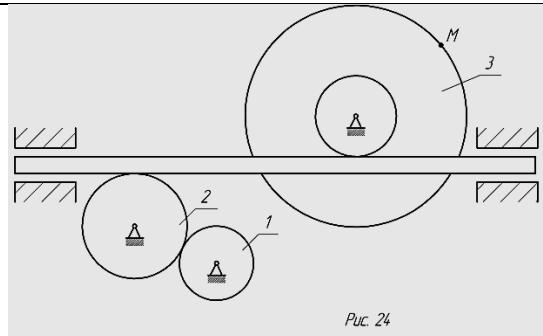
B 21



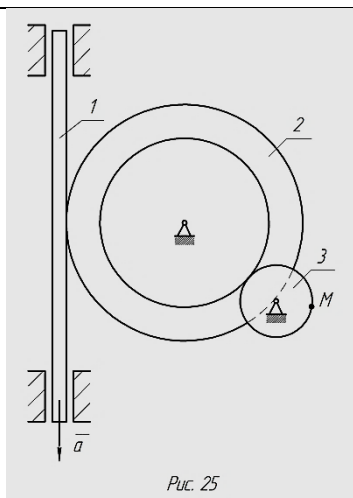
B 22



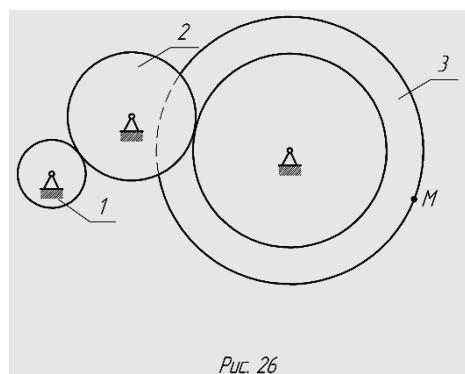
B 23



B 24

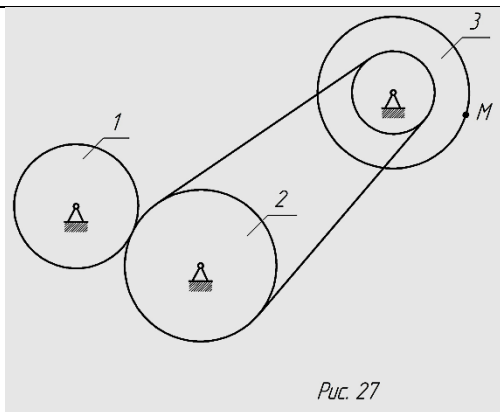


B 25

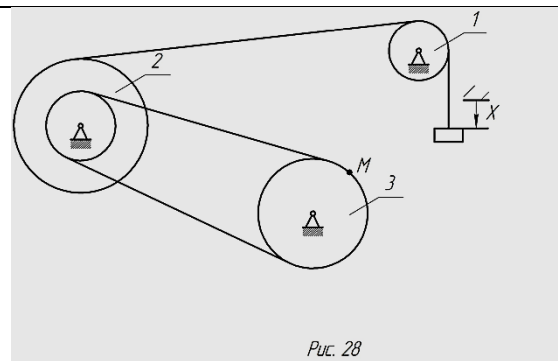


B 26

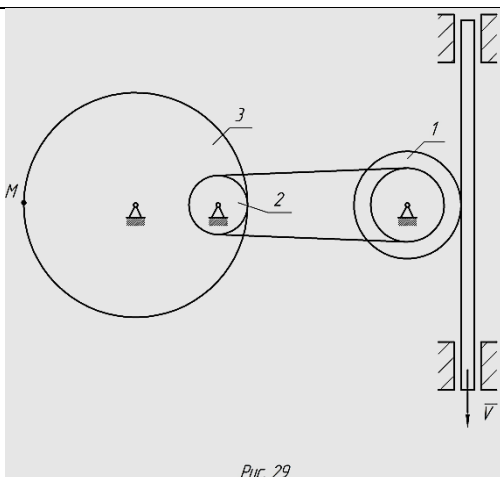
Таблица 4 (продолжение)



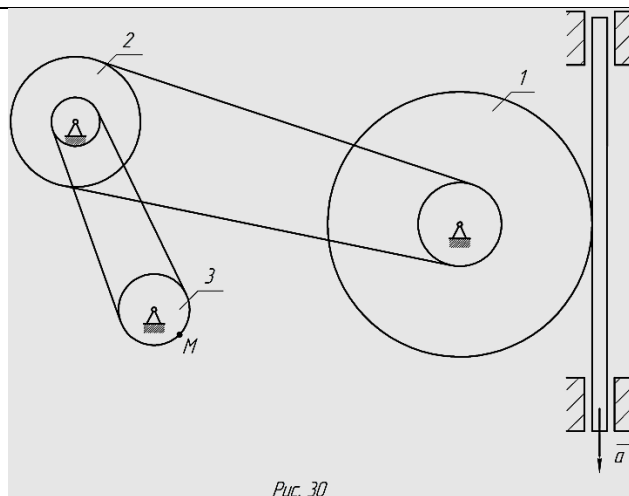
В 27



В 28



В 29



В 30

2.5. Пример решения задачи на тему

«Простейшие движения абсолютно твёрдого тела»

Дано: передаточный механизм (рис.25), который состоит из винтовой пары 1, клина 2, зубчатой рейки 3, двухступенчатого колеса 4 и ремённой передачи со шкивами 5 и 6. Длина рукоятки винта $R = 0,4$ м, скорость точки A равна $0,6t$ (м/с), перемещение $s_A = 1,2$ м, шаг винта $h = 0,04$ м, угол наклона плоскости клина 2 к горизонту $\alpha = 30^\circ$, радиусы колёс $r_4 = 0,6$ м; $R_4 = 0,8$ м; $r_6 = 0,8$ м.

Определить: Скорость и ускорение точки M в конце пройденного пути, если начальные условия равны нулю.

Решение: 1. Определяем время, за которое точка A пройдёт по дуге окружности радиуса R . В естественном способе задания движения точки: $\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt} = 0,6t$.

Разделяя переменные, получаем $\int ds = 0,6 \int t dt + C_1$, тогда $s = 0,3t^2 + C_1$. При $s_A(0) = 0, C_1 = 0, s = 0,3t^2$, перемещение точки A получаем: $s_A(0) = 0,3t^2$, соответственно время определяем из формулы:

$$t = \sqrt{\frac{s_A}{0,3}} = \sqrt{\frac{1,2}{0,3}} = 2 \text{ с}.$$

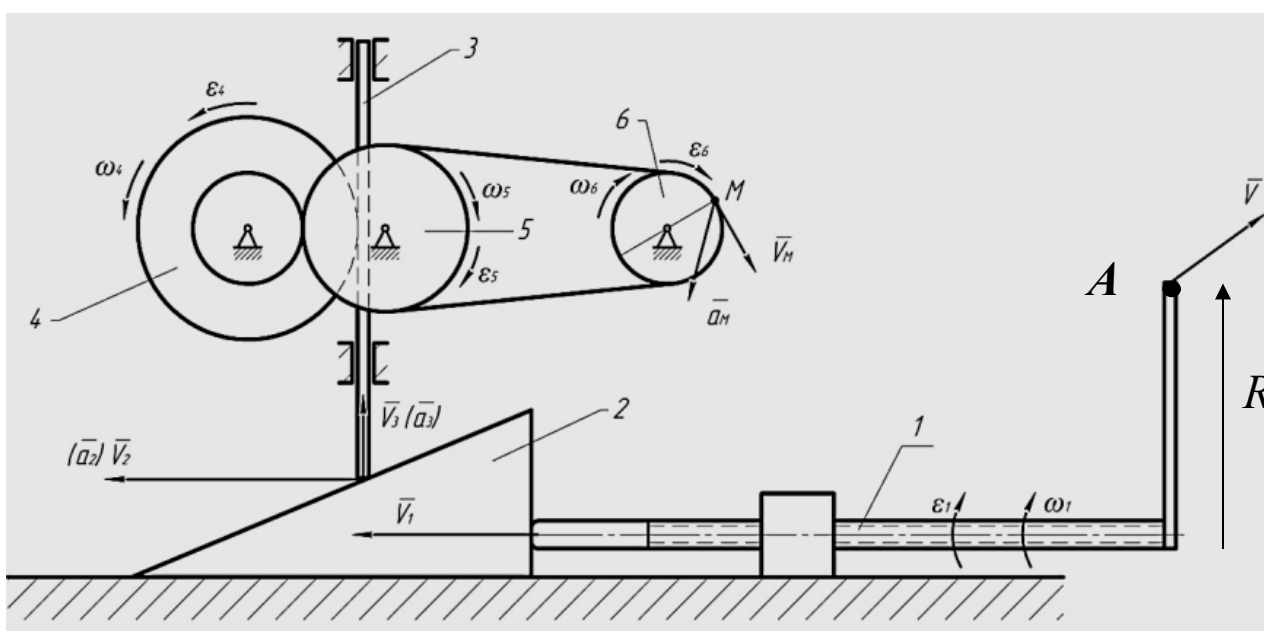


Рис. 25

2. Определяем линейную скорость по формуле $v = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ м/с}$.

Тогда угловая скорость винта находится по формуле (25), соответственно:

$$\omega_1 = v / R = 1,2 / 0,4 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Поступательная скорость винта, которая равна скорости клина 2,

вычисляется так: $v_1 = v_2 = \frac{h}{2\pi} \omega_1 = \frac{0,04}{2\pi} 3 \cong 0,02 \text{ м/с}$. В точке контакта клина 2

с рейкой 3 $v_3 / v_2 = \tan \alpha$, откуда $v_3 = v_2 \cdot \tan \alpha$.

При $\alpha = 30^\circ$ $v_3 = 0,02 \cdot \tan 30^\circ \cong 0,0115 \text{ м/с}$.

Скорость v_3 является окружностью для большого колеса 4, поэтому:

$$\omega_4 = v_3 / R_4 = 0,055 / 0,8 \cong 0,073 \text{ с}^{-1}.$$

Записываем пропорции:

$$\omega_5 / \omega_4 = r_4 / r_5, \text{ откуда } \omega_5 = (r_4 / r_5) \omega_4 = (0,6 / 1,2) 0,07 = 0,035 \text{ с}^{-1}.$$

$$\omega_6 / \omega_5 = r_5 / r_6, \text{ откуда } \omega_6 = (r_5 / r_6) \omega_5 = (1,2 / 0,8) 0,035 = 0,053 \text{ с}^{-1}.$$

3. Тангенциальное ускорение точки A определяется по формуле (18)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,6 \text{ м/с}^2;$$

Угловое ускорение из формулы (27) $\varepsilon_1 = a_\tau / r_6 = 0,6 / 0,4 = 1,5 \text{ с}^{-2}$.

Линейные ускорения находятся так: $a_1 = a_2 = \frac{h}{2\pi} \varepsilon_1 = \frac{0,04}{2\pi} 1,5 \cong 0,01 \text{ м/с}^2$;

$$a_3 / a_2 = \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } a_3 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,01 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 0,027 \text{ м/с}^2;$$

Далее определяются угловые ускорения двухступенчатого колеса 4 и ремённой передачи со шкивами 5 и 6: $\varepsilon_4 = a_3 / R_4 = 0,0027 / 0,8 = 0,034 \text{ с}^{-2}$.

Записываем пропорции:

$$\varepsilon_5 = (r_4 / r_5) \varepsilon_4 = (0,6 / 1,2) 0,034 = 0,017 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_6 = (r_5 / r_6) \varepsilon_5 = (1,2 / 0,8) 0,017 = 0,026 \text{ с}^{-2}.$$

4. Определяем кинематические параметры точки M , линейное ускорение

по формуле (28): $a_M = r_6 \sqrt{\varepsilon_6^2 + \omega_6^4} = 0,6 \sqrt{0,026^2 + 0,053^4} = 0,0157 \text{ м/с}$.

Угол между вектором полного ускорения точки и радиусом шкива 6 находится

$$\text{так: } \operatorname{tg} \mu = |\varepsilon_6| / \omega_6^2 = 0,026 / 0,053 = 0,049, \mu = 26,1^\circ.$$

5. Ответ: $\boxed{v_M = 0,042 \text{ м/с}, a_M = 0,049 \text{ м/с}^2, \mu = 26,1^\circ.}$

Все векторы указаны на рис.25

2.6. Контрольные вопросы, для оценки качества освоения раздела «Кинематика точки и простейших движений абсолютно твёрдого тела»

1. Что представляет собой система отсчета. Что называется вектором перемещения.
2. Перечислить основные кинематические параметры.
3. Задачи кинематики точки.
4. Перечислите и охарактеризуйте способы задания движения точки.
5. Составьте уравнение траектории движения тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с некоторой высоты. Сопротивление воздуха не учитывать.
6. Какое движение называется поступательным.
7. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек.
8. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнение движения, угловая скорость и угловое ускорение.
9. Что характеризуют тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Каковы их модули.
10. Что характеризуют скорость и ускорение. Дайте определения средней скорости и среднего ускорения.
11. Что называется угловой скоростью и угловым ускорением. Как определяются их направления.
12. Как можно классифицировать движение в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.
13. Какими формулами связаны между собой линейные и угловые характеристики движения.

3. ДИНАМИКА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Динамика изучает движение материальных объектов под действием приложенных к ним сил.

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщений результатов целого ряда опытов и наблюдений, посвященных изучению движения тел, и проверенные обширной общественно-производственной практикой человечества. Систематически законы динамики были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г. Сформулировать эти законы можно следующим образом.

Первый закон (закон инерции): *Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.*

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи – пребывать неизменно в движении. Развитие динамики как науки стало возможным лишь после того, как Галилеем был открыт этот закон (1638 г.) и тем самым опровергнута господствовавшая со времен Аристотеля точка зрения о том, что движение тела может происходить только под действием силы.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки, при действии на нее какой-нибудь силы, а именно: *Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

Если на точку действует одновременно несколько сил, то она, как это следует из закона параллелограмма сил, будут эквивалентны одной силе, т.е.

равнодействующей $\bar{R}$, равной геометрической сумме данных сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид:

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \quad (2)$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

Он играет большую роль в динамике системы материальных точек, как устанавливающий зависимость между действующими на эти точки внутренними силами.

При взаимодействии двух свободных материальных точек, они, согласно третьему и второму законам динамики, будут двигаться с ускорениями, обратно пропорциональными их массам.

Четвертый закон (закон независимости действия сил): *если на м.т. действуют одновременно несколько сил, то она получает ускорение, равное геометрической сумме ускорений, которые каждая сила сообщила бы точке, действуя по отдельности.*

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

- 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу (первая задача динамики);
- 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (вторая, или основная, задача динамики).

Методы решения задач динамики: исследование колебаний, составление общего уравнения и применение принципов динамики. Аналитическая механика устанавливает общие единые методы изучения движения и равновесия, применяемые для всех материальных систем. Но традиционное

построение курса теоретической механики во вузах оставляет слишком мало времени для изучения элементов аналитической механики и уравнений Лагранжа 2-го рода.

Элементы аналитической механики

Лагранж Жозеф Луи (25.01.1736 – 10.04.1813). Французский математик и механик, член Французской АН с 1772 г. В работе «Аналитическая механика» (1788) Лагранж подвел итог всему, что было создано в механике на протяжении 18 века.

1. Классификация механических связей

Механические связи – это ограничения, накладываемые на координаты или на скорости точек механической системы.

В аналитической механике связи описываются уравнениями и неравенствами. В первом случае они называются удерживающими, в другом – неудерживающими связями. Механическая система называется свободной, если положение отдельных точек и их скорости могут принимать произвольные значения. В противном случае – система несвободная.

Геометрическая связь налагает ограничение только на координаты точки. Уравнение такой связи имеет вид:

$$f(x; y; z; t; C) = 0; \quad (3)$$

где $x; y; z$ – координаты точки, t – параметр времени, C – константа.

Кинематическая связь (неголономная или дифференциальная) налагает ограничение на координаты точки и её скорости. Уравнение такой связи имеет вид

$$f(x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}; t; C) = 0; \quad (4)$$

Стационарная или склерономная связь налагает ограничение только на координаты точки и имеет уравнение связи, которое не содержит время:

$$F(x; y; z; C) = 0; \quad (5)$$

Нестационарная или реономная связь имеет такое же уравнение, как геометрическая связь, но содержит время:

$$F(x; y; z; t; C) = 0; \quad (6)$$

Геометрические связи и интегрируемые кинематические связи составляют *голономные связи*. Механическая система, которая имеет такие связи, называется голономной системой.

Неинтегрируемые кинематические связи образуют *неголономные связи*. Соответственно этим видам связей систему называют неголономная механическая система.

Связь называется *двухсторонней (удерживающей)*, если она описывается уравнением – строгим равенством

$$[f(x; y; z) = 0]; \quad (7)$$

Односторонняя (неудерживающая) связь описывается неравенством

$$[f(x; y; z) \leq 0 \text{ или } f(x; y; z) \geq 0]; \quad (8)$$

При двухсторонней связи точка не может покинуть связь, как в прямом, так и в обратном направлениях.

2. Возможные перемещения

Возможные перемещения – это виртуальные бесконечно малые перемещения (δx , $\delta \varphi$, δs , δr) точек механической системы, которые позволяют совершать наложенные на систему связи.

Если механическая система имеет стационарные (склерономные) связи, то действительные перемещения материальных точек будут совпадать с возможными перемещениями этих же точек.

При реономных связях действительные перемещения материальных точек не совпадают с возможными перемещениями.

Если работа реакций связи на возможном перемещении равна нулю, то такая связь называется *идеальной (совершенной) связью*.

Если механическая система находится в покое и имеет стационарные (склерономные), идеальные (совершенные) и двухсторонние (удерживающие) связи, то сумма работ активных сил на возможных перемещениях равна нулю –

это утверждение определяет принцип возможных перемещений в виде уравнения

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^A = 0, \quad (9)$$

где δA_k^A – элементарная работа k -той активной силы на возможном перемещении для системы с идеальными связями, находящейся в равновесии.

3. Обобщенные координаты

Обобщёнными координатами называются независимые величины, линейные или угловые, заданием которых однозначно определяется положение материальных точек механической системы в пространстве или на плоскости. Обобщенные координаты зависят от параметра времени: $q = q(t)$ – линейная обобщённая координата; $\varphi = \varphi(t)$ – угловая обобщённая координата. Первые производные по времени от обобщённых координат называются обобщёнными скоростями: $\dot{q} = \dot{q}(t); \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

Число степеней свободы s механической системы определяет количество обобщённых координат.

Для математического маятника, который совершает колебания в вертикальной плоскости, положение точки можно зафиксировать только углом $\varphi = \varphi(t)$ – обобщённой угловой координатой. Эта система имеет две степени свободы, поэтому и вводятся две обобщённые координаты: $\varphi = \varphi(t)$ – угол отклонения от вертикали нити вместе с точкой и $q = q(t)$ – поступательное перемещение тела вдоль горизонтальной плоскости.

Вычисление кинетической энергии механической системы через обобщённые координаты

При наличии обобщённых координат в механической системе, радиус-вектор $\vec{r}$ дающий положение i -той точки будет функцией этих координат и параметра времени t , соответственно получаем

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad \text{где} \quad (10)$$

n – количество материальных точек системы. Учитываем, что

$$K = 3n - s, \quad \text{где} \quad (11)$$

K – число степеней свободы (равное числу независимых обобщённых координат), s – количество геометрических связей. Тогда обобщённые координаты с K степени свободы $q_j (q_1, q_2, \dots, q_K)$, где $j = 1 \dots K$.

$$\text{Скорость } i\text{-той точки: } \bar{V}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_K} \dot{q}_K + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \quad (12)$$

Соответственно возможные перемещения i -той точки в виде вариаций $\bar{r}_i$ записываем в виде

$$\delta \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_K} \delta q_K \quad \text{при фиксированном } t, \quad (13)$$

где $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_K$ – обобщённые возможные перемещения.

Кинетическая энергия механической системы записывается как

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \bar{V}_i \bar{V}_i = T_0 + T_1 + T_2, \quad (14)$$

$$\text{где с учётом (12)} \quad T_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = a_0; \quad (15)$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^K \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^K a_j \dot{q}_j, \quad \text{где } a_j = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}; \quad (16)$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \sum_{(j,K)} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_K} \dot{q}_j \cdot \dot{q}_K = \frac{1}{2} \sum_{(j,K)} a_{jK} \dot{q}_j \cdot \dot{q}_K, \quad (17)$$

$$\text{где } a_{jK} = a_{pK} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_K}. \quad (18)$$

Тогда

$$T = a_0 + \sum_{j=1}^K a_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,K} a_{jK} \dot{q}_j \cdot \dot{q}_K, \quad (19)$$

где a_{jK} – коэффициенты инерции (масса или моменты инерции).

Если механическая система имеет стационарные (склерономные) связи, то $a_0 = a_j = 0$, тогда формулу (19) записываем в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,K} a_{jK} \dot{q}_j \cdot \dot{q}_K. \quad (20)$$

Например, если система имеет две степени свободы $[q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t)]$, то

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2). \quad (21)$$

4. Обобщенные силы

Для голономной механической системы, которая имеет стационарные (склерономные) связи, возможное перемещение радиус-вектора $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_K)$ при фиксированном значении времени ($\delta t = 0$) зависит только от δq_j и его записываем в следующем виде

$$(\delta \bar{r}_i)_j = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (22)$$

где δq_j – возможное приращение обобщённой координаты $q_j = q_j(t)$; $j = 1 \dots K$.

Указываем выражение для работы заданных сил на возможном перемещении i -той точки

$$(\delta A_K)_i = \sum_{j=1}^n \bar{F}_i \cdot (\delta \bar{r}_i)_j = \sum_{j=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (23)$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = Q_j - \text{обобщённая сила активных сил} \quad (24)$$

$$\text{или } Q_j = \frac{(\delta A_i)_j}{\delta q_j} \quad (25)$$

Формула (25) позволяет выполнять практическое вычисление обобщённой силы при решении задач. Обобщённая сила Q_j может иметь размерность силы [Н], или размерность момента силы [Н·м]. Если механическая система консервативна, то обобщённую силу можно вычислять по формуле

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (26)$$

где $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – потенциальная энергия системы.

5. Уравнения Лагранжа второго рода

Рассмотрим голономную механическую систему, которая имеет стационарные (склерономные), идеальные и двусторонние связи. В системе будут действовать активные силы и реакции связей.

Запишем основное уравнение динамики для механической системы

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \bar{N}_i, \quad (27)$$

где m_i – масса i – той точки механической системы;

$$\bar{a}_i = \frac{d\bar{V}_i}{dt} - \text{абсолютное ускорение точки;}$$

$$\bar{F}_i - \text{активная сила; } \bar{N}_i - \text{реакция связи.}$$

При выводе уравнений Лагранжа второго рода в общем уравнении динамики (уравнении Даламбера-Лагранжа) переходят к обобщённым координатам. Откуда получают

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad \text{при } j = 1 \dots K, \quad (28)$$

таких уравнений может быть $= K$, где $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i V_i^2 = T$ – кинетическая энергия механической системы как функция обобщённых координат и обобщённых скоростей.

q_j – обобщённая координата,

$\dot{q}_j$ – обобщённая скорость,

Q_j – обобщённая сила.

Уравнения (28) являются дифференциальными уравнениями движения голономной механической системы в обобщённых координатах или уравнениями Лагранжа второго рода.

3.1. Основные физические величины, применяемые в аналитической механике

φ – угол поворота [рад];

ω или $\dot{\varphi}$ – угловая скорость тела [с^{-1}];

ε или $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела [с^{-2}];

v или $\dot{x}$ или $\dot{y}$ или $\dot{s}$ – линейная скорость точки [м/с];

a или $\ddot{x}$ или $\ddot{y}$ или $\ddot{z}$ – линейное ускорение точки [м/с²];

a^{τ} – касательное (тангенциальное) ускорение [м/с²];

a^n – нормальное (центростремительное) ускорение [м/с²];

$\delta x, \delta \varphi, \delta s, \delta r$ – возможное перемещение [м];

P или G – вес тела [Н];

s или K – степень свободы ;

F_k – активная сила [Н];

N_k – реакция связи [Н];

m_k – масса k – той точки механической системы [кг];

δA – элементарная или виртуальная работа пары сил или силы [Дж];

T – кинетическая энергия [Дж];

Q – обобщенная сила [Н];

V_r – относительная скорость [м/с];

a_r – относительное ускорение [м/с²];

f_{cm} – статическая деформация пружины

Π – потенциальная энергия [Дж];

k – циклическая частота свободных колебаний [с⁻¹];

$C_1, C_2, \dots, C_6$ – постоянные интегрирования [размерность зависит от уравнения: м/с, м/с²];

A – амплитуда колебаний [м];

c – коэффициент жесткости [Н/м]; ;

f – коэффициент трения;

J_{Oz} – момент инерции относительно оси Oz [кг·м²];

M – вращающий момент [Н·м];

МЦС (p) – мгновенный центр скоростей (полюс);

3.2. Варианты заданий по теме «Динамика. Аналитическая механика».

ЗАДАЧА 1

Дано: Груз P_1 поднимается посредством полиспаста (рис. 1) под действием падающего груза P . Вес блока 1 равен G , а блока 2 равен Q . Блоки считать однородными дисками.

Определить: Ускорение поднимаемого груза P_1 .

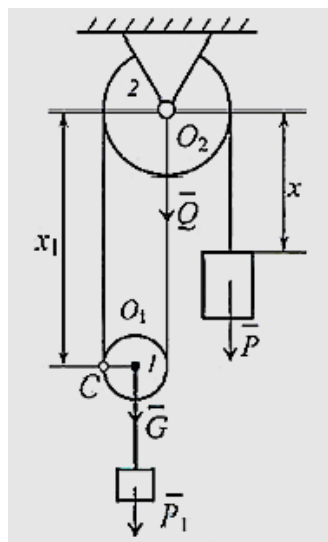


Рис.1

ЗАДАЧА 2

Дано: Система, состоящая из трёх шкивов, соединённых ремённой передачей. Шкивы считать однородными цилиндрами с радиусами: $r_1, r_2 = 0,5 r_1, r_3 = r_1/3$ и весами $P_1, P_2 = P_1/4, P_3 = P_1/9$, Массой ремня пренебречь.

Определить: Угловое ускорение ведущего шкива I ременной передачи, изображенной на (рис. 2), если к ведущему шкиву I приложен вращающий момент M_1 , а к шкиву II – момент сопротивления M_2 .

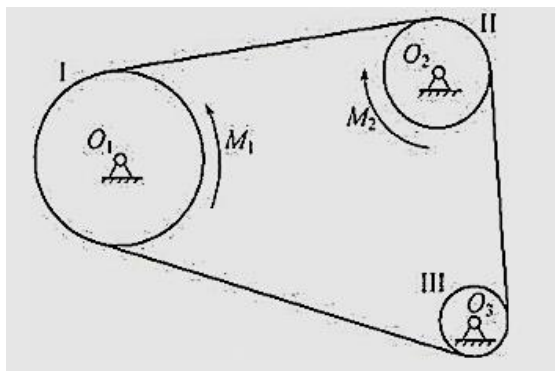


Рис.2

ЗАДАЧА 3

Дано: Кривошипно-шатунный механизм расположен в горизонтальной плоскости и состоит из кривошипа OA , шатуна AB , представляющих собой однородные стержни с одинаковыми длинами l и массами m (рис.3), а также

ползуна. На ползун B действует сила F . Момент сил сопротивления, приложенных к кривошипу, равен M .

Составить: Дифференциальное уравнение для угла поворота φ кривошипа, пренебрегая массой ползуна.

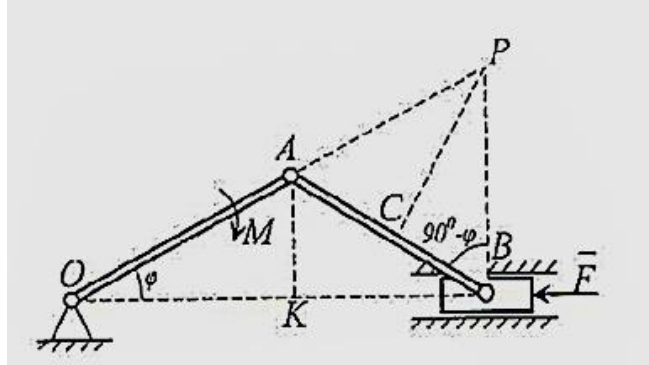


Рис. 3

ЗАДАЧА 4

Дано: Призма весом P_1 с углом при основании α лежит на гладкой горизонтальной плоскости. На боковой плоскости находится однородный цилиндр радиусом r и весом P_2 .

Определить: Движение призмы и цилиндра (рис. 4).

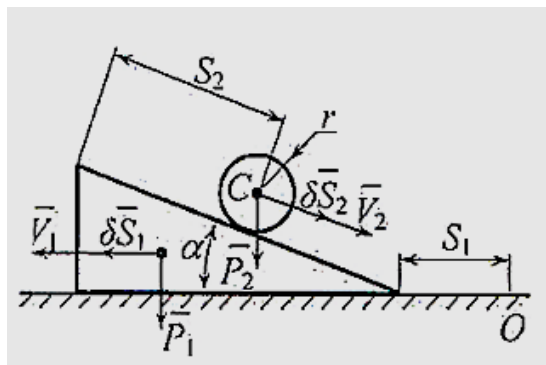


Рис.4

ЗАДАЧА 5

Дано: Три одинаковых сплошных однородных цилиндра A , B и C весом P каждый движутся так, что цилиндр A , обмотанный нерастяжимой нитью, вращается вокруг своей неподвижной оси, причем свободный конец нити прикреплен к центру цилиндра C , катящегося без скольжения по наклонной

плоскости, образующей с горизонтом угол α . Другая часть нити обмотана вокруг цилиндра B , падающего под действием силы тяжести (см. рис 5).

Определить: Ускорение оси цилиндра C и натяжение нити на участке DK , считая, что оси цилиндров C и B перемещаются параллельно друг другу. При каком угле α цилиндр C не будет катиться по наклонной плоскости, если начальная скорость его оси равна нулю?

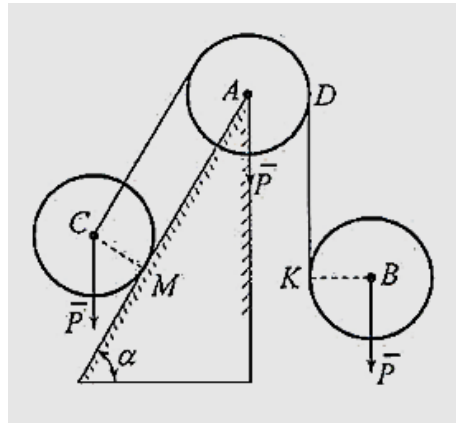


Рис.5

ЗАДАЧА 6

Дано: По гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , скользит без трения платформа весом $P=4Q$, а по платформе (рис.6) скатывается без скольжения тележка, вес которой без колес равен $G = 3Q$, причем вес всех колес Q . Колеса считать сплошными однородными цилиндрами. К платформе приложена постоянная сила сопротивления F , параллельная наклонной плоскости.

Определить: Ускорение тележки. При каком значении силы F тележка будет скатываться равномерно.

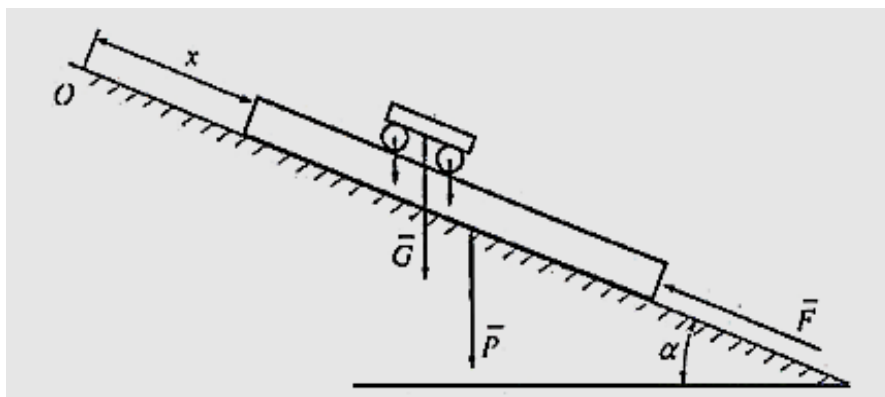


Рис.6

ЗАДАЧА 7

Дано: По грани треугольной призмы, наклоненной к горизонту под углом α скатывается без скольжения однородный цилиндр A весом P и посредством нерастяжимой нити, прикрепленной к оси цилиндра A поднимает груз B весом Q , скользящий по гладкой вертикальной грани призмы (рис. 7). Вес призмы G . Призма помещена на гладкую горизонтальную плоскость.

Определить: Ускорение призмы, относительное ускорение груза B и силу давления цилиндра и груза на грани призмы.

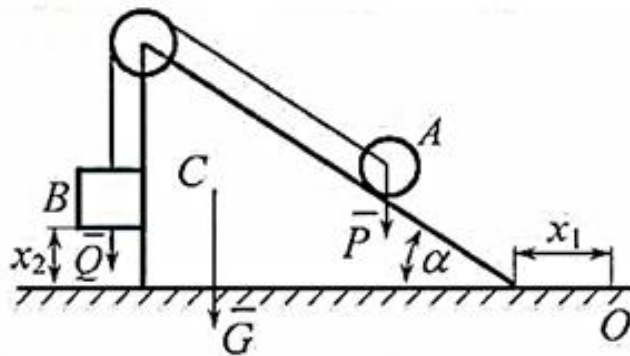


Рис. 7

ЗАДАЧА 8

Дано: Груз A весом P прикреплен пружиной жесткостью c к платформе, по которой он может двигаться без трения (рис. 8). Платформа имеет четыре колеса, принимаемых за однородные диски радиусом r . Вес платформы равен $8P$, вес каждого колеса $\frac{1}{2}P$. Колёса катятся без скольжения.

Определить: Перемещение платформы, если груз в начальный момент был отклонен от положения равновесия на расстояние S и отпущен без начальной скорости. При $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Трением качения пренебречь.



Дано: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, $m_4 = 3$ кг, $l = 0,6$ м, $c = 36$ н/см,

$Z_0 = 0,2$ см, $\dot{Z}_0 = 0$. Приняты следующие обозначения:

- 1 – груз массой m_1 ;
2 – блок массой m_2 и радиусом r_2 (сплошной однородный диск);
3 – сплошной однородный диск массой m_3 и радиусом r_3 ;
4 – тонкий однородный стержень массой m_4 и длиной l ;
5 – стержень масса, которого не учитывается;
 c – коэффициент жесткости пружины;

z_0 - начальное отклонение груза 1 по вертикали от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины;

$\dot{z}_0$ - проекция начальной скорости $\overline{\dot{V}}_0$ груза 1 на вертикальную ось.

Определить: Частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей (см. рис. 9). Уравнение движения груза 1 отнести к оси OZ , приняв за начало отсчета положение покоя груза 1 (при статической деформации пружин). Найти также амплитуду колебаний груза 1.

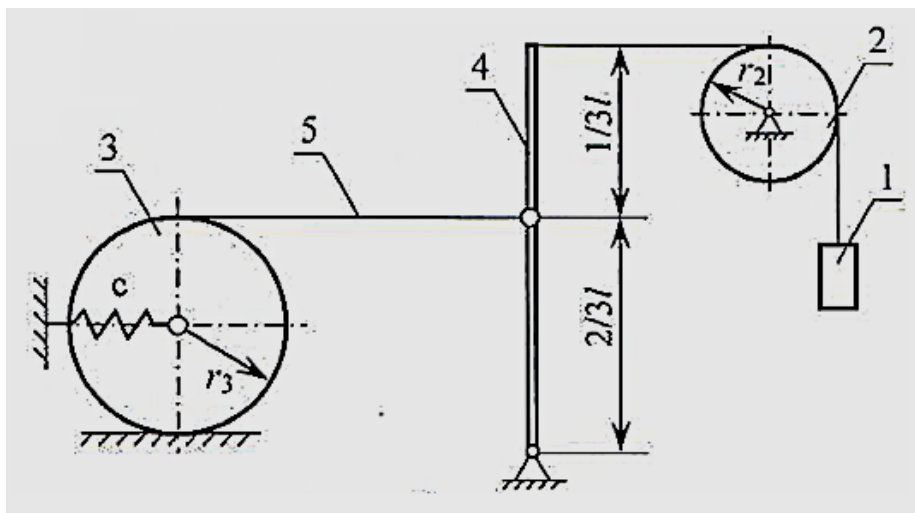


Рис.8

ЗАДАЧА 10

Дано: Через блок перекинута нить с двумя грузами A и B массой m_1 и m_2 на концах (рис.10). Движение начинается из состояния покоя.

Определить: Движение системы, пренебрегая массой нити и блока, считая, что блок подвешен на вертикальной пружине с жесткостью c (такая схема учитывает влияние упругих деформаций оси блока).

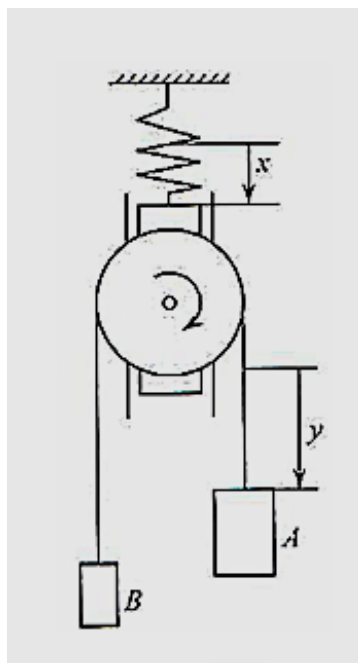


Рис.1

3.3. Примеры решения задач по теме «Динамика. Аналитическая механика»

Структура уравнений Лагранжа второго рода

Окончательный вид уравнений (28) определяется зависимостью кинетической энергии системы от обобщённых координат и скоростей и силами, действующими на систему. Количество уравнений (28) определяется числом степеней свободы s (или K) механической системы.

При решении задач посредством применения уравнений Лагранжа второго рода нужно придерживаться следующей последовательности:

- 1) Установить число степеней свободы системы.
- 2) Выбрать систему обобщённых координат. Число обобщённых координат равно числу степеней свободы.

Общего рецепта, правила для выбора обобщённых координат не существует, всё зависит от умения и навыка, но удачный выбор системы координат может весьма существенно облегчить решение задачи. А также обобщённые скорости каждой материальной точки системы.

- 3) Составить выражение кинетической энергии системы. Через обобщённые координаты и обобщённые скорости вычислить кинетическую энергию системы и привести её к виду (19) или (20).

- 4) Определить и вычислить по формуле (25) обобщённые силы.

- 5) Составить уравнения Лагранжа второго рода. В результате система уравнений Лагранжа второго рода представляет собой систему из k обыкновенных линейных или нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщённых координат.

- 6) Произвести интегрирование полученных уравнений и определить постоянные интегрирования, исходя из начальных условий задач.

- 7) Если требуется, по условиям задачи, определить реакции связей.

ЗАДАЧА 1

Дано: Механическая система, состоящая из сплошного однородного цилиндра весом P и шарнирно прикрепленного к его оси стержня AB длиной l и весом p (рис. 26). Цилиндр находится на шероховатой горизонтальной плоскости, вдоль которой может катиться без скольжения.

Составить: Дифференциальные уравнения движения и найти закон малых колебаний механической системы.

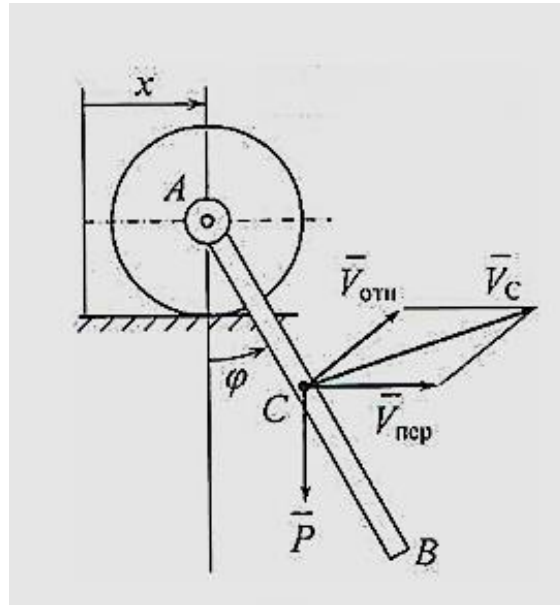


Рис. 26

Решение: Система имеет две степени свободы и ее положение определяется параметрами x и φ ($q_1 = x$ – расстояние цилиндра от его начального положения, $q_2 = \varphi$ – отклонение стержня от вертикали).

Вычисляем сначала кинетическую энергию цилиндра $T_{\text{ц}}$ и стержня $T_{\text{ст}}$.

По теореме Кёнига

$$T_{\text{ц}} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} V_A^2 + \frac{1}{2} \frac{PR^2}{2g} \omega_{\text{ц}}^2;$$

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \frac{p}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{pl^2}{12g} \omega_{\text{ст}}^2,$$

где множители перед $\omega_{\text{ц}}^2$ и $\omega_{\text{ст}}^2$ являются соответственно моментами инерции цилиндра и стержня относительно осей, проходящих через точки A и C перпендикулярно к плоскости (рис. 26).

Выражаем все скорости через $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$ и учитывая, что $\bar{V}_C = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}$, где численно $V_{отн} = 0,51\dot{\varphi}$, $V_{пер} = V_A$, имеем

$$V_A = \dot{x}; \quad \omega_{Ц} = \frac{\dot{x}}{R}; \quad \omega_{cm} = \dot{\varphi}; \quad V_C^2 = \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + l\dot{\varphi}\dot{x} \cdot \cos\varphi.$$

В результате окончательно получаем

$$T = T_{ц} + T_{cm} = \frac{3}{4} \frac{P}{g} \dot{x}^2 + \frac{p}{2g} \left(\dot{x}^2 + l\dot{\varphi}\dot{x} \cos\varphi + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right).$$

Отсюда

$$\partial T / \partial x = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3P + 2p}{2g} \dot{x} + \frac{pl}{2g} \dot{\varphi} \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{p}{2g} l\dot{x}\dot{\varphi} \sin\varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{p}{g} \left(\frac{1}{2} \dot{x} \cos\varphi + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi} \right).$$

Для вычисления обобщенных сил сообщаем сначала системе перемещение, при котором x получает приращение δx , а $\varphi = \text{const}$.

Получаем $\delta A_1 = 0$ и, следовательно, $Q_1 = 0$. Сообщаем теперь другое, независимое от первого перемещение, при котором φ получает приращение $\delta\varphi$, а $x = \text{const}$, найдем

$$\delta A_2 = -pl \cdot \sin\varphi \delta\varphi/2,$$

Следовательно

$$Q_2 = -pl \cdot \sin\varphi/2.$$

Составляя теперь уравнения Лагранжа, получим после сокращений

$$\frac{d}{dt} [(3P + 2p)\dot{x} + pl\dot{\varphi} \cos\varphi] = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \cos\varphi + \frac{2}{3} l\dot{\varphi} \right) + \dot{x}\dot{\varphi} \sin\varphi = -g \sin\varphi.$$

Таковы искомые дифференциальные уравнения движения системы.

Чтобы найти закон малых колебаний, принимаем, считая угол φ малым,

$\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и пренебрегаем членом $\dot{x}\dot{\varphi}$, содержащим произведения малых величин. Тогда окончательно получаем следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы

$$(3P + 2p)\ddot{x} + pl\ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x} + \frac{2}{3}l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Исключаем из этих равенств x , находим для определения φ уравнение

$$\ddot{\varphi} = k^2\varphi = 0, \text{ где } k^2 = \frac{3(3P + 2P)}{6P + p} \frac{g}{l}.$$

Интегрируем уравнение при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, тогда получаем

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

После этого, интегрируем первое из уравнений и полагая при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, тогда находим

$$x = \frac{p}{3P + 2p} l\varphi_0 (1 - \cos kt).$$

Уравнения определяют закон малых колебаний системы, частота которых равна k . Такой сравнительно простой результат для системы с двумя степенями свободы получился здесь благодаря тому, что $Q_1 = 0$. В общем же случае при

$Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$ колебания системы с двумя степенями свободы выглядят значительно сложнее.

ЗАДАЧА 2

Дано: Механическая система, показанная на (рис.27), состоит из однородного круглого цилиндра 1 массой m_1 и радиусом r , однородного стержня 2 длиной l и массой m_2 , к которому в точках A и B шарнирно прикреплены ползуны 5 и 6 массами m_5 и m_6 , а также пружин 3 и 4, коэффициенты жесткости которых c_3 и c_4 соответственно. Цилиндр без скольжения катается по горизонтальной плоскости. К нему приложена пара сил с моментом $M_1(t)$.

Составить: Дифференциальные уравнения движения системы, пренебрегая сопротивлением качению цилиндра, трением в шарнирах и направляющих, а также массой пружин.

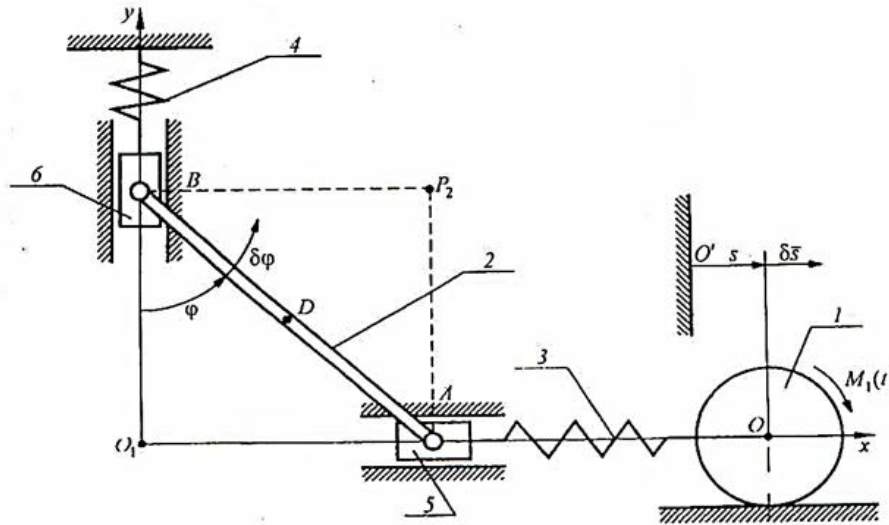


Рис.27

Решение: Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем перемещение S центра масс цилиндра 1 и угол поворота φ стержня 2. Полагаем, что при $S = 0$ и $\varphi = 0$ пружины 3 и 4 не деформированы.

Уравнения Лагранжа второго рода для данной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий цилиндра 1, стержня 2 и ползунов 5 и 6:

$$T = T_1 + T_2 + T_5 + T_6.$$

Движение цилиндра плоское, поэтому $T_1 = (m_1 V_0^2 / 2) + (J_{Oz} \omega_1^2 / 2)$.

Так как

$$V_0 = \dot{S}; J_{Oz} = \frac{m_1 r^2}{2}; \omega_1 = \frac{\dot{S}}{r}, \text{ то } T_1 = \frac{3m_1 \dot{S}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия стержня 2 определяется по формуле

$$T_2 = (m_2 V_D^2 / 2) + (J_{Dz} \omega_2^2 / 2).$$

Скорость центра масс стержня $V_D = \omega_2 \cdot DP_2$, где P_2 – МЦС стержня.

Принимая во внимание, что $DP_2 = l/2$, $J_{Dz} = m_2 l^2 / 12$, $|\omega_2| = |\dot{\varphi}|$, получаем

$$T_2 = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{6}.$$

Ползуны движутся поступательно и, следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5 V_A^2}{2} = \frac{m_5 \dot{x}_A^2}{2} = \frac{m_5 l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2}{2};$$

$$T_6 = \frac{m_6 V_B^2}{2} = \frac{m_6 \dot{y}_B^2}{2} = \frac{m_6 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и обобщенные скорости, равна

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 \dot{s}^2 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_5 l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + m_6 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right).$$

Вычислим производные от кинетической энергии системы

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3}{2} m_1 \dot{s}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{s};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = l^2 \sin 2\varphi (m_6 - m_5) \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi} + l^2 (m_5 \cos^2 \varphi + m_6 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi};$$

Для нахождения обобщенных сил Q_s и Q_φ разделим приложенные к системе силы на потенциальные и непотенциальные (потенциальными для данной системы являются силы тяжести и упругости пружин, а непотенциальными – силы пары с моментом $M_1(t)$). Далее каждую обобщенную силу определим как сумму

$$Q_i = Q_i^\Pi + Q_i^{\text{НП}},$$

где

$$Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; Q_i^{\text{НП}} = \frac{\left[\sum_{k=1}^6 \delta A(\bar{F}_k) \right]_i}{\delta q_i}.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_3 (S - l \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_4 l^2 (1 - \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_2 g l (1 - \cos \varphi) - m_6 g l (1 - \cos \varphi).$$

Тогда

$$Q_s^{\Pi} = -c_3 (S - l \sin \varphi);$$

$$Q_{\varphi}^{\Pi} = c_3 l (S - l \sin \varphi) \cos \varphi - c_4 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi + g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi.$$

$$Q_s^{\text{НП}} = M_1 \delta \varphi_1 / \delta S = M_1 / r; \quad Q_{\varphi}^{\text{НП}} = 0.$$

Таким образом

$$Q_s = -c_3 (S - l \sin \varphi) + M_1 / r;$$

$$Q_{\varphi} = c_3 l (S - l \sin \varphi) \cos \varphi - c_4 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi + g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi.$$

Подставляя значения производных от кинетической энергии и выражения для обобщенных сил Q_s и Q_{φ} в уравнения, получаем дифференциальные

$$\text{уравнения движения системы} \quad \frac{3}{2} m_1 \ddot{S} + c_3 S - c_3 l \sin \varphi = \frac{M_1}{r};$$

$$\frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi} + l^2 (m_5 \cos^2 \varphi + m_6 l^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} -$$

$$-c_3 l (S - l \sin \varphi) \cos \varphi - c_4 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi + g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi = 0.$$

ЗАДАЧА 3

Дано: Тело массой m_1 с помощью пружины, жесткость которой c_1 соединено с массивным основанием, совершающим поступательные периодические колебания относительно неподвижной системы координат XOZ (рис. 28). С телом 1 с помощью пружины жесткостью c соединено тело 2 массой m_2 , на котором установлена электрическая машина 3 с неуравновешенной массой m ротора, создающей периодическую силу,

воздействующую на тело массой m_2 . Коэффициенты вязкого трения в пружинах f_1 и f_2 .

Составить: Дифференциальные уравнения движения двухмассовой колебательной системы с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Воздействие тела 3 на колебательную систему называют силовым возбуждением, а воздействие основания – кинематическим возбуждением колебаний.

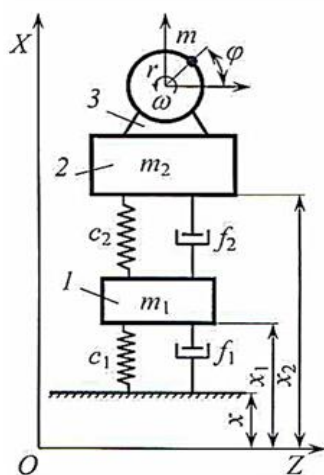


Рис.28

Решение:

1. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как положение каждой массы в системе координат XOZ (рис. 28) характеризуется одной независимой координатой.

2. Заданное движение основания обозначим координатой x . Положение тел с массами m_1 и m_2 по отношению к неподвижной системе координат зададим координатами x_1 и x_2 соответственно. Таким образом, обобщенные координаты $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

3. Обобщенные силы в данной задаче обусловлены силовым возбуждением электрической машины, воздействием упругих сил и сил вязкого трения пружин на тела 1 и 2.

Силовое возбуждение машины 3 приложено непосредственно к телу 2 и обусловлено проекцией центробежной силы на ось OX

$$F_2^u = m \omega^2 r \sin \varphi ,$$

где ω – угловая скорость вращения машины, r – радиус, на котором расположена неуравновешенная масса, $\varphi = \omega t$ – угол поворота ротора машины.

Таким образом: $F_2^u = m \omega^2 r \sin \varphi = m \omega^2 r \sin \omega t = H \sin \omega t$,

где $H = m \omega^2 r$ – амплитуда колебаний возбуждаемой системы.

Упругие силы пружин пропорциональны: первой пружины – её смещению относительно основания, т. е. $(x_1 - x)$, а второй $(x_2 - x_1)$, поэтому потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (x_1 - x)^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2 .$$

Отсюда $Q_1 = \partial \Pi / \partial x_1 = -c_1 (x_1 - x) + c_2 (x_2 - x_1)$;

$$Q_2 = \partial \Pi / \partial x_2 = -c_2 (x_2 - x_1) .$$

Здесь c_1 и c_2 – жесткости пружин.

Силы вязкого трения пружины действуют одновременно с силами упругости и пропорциональны относительным скоростям $(\dot{x}_1 - \dot{x})$, $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$.

Следовательно, $F_{1mp} = -f_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}) + f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$;

$$F_{2mp} = -f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) .$$

где f_1 и f_2 – коэффициенты сил трения.

4. Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$.

5. Частные производные имеют вид $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1$;

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

6. Подставив найденные величины в уравнение Лагранжа II рода, получим:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 (x_1 - x) + c_2 (x_2 - x_1) - f_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}) + f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1);$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1) - f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + H \sin \omega t.$$

Если перенести в левую часть неизвестные x_1 и x_2 , а справа оставить заданные величины, то полученные уравнения можно переписать в следующем виде

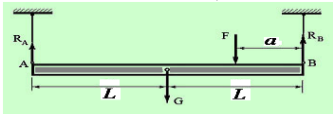
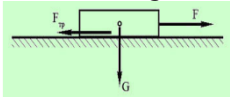
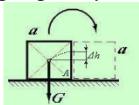
$$m_1 \ddot{x}_1 + (f_1 + f_2) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 - f_2 \dot{x}_2 = c_1 x + f_1 \dot{x};$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + f_2 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1 + c_2 x_2 - c_2 x_1 = H \sin \omega t.$$

3.4. Контрольные вопросы, для оценки качества освоения раздела «Динамика».

1. Динамика точки, основные понятия и законы. Две задачи динамики точки.
2. Дифференциальные уравнения движения точки.
3. Относительное движение точки.
4. Прямолинейные колебания точки: свободные, гармонические, затухающие, вынужденные.
5. Динамика механической системы. Классификация сил.
6. Дифференциальное уравнение движения системы.
7. Теорема о движении центра масс. Следствия.
8. Теорема об изменении количества движения точки и системы. Следствие.
9. Теорема об изменении главного момента количества точки и системы движения системы.
10. Теорема об изменении кинетической энергии системы.
11. Дифференциальное уравнение движения твердого тела: поступательного, вращательного, плоского.
12. Принцип Даламбера.
13. Принцип возможных перемещений.
14. Общее уравнение динамики.
15. Обобщенные координаты и обобщенные силы. Условие равновесия системы в обобщенных координатах.
16. Уравнение Лагранжа 2-го рода.

4. ПРИМЕРНЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.

№	ВОПРОСЫ	ОТВЕТЫ	КОД
1	Пара сил – это система из двух сил:	равных по модулю и направленных в одну сторону по параллельным линиям действия	А
		равных по модулю и противоположно направленных по параллельным линиям действия	В
		разных по модулю и противоположно направленных по параллельным линиям действия	С
2	Балка висит на нерастяжимых нитях, нагружена собственным весом $G = 1.2$ кН, силой $F = 0.6$ кН и находится в состоянии равновесия. Полудлина балки $L = 2$ м, точка приложения силы F находится на расстоянии $a = 1$ м от правого конца балки В (см. рис.1). Определить силу натяжения нити R_A на левом конце балки.  рис. 1	$R_A = 0.75$ кН	А
		$R_A = 0.76$ кН	В
		$R_A = 0.77$ кН	С
3	Плоским называют такое движение твёрдого тела, при котором:	некоторые точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости	А
		все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости	В
		все его точки движутся параллельно некоторой неподвижной оси	С
4	Материальная точка движется вдоль оси Ох по закону $x(t) = 1 + 3t^2 + 5t^4$ (все величины безразмерные). Ускорение точки в момент времени $t = 0$ равно:	5	А
		3	В
		6	С
5	Колесо, вращаясь равноускоренно, через время $t = 1$ мин после начала вращения приобретает частоту $n = 800$ об/мин. Найти число оборотов n колеса за это время	400 об	А
		200 об	В
		800 об	С
6	Поезд, двигаясь равнозамедленно, в течение времени $t = 1$ мин, уменьшает свою скорость от $V_1 = 40$ км/ч до $V_2 = 18$ км/ч. Ускорение a поезда равно:	$a \approx -0.122$ м/с ²	А
		$a \approx -0.102$ м/с ²	В
		$a \approx -0.142$ м/с ²	С
7	Шайба, пущенная по льду со скоростью $V = 3$ м/с, прошла до остановки расстояние $s = 20.4$ м (см. рис.2). Найти коэффициент трения f шайбы о лед, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с ²  рис.2	$f \approx 0.22$	А
		$f \approx 0.07$	В
		$f \approx 0.35$	С
8	Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения определяется по формуле	$K_z = J_z \omega$	А
		$M_k = J_k \omega$	В
		$J_z = KM \omega$	С
9	Как изменится период T малых колебаний математического маятника, ось подвеса которого, перемещается по вертикали с ускорением $g+a$?	увеличится по мере увеличения a	А
		уменьшится по мере увеличения a	В
		не изменится	С
10	Какую работу A надо совершить, чтобы повалить однородный куб на боковую грань (см. рис.3). Длина ребра куба $a = 1$ м, масса куба $m = 100$ кг  Ускорение своб. падения $g = 10$ м/с ²	$A \approx 207$ Дж	А
		$A \approx 307$ Дж	В
		$A \approx 407$ Дж	С

№	ВОПРОСЫ	ОТВЕТЫ	КОД
1	Материальной точкой называется:	тело маленьких размеров	А
		тело небольших размеров с незначительной массой	В
		материальное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь	С
2	Найти силу натяжения упругой нити, удерживающей груз в состоянии равновесия на идеально гладкой наклонной плоскости. Вес груза $G = 300 \text{ Н}$, угол наклона поверхности $\alpha = 45^\circ$ (см. рис.1)	$150\sqrt{3} \text{ Н}$	А
		150 Н	В
		$150\sqrt{2} \text{ Н}$	С
3	Поступательным называют такое движение твёрдого тела, при котором:	любая прямая, неизменно связанная с телом, остается параллельной самой себе	А
		любая прямая, неизменно связанная с телом, остается параллельной оси	В
		любая прямая, неизменно связанная с телом, остается перпендикулярной оси	С
4	Материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x(t)=1+t^3+t^{7/2}$ (все величины безразмерные). Ускорение точки в момент времени $t=0$ равно:	0	А
		- 2	В
		$7/2$	С
5	Колесо, вращаясь равноускоренно, через время $t = 1 \text{ мин}$ после начала вращения приобретает частоту $n = 350 \text{ об/мин}$. Найти угловое ускорение колеса.	700 об/мин^2	А
		350 об/мин^2	В
		175 об/мин^2	С
6	Частица движется в плоскости xy по закону: $x(t)=at$, $y(t) = at(1 - bt + ct^2)$, где a, b и c – положительные постоянные, t – время. Уравнение траектории частицы $y(x)$	$y(x) = \frac{c}{a^2} x^3 - \frac{b}{a} x^2 + x$	А
		$y(x) = -\frac{c}{a^2} x^3 + \frac{b}{a} x^2 + x$	В
		$y(x) = \frac{c}{a} x^3 - \frac{b}{a} x^2 + x$	С
7	Определить силу F , необходимую для равномерного перемещения бруса массы $m = 6 \text{ кг}$ по горизонтальной шероховатой поверхности (рис.2). Коэффициент трения $f = 0.6$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$	56 Н	А
		36 Н	В
		28 Н	С
8	Момент инерции J полого тонкостенного цилиндра массой m и радиуса r относительно оси симметрии цилиндра:	$J = \frac{1}{3} mr^2$	А
		$J = \frac{1}{2} mr^2$	В
		$J = mr^2$	С
9	Как изменится частота вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к их параллельному соединению?	не изменится	А
		увеличится в 2 раза	В
		уменьшится в 2 раза	С
10	Столб высотой $h = 12 \text{ м}$ падает из вертикального положения на горизонтальную поверхность. Вычислить скорость V верхнего конца столба в момент его удара. Ускорение св. падения 10 м/с^2	$V \approx 19 \text{ м/с}$	А
		$V \approx 18 \text{ м/с}$	В
		$V \approx 17 \text{ м/с}$	С

5. ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ НА ФОРМАТЕ А4



МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА»
(ФГБОУ ВО РГАУ - МСХА имени К.А. Тимирязева)

Кафедра: Сопротивление материалов
и детали машин

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине «Теоретическая механика»

Выполнил: студентгр
.....факультета
Ф.И.О.

Проверил: преподаватель
Ф.И.О.

Москва.....год

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: Учебник. 11-е изд. — Спб.: Лань, 2009. — 736 с. — ISBN 978-5-8114-0052-2.
2. Дронг В. И., Дубинин В. В., Ильин М. М. и др. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / Под ред. К. С. Колесникова. 4-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. — 758 с. — ISBN 978-5-7038-3490-9.
3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. 18-е изд. — М.: Высшая школа, 2010. — 416 с. — ISBN 978-5-06-006193-2.
4. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. 16-е изд. — М.: КноРус, 2011. — 608 с. — ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 5-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 416 с. — ISBN 5-354-00341-5.
2. Берёзкин Е. Н. Решение задач по теоретической механике. Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — 89 с.
3. Берёзкин Е. Н. Решение задач по теоретической механике. Ч. 2. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — 1369 с.
4. Веретенников В. Г., Сеницын В. А. Теоретическая механика (дополнения к общим разделам). 2-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 416 с. — ISBN 5-9221-0703-8.
5. Веселовский И. Н. Сборник задач по теоретической механике. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 500 с.
6. Добронравов В. В. Основы аналитической механики. — М.: Высшая школа, 1976. — 264 с.
7. Колесников К. С., Блюмин Г. Д., Дронг В. И. и др. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. К. С. Колесникова. 4-е изд. — Спб.: Лань, 2008. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-0758-3
8. Кирсанов М. Н. Решебник. Теоретическая механика. 2-е изд. — М.: Физматлит, 2008. — 384 с. — ISBN 978-5-9221-0748-8.

9. Кирсанов М. Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. — М.: Физматлит, 2010. — 264 с. — ISBN 978-5-9221-1153-9.
10. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. 51-е изд. — Спб.: Лань, 2012. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-0019-1.
11. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ: Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1986. — 136 с.
12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А. А. Яблонского. 18 изд. — М.: КноРус, 2011. — 386 с. — ISBN 978-5-8114-0758-3.
13. Турбин Б.И. Теоретическая механика. – М.: Сельхозгиз, 1959 г.

Методические указания к занятиям

1. Чеха О.В., Кирсанова В.Н. Кинематика плоского движения абсолютно твёрдого тела / Методические указания для студентов. М.: ФГОУ ВПО МГАУ, 2009. — 26 с.
2. Чеха О.В., Первова Н.С. Аналитическая механика / Методические указания для студентов. М.: ФГОУ ВПО МГАУ, 2014. — 42 с.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. <http://www.teoretmeh.ru/> - На этом сайте представлены лекции, задания и примеры решения задач, тесты по теоретической механике из учебника.
2. <http://www.teoretmeh.ru/film.htm> - На этом сайте собраны видеоматериалы по практическим и лабораторным занятиям.
3. <http://depositfiles.com/files/3raz5wx06> - На этом сайте представлены основные учебники по теоретической механике.
4. <http://turbobit.net/j3f9jrjynms8.html> - На этом сайте подобраны варианты индивидуальных домашних заданий.