Известия ТСХА, выпуск 5, 1984 год

УДК 631.55:338.984:330.115

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ УДОБРЕНИЙ ПРИ ПРОГРАММИРОВАНИИ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

(Кафедра высшей математики)

Применение математических методов при программировании урожаев сельскохозяйственных культур связано с необходимостью использования аппарата производственных функций [3, 6]. Эти функции, получаемые путем обработки результатов полевых опытов методами математической статистики, дают, в частности, зависимости урожаев от норм вносимых удобрений, а также зависимости потерь урожая от проявления факторов атмосферного загрязнения.

В целом ряде случаев для некоторых интервалов изменений норм удобрений зависимость урожайности от количества удобрений имеет линейных характер [1]. Тогда задача может быть сведена к моделям линейного программирования. Так, если N — количество азотных удобрений на га, Р — фосфорных, К — калийных, то условие оптимизации прибавки урожая на га за счет доз вносимых удобрений может быть записано в виде

$$\Delta y = a_N\mathrm{N} + a_P\mathrm{P} + a_K\mathrm{K} \to \max, \qquad (1)$$

где a_N, a_P, a_K — соответственно цены единицы азотного, фосфорного и калийного удобрений.

Кроме условия (1), имеется ряд линейных ограничений. Например, в качестве одного из ограничений можно принять

$$b_N\mathrm{N} + b_P\mathrm{P} + b_K\mathrm{K} \leqslant A, \qquad (2)$$

где b_N, b_P, b_K — уровни загрязнения среды, возникающие в результате действия единицы соответствующего удобрения.

Ограничение типа (2) связано с возможным вредным эффектом загрязнения среды от вносимых удобрений (при этом суммарный эффект загрязнения не должен превышать заданного значения A), или с ограничением затрат на удобрения. В случае отсутствия необходимых ресурсов удобрений сюда присоединяются еще условия вида

$$\mathrm{N} \leqslant n \qquad (3)$$

или аналогичные ограничения для других удобрений.

Однако использование критерия (1) далеко не всегда является обязательным или даже целесообразным. Если цены удобрений высоки (в них могут включены и затраты на устранение вредного воздействия удобрений), возможно использование критерия прибыли от применения удобрений. Условие оптимизации тогда записывается в виде

$$\Pi = M(a_N\mathrm{N} + a_P\mathrm{P} + a_K\mathrm{K}) - C_N\mathrm{N} - C_P\mathrm{P} - C_K\mathrm{K} \to \max. \qquad (4)$$

Здесь C_N, C_P, C_K — соответственно цены 1 ц удобрений, M — цена 1 ц продукции, получаемой при возделывании культуры.

В ряде случаев можно рекомендовать использование условия минимизации себестоимости единицы продукции, т. е. имеем

$$S = \frac{C_N\mathrm{N} + C_P\mathrm{P} + C_K\mathrm{K} + C_0}{a_N\mathrm{N} + a_P\mathrm{P} + a_K\mathrm{K} + y_0} \to \min. \qquad (5)$$

Здесь C_0 — прочие затраты, y_0 — урожайность, получаемая без внесения удобрений.

При использовании условия (5) задача сводится уже к схеме дробно-линейного программирования.

Однако, как известно [6], начиная с некоторого уровня норм удобрений урожайность начинает падать. В этом случае наиболее целесообразно применять квадратичную зависимость, которая может быть записана в виде

$$y=a_{11}N^2+a_{22}P^2+a_{33}K^2+a_{12}NP+a_{13}NK+a_{23}PK+a_{10}N+ \\ +a_{20}P+a_{30}K+a_{00}. \qquad (6)$$

Отметим, что в настоящее время многие авторы пользуются самыми различными видами производственных функций, в том числе применяют уравнения, содержащие радикалы, уравнения ломанной, состоящей из двух прямых, и т. д. Это делает весьма неудобным сопоставление различных результатов. Кроме того, рассчитанные нормы удобрений, соответствующие максимальным урожаям, часто весьма сильно различаются, что связано не с практической стороной задачи, а только с влиянием выбора того или иного вида производственной функции.

Поэтому требуется унификация выбора производственных функций, а наиболее целесообразным нам представляется здесь выбор функции типа (6).

На основании (6) необходимые условия для максимума урожая $\partial y/\partial N=\partial y/\partial P=\partial y/\partial K=0$ приводят к следующей системе трех уравнений для определения неизвестных величин N, P и K:

$$\begin{aligned} 2a_{11}N+a_{12}P+a_{13}K&=-a_{10},\\ a_{12}N+2a_{22}P+a_{23}K&=-a_{20},\\ a_{13}N+a_{23}P+2a_{33}K&=-a_{30}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Однако определение норм вносимых удобрений по максимуму урожая далеко не всегда оправдано в связи с тем, что при приближении к точке максимума урожай растет медленно, так как производные $\partial y/\partial N$, $\partial y/\partial P$ и $\partial y/\partial K$, характеризующие скорости изменения урожая в зависимости от норм удобрений, малы. Об этом, например, свидетельствует следующий пример [3].

Зависимость урожая от количества азотных удобрений выражается формулой

$$y=42{,}60+0{,}80N-0{,}0018N^2, \qquad (8)$$

где y — урожай зерна в бушелях на 1 акр, N — количество азотных удобрений, фунтов на 1 акр.

Для максимума урожая имеем

$$dy/dN=0{,}80-0{,}0036N=0.$$

Откуда N=222,2 фунт/акр, что согласно (8) дает

$$y_{max}=131{,}5 \text{ буш/акр}.$$

Если взять теперь не максимум урожая, а максимум прибыли, получаемой за счет применения азотного удобрения, то имеем

$$\Pi=My-(a_N N+B)\rightarrow\max,$$

где M — цена бушеля продукции выращиваемой культуры, a_N — цена 1 фунта азотного удобрения, B — прочие затраты.

Условие максимума $d\Pi/dN=0$ дает $dy/dN=a_N/M$, или в силу (8) получаем уравнение $0{,}80-0{,}0036N=a_N/M$.

Если, например, $a_N/M=0{,}2$, т. е. цена 1 фунта азотного удобрения составляет 20 % от цены 1 бушеля зерна, получаем N=166,6 фунт/акр, что согласно (8) дает $y=125{,}9$ буш/акр. Таким образом, увеличение количества удобрений на (222,2—166,6)/166,6=33 % дает повышение урожая на (131,5—125,9)/125,9, т. е. только на 4 %.

Если принять в качестве условия оптимизации максимум прибыли Π, то имеем

$$\Pi=My-(a_N N+a_P P+a_K K+B)\rightarrow\max. \qquad (9)$$

Необходимые условия максимума $\partial\Pi/\partial N=\partial\Pi/\partial P=\partial\Pi/\partial K=0$, следовательно, дают

$$\partial y/\partial N=a_N/M;\ \partial y/\partial P=a_P/M;\ \partial y/\partial K=a_K/M, \qquad (10)$$

или в силу (6) приходим к следующей системе трех уравнений для определения оптимальных норм удобрений N, P и K

$$\begin{aligned} 2a_{11}\mathrm{N} + a_{12}\mathrm{P} + a_{13}\mathrm{K} &= -a_{10} + a_{\mathrm{N}}/M, \\ a_{12}\mathrm{N} + 2a_{22}\mathrm{P} + a_{23}\mathrm{K} &= -a_{20} + a_{\mathrm{P}}/M, \\ a_{13}\mathrm{N} + a_{23}\mathrm{P} + 2a_{33}\mathrm{K} &= -a_{30} + a_{\mathrm{K}}/M. \end{aligned} \tag{11}$$

Расчет по формулам (11) позволяет учесть влияние цен единицы удобрений по сравнению с ценой единицы продукции.

Если более целесообразным нам представляется расчет по условию минимизации себестоимости единицы продукции, так как при этом учитывается роль затрат на удобрения в общем балансе затрат. В этом случае условие оптимизации записывается в виде

$$S = (a_{\mathrm{N}}\mathrm{N} + a_{\mathrm{P}}\mathrm{P} + a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} + B)/y \to \min. \tag{12}$$

Необходимые условия минимума $dS/d\mathrm{N} = dS/dP = dS/dK = 0$ приводят к системе трех уравнений для определения доз удобрений

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{N}}y - \partial y/\partial \mathrm{N}\,(a_{\mathrm{N}}\mathrm{N} + a_{\mathrm{P}}\mathrm{P} + a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} + B) &= 0, \\ a_{\mathrm{P}}y - \partial y/\partial \mathrm{P}\,(a_{\mathrm{N}}\mathrm{N} + a_{\mathrm{P}}\mathrm{P} + a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} + B) &= 0, \\ a_{\mathrm{K}}y - \partial y/\partial \mathrm{K}\,(a_{\mathrm{N}}\mathrm{N} + a_{\mathrm{P}}\mathrm{P} + a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} + B) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где y определяется по формуле (6).

Перейдем далее к вопросам программирования урожаев сельскохозяйственных культур с учетом воздействия атмосферных загрязнений [4].

Эта проблема весьма актуальна для сельскохозяйственного производства, так как потери урожая в зоне влияния промышленных предприятий весьма велики. Имеющиеся данные [2] свидетельствуют о том, что потери урожая, например, озимой пшеницы, овса, картофеля, столовой свеклы можно считать линейно зависящими от концентраций промышленных выбросов в воздухе. Так, в [2] получены следующие данные о недоборах урожая Δy (ц/га) в зависимости от средних за сезон суточных концентраций промышленных выбросов в воздухе S_α — концентрация сернистого ангидрида SO_2, S_β — концентрация аммиака, S_γ — концентрация промышленной пыли).

Для озимой пшеницы

$$\Delta y = -7{,}0653 + 2{,}3047S_\alpha + 2{,}1833S_\gamma.$$

Для овса

$$\Delta y = -11{,}5758 + 4{,}1466S_\alpha + 3{,}1648S_\beta + 0{,}3680S_\gamma.$$

Для картофеля

$$\Delta y = -210{,}0979 + 76{,}6818S_\gamma.$$

Для свеклы столовой

$$\Delta y = 7{,}5414 + 4{,}3988S_\alpha + 3{,}3725S_\gamma.$$

Что касается расходов на очистку, то они растут далеко не линейно в зависимости от понижения концентраций вредных выбросов в воздухе. Их изменения скорее приближаются к экспоненциальному виду.

В связи с необходимостью сочетания экономических интересов как сельскохозяйственного, так и промышленного производства весьма актуальной является разработка методов определения оптимального уровня очистки. При этом следует вводить также соответствующие функции, учитывающие долю затрат на очистку воздуха от промышленных выбросов.

Рассмотрим сначала случай влияния только одного загрязняющего фактора с концентрацией S. Тогда для недобора урожая имеем

$$\Delta y = a + bS. \tag{14}$$

Например, для картофеля, согласно приведенной выше зависимости, $a = -210{,}0979$; $b = 76{,}6818$.

Пусть в результате применения очистки концентрация уменьшилась от значения S до S_0, тогда прибавка урожая в силу (14) составляет $b(S-S_0)$, а полученный за счет этого доход составит $MFb(S-S_0)$, где M — цена 1 ц клубней, а F — площадь, занимаемая картофелем.

Расходы на очистку выражаются производственной функцией $f(S_1)$, где $S_1=S-S_0$ — перепад концентраций при очистке. Здесь f — известная нелинейная функция. Если решать задачу по критерию прибыли, то оптимальное значение перепада концентраций $S_1=S_{1,0}$ определяется из условия

$$П=MFbS_1-f(S_1)\to\max. \tag{15}$$

Для определения искомого значения S_{10} имеем

$$\left(\frac{dП}{dS_1}\right)_{S_1=S_{1,0}}=0;\quad \left(\frac{d^2П}{dS_1^2}\right)_{S_1=S_{1,0}}<0. \tag{16}$$

Первое из условий (16) приводит к уравнению

$$\left(\frac{df}{dS_1}\right)_{S_1=S_{1,0}}=Mfb. \tag{17}$$

Второе из условий (16) дает $\left(\frac{d^2f}{dS_1^2}\right)_{S_1=S_{1,0}}>0$, т. е в окрестности точки $S_1=S_{1,0}$ график затрат на очистку $f(S_1)$ должен быть вогнутым.

Условие (17) имеет наглядную геометрическую интерпретацию — максимум прибыли достигается в точке, в которой касательная к графику затрат на очистку $f(S_1)$ параллельна прямой $u=MFbS_1$ для графика дохода от прибавки урожая.

Можно выбрать в качестве условия оптимальности и минимизацию удельных расходов на очистку (отнесенных к перепаду концентрации), т. е.

$$V=f(S_1)/S_1\to\min. \tag{18}$$

Условия минимума для искомого значения $S_1=S_{1,1}$

$$\left(\frac{dV}{dS_1}\right)_{S_1=S_{1,1}}=0;\quad \left(\frac{d^2V}{dS_1^2}\right)_{S_1=S_{1,1}}>0$$

приводят к уравнению

$$S_{1,1}\left(\frac{df}{dS_1}\right)_{S_1=S_{1,1}}-f(S_{1,1})=0. \tag{19}$$

При этом $\left(\frac{d^2f}{dS_1^2}\right)_{S_1=S_{1,1}}$ должно быть >0, т. е. график затрат на очистку $f(S_1)$ в окрестности точки $S_1=S_{1,1}$ должен быть вогнутым.

Условие (19) также имеет простую геометрическую интерпретацию. Если запишем его в виде

$$\left(\frac{df}{dS_1}\right)_{S_1=S_{1,1}}=\frac{f(S_{1,1})}{S_{1,1}}, \tag{20}$$

то получим, что минимум удельных расходов на очистку соответствует точке на графике $f(S_1)$, которая получится, если провести касательную к $f(S_1)$ из начала координат. В данном случае следует учитывать, что $f(0)>0$, так как имеются начальные расходы, не зависящие от степени очистки.

Перейдем теперь к общему случаю влияния ряда загрязняющих факторов на урожаи всех культур данного региона. Пусть имеется n культур и p загрязняющих факторов, тогда для i-й культуры ($i=1, 2, \ldots, n$) рассчитываем недобор урожая Δy (ц/га) за счет действия p загрязняющих факторов в соответствующих концентрациях S_l ($l=1, 2, \ldots, p$)

$$\Delta y_i=A_i+\sum_{l=1}^{p} m_{il}S_l, \tag{21}$$

где m_{il} и A — известные коэффициенты линейных регрессионных зависимостей.

Если в результате применения очистки концентрации вредных выбросов уменьшились от значений S_l соответственно до S_{lo}, то прибавка урожая по i-й культуре на основании (21) составляет

$$\sum_{l=1}^{p} m_{il}S_{1l}, \text{ где } S_{1l}=S_l-S_0,$$

а полученный при этом доход

$$M_iF_i\sum_{l=1}^{p} m_{il}S_{1l},$$

где M_i — цена единицы i-й культуры, а F_i — занимаемая ею площадь.

Общий доход по всем n культурам данного региона составляет

$$\sum_{i=1}^{n} M_iF_i\sum_{l=1}^{p} m_{il}S_{1l}.$$

Расходы на очистку выражаются нелинейной зависимостью вида $f(S_{11}, S_{12}, ..., S_{1p})$. Следовательно, для получаемой прибыли имеем

$$П(S_{11}, S_{12},..., S_{1p})=\sum_{i=1}^{n} M_iF_i\sum_{l=1}^{p} m_{il}S_{1l}-f(S_{11}, S_{12},..., S_{1p}).$$

Необходимые условия экстремума приводят к системе p уравнений с p неизвестными $S_{11}, S_{12}, .., S_{1p}$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{1l}}=\sum_{i=1}^{n} MiF_im_{il}, \tag{22}$$

где $l=1, 2, ..., p$.

Из системы (22) определяем искомые оптимальные перепады концентраций при очистке.

В заключение отметим, что, кроме задачи о нахождении максимальной урожайности или максимальной прибыли при внесении удобрений для получения планируемых урожаев, часто приходится рассматривать задачу о получении заданного урожая при минимальных затратах на удобрения, т. е.

$$y=f(N, P, K)=y_0 \tag{23}$$

при условии

$$C_N N+C_P P+C_K K \to \min. \tag{24}$$

Задача сводится к схеме условного экстремума, т. е. минимизации выражения

$$z=C_N N+C_P P+C_K K+\lambda f(N, P, K), \quad (25$$

где λ — некоторый параметр.

Необходимые условия экстремума дают

$$\partial z/\partial N=C_N+\lambda(\partial f/\partial N)=0, \tag{26}$$
$$\partial z/\partial P=C_P+\lambda(\partial f/\partial P)=0, \quad (27$$
$$\partial z/\partial K=C_K+\lambda(\partial f/\partial K)=0. \tag{28}$$

Из системы уравнений (23), (26)—(28) определяются 4 неизвестные величины N, P, K и λ.

Например, если y имеет вид квадратичной зависимости, в соответствии с (6) система уравнений (26), (27), (28) записывается

$$2a_{11}N+a_{12}P+a_{13}K=-C_N/\lambda-a_{10}, \quad (26'$$
$$a_{12}N+2a_{22}P+a_{23}K=-C_P/\lambda-a_{20}, \quad (27'$$

$$a_{13}N + a_{23}P + 2a_{33}K = -C_K/\lambda - a_{30}. \qquad (28')$$

Из нее определяются N, P и K в виде функции от λ. Подставляя их значения в (23), определяем λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. К. Каюмов. Справочник по программированию урожаев. М.: Россельхозиздат, 1977. — 2. Модели управления чистотой природной среды. М.: Экономика, 1977. — 3. Файнзильбер А. М. Математические методы в задачах экономики сельскохозяйственного производства. М., ТСХА, 1976. — 4. Файнзильбер А. М. Программирование урожаев сельскохозяйственных культур с учетом воздействия атмосферных загрязнений. — Тез. докл. Всесоюз. науч.-технич. семинара «Вопросы разработки основ программирования урожаев с.-х. культур». М., 1979. — 5. Файнзильбер А. М. Экономико-математические основы программирования урожаев сельскохозяйственных культур. — Тез. докл. Всесоюз. школы молодых ученых «Актуальные проблемы программирования урожаев с.-х. культур». М., ВАСХНИЛ, 1983, с. 7—9. — 6. Хедди Э., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. М.: Прогресс, 1965. — 7. Шатилов И. С., Чудновский А. Ф. Агрофизические, агрометеорологические и агротехнические основы программирования урожаев. М.: Гидрометеоиздат, 1980.

Статья поступила 27 февраля 1984 г.

SUMMARY

The article deals with methods of farm crop yields programming depending on the rates of nitrogen, phosphorus and potassium both withlinear and non-linear dependences. Problems of yields programming with account of adverse effect of atmospheric pollution are also considered.