Известия ТСХА, выпуск 1, 1985 год

УДК 631.811:330.115

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ УДОБРЕНИЙ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, Е. Л. МАТВЕЕНКО

(Кафедра высшей математики)

Оценка экономической эффективности удобрений и других средств химизации сельского хозяйства производится исходя из критерия и показателей народнохозяйственной эффективности и определяется системой показателей [3]. Наиболее обобщающими из них являются объем производства продукции, валовой и чистый доход. В данной работе для оценки различных норм внесения минеральных удобрений используются три последних показателя. В более детальный анализ включаются показатели использования всех факторов производства: земли, рабочей силы, производственных фондов. Проводится сравнение результатов производства, полученных с применением средств химизации и без них в производственных условиях и специальных опытах.

При внесении удобрений, как правило, повышается урожайность сельскохозяйственных культур, но при этом возрастают затраты труда и средств. Разные нормы и соотношения минеральных удобрений дают различные результаты, поэтому важно найти оптимальные варианты применения удобрений, которые обеспечивают в конкретных условиях наиболее высокую экономическую эффективность производства сельскохозяйственной продукции.

В ряде случаев для определенных интервалов норм удобрений зависимость урожайности от них может иметь линейный характер. Такой, например, можно считать зависимость урожайности ячменя от азотных, фосфорных и калийных удобрений, рассчитанную по данным полевых опытов ВИУА, проведенных на Владимирской опытной станции в 1977—1982 гг. [1]:

$$y = -701{,}287 + 0{,}083\,N + 0{,}029\,P - 0{,}090\,K + 98{,}31\,pH + 4{,}89\,P_2O_5 + 3{,}334\,K_2O + 22{,}149\,\Gamma, \quad R = 0{,}887, \qquad (1)$$

где y — урожайность ячменя; N, P, K — нормы вносимых удобрений; pH — реакция почвенной среды; P_2O_5, K_2O и Γ — соответственно содержание в почве подвижного фосфора, обменного калия и гумуса; R — коэффициент множественной корреляции.

В общем случае зависимость такого вида выражается как

$$y=m_0+\sum_{i=1}^{n} m_i X_i. \qquad (1')$$

Если рассмотреть решение задачи по критерию минимума себестоимости производства продукции, то ее можно свести к схеме дробно-линейного программирования

$$S=\frac{Q_0+\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{m_0+\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}\to \min, \qquad (2)$$

где a_i — затраты на применение удобрений; Q_0 — затраты, не связанные с применением удобрений.

Кроме того, есть ряд линейных ограничений. Например,

$$X_i \geqslant F_i, \qquad (3)$$

где F_i — необходимый минимум каждого из удобрений. Далее имеем ограничения

$$X_i \leqslant l_i, \qquad (4)$$

где l_i — наличный ресурс данного вида удобрений или же ограничение его количества, связанное со спецификой задачи (например, количество азотных удобрений не должно превышать некоторую норму во избежание вредных последствий для окружающей среды).

Наряду с ограничениями типа (3) и (4) имеются и другие, например, по соотношению между различными видами удобрений:

$$X_l \leqslant \beta_{lm} X_m, \qquad (5)$$

где индексы l и m соответствуют l-му и m-му видам удобрений. Далее, если линейная зависимость (1′) справедлива в некоторых пределах норм удобрений γ_i и δ_i, то должны быть учтены и ограничения типа (6)

$$\gamma_i \leqslant X_i \leqslant \delta_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (6)$$

Кроме указанных ограничений, следует учесть обычное требование неотрицательности переменных $X_i \geqslant 0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Заметим, что для случая зависимости от двух видов удобрений, например азотных и фосфорных, задачу можно решать графическим путем, не прибегая к аналитическим методам. Тогда формулу (2) следует записать в виде

$$S=\frac{S_0+a_N N+a_P P}{m_0+m_N N+m_P P}\to \min \qquad (7)$$

при соответствующих линейных ограничениях типа (3)—(6). От свободных членов Q_0 и m_0 в числителе и знаменателе выражения (7) нетрудно избавиться, если ввести преобразование переменных по формулам

$$N=N_1+r_1;\ P=P_1+r_2. \qquad (8)$$

Тогда условие (2) запишется следующим образом:

$$S=\frac{S_0+a_N r_1+a_N N_1+a_P P_1+a_P r_2}{m_0+m_N N_1+m_N r_i+m_P P_1+m_P r_2}. \qquad (9)$$

Подберем далее величины r_1 и r_2 так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} a_N r_1+a_P r_2 &= -S_0,\\ m_N r_1+m_P r_2 &= -m_0, \end{aligned} \qquad (10)$$

исключив случай пропорциональности коэффициентов $a_N/m_N=a_P/m_P$.

Систему (10) можно решить следующим образом:

$$r_1=\frac{-(S_0 m_P-m_0 a_P)}{a_N m_P-m_N a_P}; \qquad (11)$$

$$r_2=\frac{-(a_N m_0-m_N S_0)}{a_N m_P-m_N a_P}.$$

Если подобрать числа r_1 и r_2 по формулам (11), то (9) примет вид

$$S=\frac{a_N N_1+a_P P_1}{m_N N_1+m_P P_1}\to \min. \qquad (12)$$

Положим сначала $S=\eta$ и примем, что η принимает наименьшее значение, удовлетворяющее имеющимся ограничениям. Тогда, освобождаясь в (12) от знаменателя, получим.

$$(a_P-\eta m_P)P_1=(\eta m_N-a_N)N_1 \qquad (13)$$

Легко видеть, что коэффициенты при P_1 не должны быть равными 0. Действительно, если

$$a_P-\eta m_P=0, \qquad (14)$$

то и правая часть (13) равна нулю, что возможно только в одном из двух случаев:

а) $\eta m_N-a_N=0$, т. е. $a_N/m_N=\eta$,

или на основании (14) $a_N/m_N=a_P/m_P$; отсюда $S=\mathrm{Const}$, т. е. не имеет минимума;

б) $N_1=0$, но и в этом случае согласно (12) $S=\mathrm{Const}$.

Следовательно, выражение (13) можно решить относительно P_1 в виде

$$P_1=kN_1, \qquad (15)$$

где

$$k=(\eta m_N-a_N)/(a_P-\eta m_P). \qquad (15')$$

Аналогично предыдущему можно показать, что $k\neq 0$.

На основании (15) получим, что

$$\frac{dk}{d\eta}=\frac{m_N(a_P-\eta m_P)+m_P(\eta m_N-a_N)}{(a_P-\eta m_P)^2}=$$

$$=\frac{-\Delta}{(a_P-\eta m_P)^2}, \qquad (16)$$

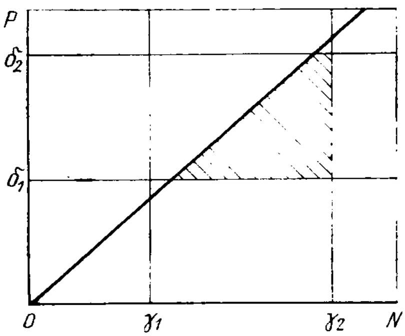
где $\Delta=\begin{vmatrix} a_N & a_P\\ m_N & m_P\end{vmatrix}$.

Поскольку $dk/d\eta$ не может быть равно 0, так как это означало бы $S=\mathrm{Const}$, а знаменатель $dk/d\eta$ положительный, знак $dk/d\eta$ определяется знаком числителя.

Рассмотрим два случая.

1) $\Delta>0$; тогда $dk/d\eta<0$ и $d\eta/dk<0$, т. е. с ростом k уменьшается η. Следовательно, для минимизации η надо увеличить k: поворачивать луч прямой $P_1=kN_1$ против часовой стрелки до тех пор, пока он не выйдет за пределы многоугольника ограничений.

2) $\Delta<0$; тогда $dk/d\eta>0$ и $d\eta/dk>0$, т. е. η уменьшается с уменьшением k. Следовательно, для минимизации η можно поворачивать луч прямой (15) по часовой



Многоугольник ограничений

стрелке до тех пор, пока он не выйдет за пределы многоугольника ограничений (рисунок).

Перейдем теперь к случаям нелинейной зависимости урожая от норм удобрений. Рассмотрим вначале влияние одного вида удобрений X. Полученные опытные данные о таком влиянии можно выравнять по методу наименьших квадратов квадратичной зависимостью вида

$$y=AX^2+BX+C, \qquad (17)$$

где $A<0$, $B>0$, и получить некоторое значение X_*, которому соответствует максимальная урожайность. Она находится по условию $y'=2AX+B=0$, откуда

$$X_* = -B/2A = B/2|A|. \qquad (18)$$

Соответствующее значение максимальной урожайности согласно (17) определяется по уравнению

$$y_* = C - B^2/4A. \qquad (19)$$

Однако вблизи точки максимума урожайность растет медленно, так как значение y' близко к 0 и, следовательно, в данном интервале затраты удобрений мало окупаются урожаем. Поэтому целесообразно вести расчет по критерию чистого дохода $П$:

$$П = My - aX - D \to \max. \qquad (20)$$

где M — цена единицы продукции; a — затраты на применение единицы удобрений; D — прочие расходы, не зависящие от X; в первом приближении их можно считать постоянными.

Согласно (20) для максимума чистого дохода имеем $П'=My'-a=0$, откуда

$$y'=a/M, \qquad (21)$$

т. е. экстремуму чистого дохода соответствует некоторая точка X_0, расположенная левее точки максимума урожая X_* и относящаяся к области возрастания урожая.

В соответствии с (17) и (21) получаем $2AX_0+B=a/M$, откуда

$$X_0 = -B/2A + (a/M)/2|A| = X_* - a/2|A|M. \qquad (22$$

Значение урожайности y_0 согласно (17) и (19) находится из выражения

$$y_0 = y_* + (a/M^2)/4A. \qquad (23)$$

Таким образом, уменьшение количества удобрений на величину $b = a/2|A|M$ влечет уменьшение урожайности на величину

$$C = |A|b^2 = \kappa b, \qquad (24)$$

где $\kappa = |A|b = a/2M. \qquad (24')$

Так как отношение затрат на применение единицы удобрений к цене единицы произведенной продукции достаточно мало, то κ значительно меньше 1. Например, для $a/M=0{,}6$ значение $\kappa=0{,}3$.

Следующим приближением к реальным задачам программирования урожаев будет рассмотрение величины D, т. е. прочих затрат, связанных с удобрением, уже не в качестве константы, а линейной функции от y, т. е. $D=D_0+\alpha y$, здесь D_0 — затраты, не зависящие от урожайности, а α — затраты на единицу массы урожая (уборка, хранение, транспортировка и др.).

Тогда для чистого дохода вместо выражения (20) имеем

$$П = My - aX - (D_0 + \alpha y) = (M-\alpha)y - aX - D_0 \to \max. \qquad (25)$$

Следовательно, для максимума чистого дохода вместо (21) получаем условие

$$y'=a/(M-\alpha). \qquad (26)$$

Формулы (22)—(24) можно использовать по-прежнему, если в них вместо M поставить $(M-\alpha)$.

Из (26) значение y' больше, чем из (21), т. е. искомая точка находится левее.

Рассмотрим далее случай n видов удобрений. Тогда зависимость урожайности от количества удобрений $(X_1, X_2, ..., X_n)$ имеет вид

$$y=f(X_1, X_2, ..., X_n). \qquad (27)$$

Для максимума чистого дохода получаем условие

$$П = My - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i - (D_0 + \alpha y) \to \max, \qquad (28)$$

где a_i — затраты на применение единицы i-го удобрения $(i=1, 2, ..., n)$.

Необходимые условия экстремума дают n уравнений

$$(M-\alpha)(\partial f/\partial X_i) - a_i = 0,$$

откуда

$$\partial f/\partial X_i = a_i/(M-\alpha), \quad (i=1, 2, ..., n). \qquad (29)$$

Рассмотрим, например, случай зависимости урожайности от двух видов удобрений — азотных N и фосфорных P, которая имеет квадратичный характер:

$$f(\mathrm{N}, \mathrm{P}) = a\mathrm{N}^2 + b\mathrm{NP} + c\mathrm{P}^2 + d\mathrm{N} + e\mathrm{P} + q. \qquad (30)$$

Заметим, что к виду (30) может быть сведена и часто встречающаяся при обработке результатов опытов зависимость

$$f(\mathrm{N}, \mathrm{P}) = a\mathrm{N} + b\sqrt{\mathrm{NP}} + c\mathrm{P} + d\sqrt{\mathrm{N}} + e\sqrt{\mathrm{P}} + q$$

подстановкой $\mathrm{N}=\mathrm{N}_1^2$ и $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1^2$.

Тогда для определения максимума урожая имеем необходимые условия:

$$\begin{aligned} \partial f/\partial \mathrm{N} &= 2a\mathrm{N} + b\mathrm{P} + d = 0 \\ \partial f/\partial \mathrm{P} &= b\mathrm{N} + 2c\mathrm{P} + e = 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

$$(\partial^2 f/\partial \mathrm{N}^2) \cdot (\partial^2 f/\partial \mathrm{P}^2) - (\partial^2 f/\partial \mathrm{N} \cdot \partial \mathrm{P})^2 > 0$$

в силу того, что

$$\partial^2 f/\partial N^2 = 2a;\ \partial^2 f/\partial P^2 = 2c;\ \partial^2 f/\partial N\cdot\partial P = b;\ 4ac - b^2 > 0. \quad (32)$$

Кроме того, для условия максимума необходимо, чтобы $\partial^2 f/\partial N^2 < 0$ и $\partial^2 f/\partial P^2 < 0$, т. е. имеем

$$a < 0 \text{ и } c < 0. \quad (33)$$

Если условия (32) и (33) не выполняются, то значения максимума урожая нельзя получить. Практически это означает, что урожайность будет изменяться монотонно. Но и в последнем случае можно ставить и решать задачу о максимуме чистого дохода от применения удобрений.

Заметим далее, что при выполнении условия (32) система двух уравнений (31) всегда разрешима и искомые значения N_* и P_*, максимизирующие урожай (должно быть также $a<0$ и $c<0$), составят:

$$N_* = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2};\ P_* = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}. \quad (34)$$

Подставляя найденные значения из (34) в (30), находим y_* — максимальную урожайность.

Для максимума же чистого дохода на основании (29) и (30) получаем вместо (31) систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2aN + bP + d &= a_N/(M - \alpha), \\ bN + 2cP + e &= a_P/(M - \alpha), \end{aligned} \quad (35)$$

где a_N и a_P — затраты на применение соответственно азотного и фосфорного удобрений.

При выполнении условий (32) и (33) система уравнени (35) так же, как и система (31), разрешима, и искомые значения, соответствующие максимуму чистого дохода, определяются в виде

$$N_0 = \frac{2c\,[a_N/(M-\alpha) - d] - b\,[a_P/(M-\alpha) - e]}{4ac - b^2}, \quad (36)$$

$$P_0 = \frac{2a\,[a_P/(M-\alpha) - e] - b\,[a_N/(M-\alpha) - d]}{4ac - b^2}.$$

Если же проводить расчет по минимуму себестоимости единицы продукции S

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + D_0 + \alpha f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + D_0}{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} + \alpha \to \min, \quad (37)$$

то необходимые условия минимума запишутся в виде

$$a_j f(X_1, \ldots, X_n) - (\partial f/\partial X_j)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + D_0\right) = 0, \quad (38)$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. в этом случае искомые значения X_j будут уже зависеть не от α, а только от значений постоянной части затрат D_0.

Далее в качестве примера рассмотрим данные полевого опыта[1], целью которого было определение влияния различных норм минеральных удобрений на урожайность озимой ржи сорта Чулпан (Владимирская опытная станция ВИУА, 1982 г.). Почва серая лесная среднесуглинистая, pH 5,62, содержание гумуса 4,32 %, подвижного фосфора — 55,9, обменного калия — 29,0 мг на 1 кг. Средняя температура за июнь — июль 17,1°, сумма осадков 143,8 мм. Предшественник — вико-овсяная смесь.

Мы построили производственную функцию зависимости прибавки урожая озимой ржи Δy (кг/га) от норм азотных (N), фосфорных (P) и калийных (K) удобрений (кг/га):

$$\Delta y = 94{,}363 + 9{,}908N + 8{,}325P - 0{,}092K - 0{,}064N^2 - 0{,}054P^2 + 0{,}013K^2. \quad (39)$$

Коэффициент множественной корреляции $R = 0{,}875$.

Расчеты проводились в ЭВЛ ТСХА на ЭВМ «ЕС-1022».

Для нахождения значений N_*, P_* и K_*, максимизирующих урожай, надо решить систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} \partial y/\partial N &= 9{,}908 - 0{,}128N_* = 0; \\ \partial y/\partial P &= 8{,}325 - 0{,}108P_* = 0; \quad (40) \\ \partial y/\partial K &= -0{,}092 + 0{,}026K_* = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $N_* = 77{,}4$ кг/га; $P_* = 77{,}1$; $K_* = 3{,}5$ кг/га.

Соответствующая этой норме максимальная прибавка урожая Δy_* будет равна $\Delta y_* = 798{,}5$ кг/га.

Рассмотрим теперь решение этой же задачи по критерию максимума чистого дохода. Для этого приравняем частные производные системы (40) не к нулю, а к соответствующему отношению затрат на применение 1 кг д. в. удобрений (к закупочной цене на озимую рожь) и получим

$$\begin{aligned} \partial y/\partial N &= 9{,}908 - 0{,}128N_0 = 2{,}345, \\ \partial y/\partial P &= 8{,}325 - 0{,}108P_0 = 1{,}983, \quad (41) \\ \partial y/\partial K &= -0{,}092 + 0{,}026K_0 = 0{,}535. \end{aligned}$$

Отсюда $N_0 = 59{,}1$ кг/га; $P_0 = 58{,}7$; $K_0 = 24{,}1$ кг/га. Сравнивая решения систем (40) и (41), мы видим, что общая экономия удобрений составила во втором случае 16,1 кг д. в. на 1 га, или 10,2 %, при этом $\Delta y_0 = 764{,}3$ кг/га (т. е. потеря в прибавке урожая за счет меньшего внесения удобрений равна 34,2 кг/га, или 4,3 %).

Рассчитаем теперь затраты на применение максимальной (Q_*) и оптимальной (Q_0) норм удобрений: $Q_* = 39{,}1$ руб/га, $Q_0 = 31{,}1$ руб/га. Следовательно, затраты на удобрения сократились на 8 руб/га. Таким образом, внесение оптимальных по критерию чистого дохода норм удобрений более обосновано экономически (по минимуму затрат) и агрономически (по соотношению N : P : K для данных условий), а так как различия в прибавке урожайности, полученные в результате расчетов, меньше наименьшей существенной разности для этого опыта (2,73 ц/га), то целесообразнее признать оптимальной норму удобрений, полученную по критерию чистого дохода.

[1] Данные взяты из картотеки Географической сети полевых опытов ВИУА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Результаты исследований в длительных опытах с удобрениями по зонам страны. — Тр. ВИУА, 1979, вып. 8. — 2. Файнзильбер А. М. Математические методы в задачах экономики с.-х. производства. ТСХА, 1976. — 3. Фефелов В. П. Определение экономической эффективности удобрений и других средств химизации сельского хозяйства. — Изв. ТСХА, вып. 3, 1983, с. 12—21.

Статья поступила 26 июня 1984 г.