Известия ТСХА, выпуск 3, 1983 год

УДК 631.1:330.115

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ВОЗОБНОВЛЕНИЙ ЗАПАСОВ СЫРЬЯ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР, О. Т. ОЛЬХОВАЯ

(Кафедры высшей математики и экономической кибернетики)

Вопросы программирования запасов сырья при расходе его в зависимости от времени рассматривались О. Ланге [2] для заранее фиксированного числа возобновлений запасов. При равномерном расходовании сырья оптимальное число возобновлений запасов вычисляется по известной формуле Вильсона [2].

Значительно сложнее получить это число при неравномерном расходовании сырья (например, с учетом сезонности сельскохозяйственного производства). В этом случае плотность его расходования — величина непостоянная и является производственной функцией времени, определяемой по опытным данным. В качестве примеров можно указать расходование горючего, фруктов и овощей при их переработке и т. п.

В настоящей работе дается решение задачи при следующих общих предположениях: сырье расходуется неравномерно и, кроме того, учитывается зависимость затрат на приобретение сырья от размера партии. Требуется найти оптимальное число закупок сырья, при котором суммарные затраты на его приобретение и хранение будут наименьшими.

Если плотность расходования сырья определяется производственной функцией $f(t)$, то расход сырья F за период $[t_1;\ t_2]$ можно вычислить по формуле

$$F=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Пусть в течение периода от $t_0=0$ до t_n сырье приобретается n раз через равные промежутки времени $\Delta t_i=t_n/n$ в сроки $t_0=0$;

$$t_1=t_n/n;\quad t_2=2t_n/n;\ldots;$$

$$t_{n-1}=(n-1)\,t_n/n;\quad t_n.$$

Если в первый срок t_0 приобретен запас сырья F_1, то к моменту t_i количество оставшегося неизрасходованным сырья согласно (1) будет

$$F_1-F(t_i)=F_1-\int_{t_0}^{t_i} f(t)\,dt. \tag{2}$$

Обозначив цену хранения единицы запаса сырья за весь период от t_0 до t_n через m (при этом должны также учитываться потери за счет порчи сырья при хранении), получим, что за время $\Delta t_i=t_n/n$ цена хранения единицы запаса $m/n=m\cdot\Delta t_i/t_n$. Следовательно, на основании (2) затраты на хранение всей партии сырья за время от t_0 до t_1 составят

$$m/t_n\int_{t_0}^{t_1}[F_1-F(t)]\,dt=m/t_n\times$$

$$\times\left[F_1(t_1-t_0)-\int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt\right]. \tag{3}$$

Если к моменту t_1 все сырье израсходовано, т. е. $F(t_1)=F_1$, то приобретаем добавочный запас сырья в количестве F_2-F_1, и аналогично затраты на хранение за период $[t_1;\ t_2]$ будут равны

$$m/t_n\int_{t_1}^{t_2}[F_2-F(t)]\,dt=$$

$$=m/t_n\left[F_2(t_2-t_1)-\int_{t_1}^{t_2}F(t)\,dt\right]. \tag{4}$$

К моменту t_2 все сырье израсходуется, т. е. $F(t_2)=F_2$.

Проводя аналогичные рассуждения для последующих периодов, получим выражение для затрат на хранение $З_1$ за весь период $(0;\ t_n)$

$$З_1=m/t_n\left[\sum_{i=1}^{n}F(t_i)\cdot(t_i-t_{i-1})-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}F(t)dt\right]=$$

$$=m/t_n\left[\sum_{i=1}^{n}F(t_i)\,\Delta t_i-\int_{t_0}^{t}F(t)\,dt\right]. \tag{5}$$

Затраты на приобретение i-й партии сырья размером P_i можно представить в виде $k+lP_i$, где k — некоторые начальные затраты, не зависящие от количества сырья. Следовательно, затраты $З_2$ на приобретение сырья составят

$$З_2=k+lF(t_1)+k+l[F(t_2)-F(t_1)]+$$
$$+\ldots+k+l[F(t_n)-F(t_{n-1})]=$$
$$=kn+lF(t_n). \tag{6}$$

Для суммарных затрат $З$ имеем

$$З=З_1+З_2=m/t_n\sum_{i=1}^{n}F(t_i)\,\Delta t_i+kn+B=$$

$$=m/n\sum_{i=1}^{n}F(t_i)+kn+B, \tag{7}$$

где $B=lF(t_n)-m/t_n\int_{t_0}^{t_n}F(t)\,dt.$

Так как $t_0=0$; $t_n=\text{const}$, B является константой, не зависящей от n, и для того чтобы получить наименьшие суммарные затраты, нам достаточно минимизировать выражение

$$P(n) = m/n \sum_{i=1}^{n} F(t_i) + kn.$$

При этом отметим, что $F(t_i)$ также зависят от n, поскольку $t_i = t_n/n$. После того как искомое значение n будет найдено, нетрудно определить размеры приобретаемых партий по формулам

$$F_1 = F(t_n/n),$$
$$F_2 - F_1 = F(2t_n/n) - F(t_n/n),$$
$$F_n - F_{n-1} = F(t_n) - F[(n-1)/n \cdot t_n].$$

Линейное и квадратичное распределение $f(t)$ охватывают большинство практически важных задач, так как обычно функция $f(t)$ находится по методу наименьших квадратов, при этом чаще всего применяется выравнивание по прямой или параболе.

Если $f(t)$ имеет линейный вид

$$f(t) = \alpha + \beta t, \qquad (9)$$

то согласно (1) для расхода сырья $F(t)$ имеем

$$F(t) = \int_0^t f(t)\,dt = \alpha t + \beta t^2/2.$$

В соответствии с (8) $P(n)$ в этом случае получаем из выражения

$$P(n) = m/n \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha t_i + \beta t_i^2/2\right) + kn.$$

Но так как $t_i = it_n/n$,

$$P(n) = mt_n/n^2 \left[\alpha \sum_{i=1}^{n} i + \beta t_n/2n \sum_{i=1}^{n} i^2\right] + kn.$$

В силу известных формул (2)

$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2,$$

$$(10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

имеем

$$P(n) = (mt_n/2)\cdot(\alpha + \beta t_n/3) + (mt_n/2n)\cdot(\alpha + \beta t_n/2) + (m\beta t_n^2/12)\cdot(1/n^2 + kn,$$

а так как $t_n = \text{const}$, то первое слагаемое не зависит от n, и нам достаточно минимизировать выражение

$$S(n) = kn + b/n + d/n^2, \qquad (11)$$

где

$$b = (mt_n/2)\cdot(\alpha + \beta t_n/2),$$
$$d = (m\beta + n^2)/12. \qquad (11')$$

Вычисляя $\dfrac{dS}{dn}$ и $\dfrac{d^2S}{dn^2}$, имеем

$$\frac{dS}{dn} = k - b/n^2 - 2d/n^3,$$

$$\frac{d^2S}{dn^2} = 2b/n^3 + 6d/n^4.$$

Приравнивая $\dfrac{dS}{dn}$ к нулю, получаем кубичное уравнение

$$kn^3 - bn - 2d = 0, \qquad (12)$$

которое легко решается аналитически или графически.

Действительные положительные корни (12) соответствуют экстремуму. Если получается, что n не целое число, его округляют до целого. Нетрудно видеть, что если имеется экстремум, то он обязательно минимум. Достаточно показать, что $\dfrac{d^2S}{dn^2} > 0$.

Заметим, что коэффициент b всегда положителен, так как $\alpha = f(0) \geqslant 0$. Если $\beta > 0$, то ясно, что и $b > 0$. Если же $\beta < 0$, то $b = (mt_n/2)\cdot(\alpha + \beta t_n/2) > (mt_n/2)\cdot(\alpha + \beta t_n)$, т. е. $b > (mt_n/2)\cdot[f(t_n)]$, а $f(t_n)$ не может быть отрицательным. Поскольку $b > 0$, то при $d > 0$ $\dfrac{d^2S}{dn^2} > 0$, но и при $d < 0$ также $\dfrac{d^2S}{dn^2} > 0$. Действительно, согласно (11')

$$\frac{d^2S}{dn^2} = \left[mt_n\left(\alpha + \beta t_n/2\right)\right]/n^3 + m\beta t_n^2/2n^4 =$$
$$= (mt_n/n^3)\cdot[(\alpha + \beta t_n/2)\cdot(1 + 1/n)].$$

Но так как $(1 + 1/n)/2 < 1$ для $n > 1$, то для отрицательных d, а значит, и β получаем

$$\frac{d^2S}{dn^2} > (mt_n/n^3)\cdot(\alpha + \beta t_n)$$

или $\dfrac{d^2S}{dn^2} > (mt_n/n^3)\cdot[f(t_n)]$, а $f(t_n) \geqslant 0$.

Рассмотрим далее решение для случая квадратичного распределения плотности расходования запасов

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2. \qquad (13)$$

Тогда

$$F(t) = \int_0^n f(t)\,dt = \alpha t + \beta t^2/2 + \gamma t^3/3.$$

Подставляя значение $F(t)$ в (8), имеем

$$P(n) = kn + mt_n/n^2\cdot\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} i + (\beta t_n/2n)\times \times \sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(\gamma t_n^2/3n^2\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} i^3\right].$$

В силу (10) и (1)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4,$$

получаем

$$P(n) = mt_n(6\alpha + 2\beta t_n + \gamma t_n^2)/12 + kn +$$
$$+ [mt_n(6\alpha + 3\beta t_n + 2\gamma t_n^2)/12]\cdot 1/n +$$
$$+ (mt_n^2/12)\cdot(\beta + \gamma t_n)/n^2.$$

Так как первое слагаемое не зависит от n, то нам достаточно минимизировать выражение

$$S(n) = kn + B/n + D/n^2, \qquad (14)$$

где $B = (mt_n/12)\cdot(6\alpha + 3\beta t_n + 2\gamma t_n^2)$,

$$D = (mt_n^2/12)\cdot(\beta + \gamma t_n). \qquad (14')$$

Первые и вторые производные от $S(n)$ записываются

$$\frac{dS}{dn}=k-B/n^2-2D/n^3, \qquad (15)$$

$$\frac{d^2S}{dn^2}=2B/n^3+6D/n^4. \qquad (16)$$

Если коэффициенты β и γ имеют одинаковые знаки, то $\frac{d^2S}{dn^2}>0$, т. е. минимум обеспечен. Согласно (14′) и (16) имеем

$$\frac{d^2S}{dn^2}=\left(mt_n/n^3\right)\cdot\left[\alpha+\beta t_n/2\right)\cdot\left(1+1/n\right)+$$

$$+\gamma t_n^2(1/3+1/2n)]. \qquad (16')$$

$\alpha=f(0)$ не может быть отрицательным.

Рассмотрим два случая:

а) $\beta>0$; $\gamma>0$; (16′) дает $\frac{d^2S}{dn^2}>0$,

б) $\beta<0$; $\gamma<0$.

В силу неравенств (для $n>1$) $(1+1/n)/2<1$; $1/3+1/2n<1$ (16′) дает

$$\frac{d^2S}{dn^2}>\left(mt_n/n^3\right)\cdot\left(\alpha+\beta t_n+\gamma t_n^2\right) \text{ или}$$

$$\frac{d^2S}{dn^2}>(mt_n/n^3)\cdot f(t_n), \text{ а } f(t_n)\geqslant 0.$$

Следовательно, $\frac{d^2S}{dn^2}>0$.

Для нахождения искомого значения n, приравнивая $\frac{dS}{dn}$ к нулю, получаем кубичное уравнение

$$kn^3-Bn-2D=0, \qquad (17)$$

аналогичное (11).

Минимуму соответствуют действительные положительные корни уравнения, удовлетворяющие при этом условию $\frac{d^2S}{dn^2}>0$.

Аналогично можно получить решение и для некоторых других случаев, например, если плотность расходования сырья изменяется по закону экспоненты

$$f(t)=A\exp(\alpha t). \qquad (18)$$

В этом случае

$$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt=(A/\alpha)\cdot[\exp(\alpha t)-1]$$

и для $P(n)$ имеем

$$P(n)=kn+(m/n)\cdot(A/\alpha)\cdot[\exp(\alpha t_n/n)+$$
$$+\exp(2\alpha t_n/n)+\ldots+\exp(\alpha t_n)-n].$$

Если подсчитать выражение в скобке по формуле для суммы геометрической прогрессии, то придем к минимизации выражения

$$P(n)=kn+[B\exp(\alpha t_n/n)]/n\times$$
$$\times[1-\exp(\alpha t_n/n)], \text{ где } B=mA/\alpha.$$

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть обобщены для схемы стохастического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. П., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1967, с. 160. — 2. Ланге О. Оптимальные решения. М.: Прогресс, 1967.

Статья поступила 6 декабря 1982 г.

SUMMARY

Optimization of the number of restorations of farm raf material stocks on farms is considered. The novelty of the work is in that the number of stocks restorations is not fixed but is derived from conditions of expenditures minimization.