Известия ТСХА, выпуск 2, 1984 год

УДК 631.164.22:636.085

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАСХОДОВАНИЯ КОРМОВ С УЧЕТОМ ИХ СОХРАННОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАПАСОВ КОРМОВ

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

(Кафедра высшей математики)

При определении времени расходования запасов кормов в хозяйстве требуется учет их порчи в период хранения. Пусть имеется Q_0 единиц кормов, равномерно расходуемых со скоростью γ. Изменение количества корма Q в зависимости от времени t в этом случае можно выразить формулой

$$Q = Q_0 - \gamma t, \tag{1}$$

а время t_1 полного расходования начального количества корма —

$$t_1 = Q_0/\gamma. \tag{2}$$

В (1) и (2) не учитывается фактор порчи части корма. Если его учесть, то истинное время расходования корма t_2 будет меньше t_1. Обозначим потерянное количество корма через $\Delta R(t)$, которое при достаточно малом промежутке времени Δt будет равно

$$\Delta R(t) = kQ\Delta t, \tag{3}$$

т. е. потеря массы корма прямо пропорциональна количеству имеющегося корма и периоду его хранения, k — некоторый коэффициент пропорциональности, выражающий потерю единицы массы корма за единицу времени. Если подставить в (3) значение Q из (1), окончательно получим

$$\Delta R(t)=k(Q_0-\gamma t)\Delta t. \quad (4)$$

Для дифференциалов соответственно имеем

$$dR(t)=k(Q_0-\gamma t)dt.$$

Интегрируя по времени в пределах от 0 до t_2, получаем массу испорченного корма за весь период $[0;\ t_2]$:

$$R(t_2)=k\int_0^{t_2}(Q_0-\gamma t)\,dt=k\left(Q_0t_2-\frac{\gamma t_2^2}{2}\right). \quad (5)$$

Согласно (1) за период $[0;\ t_2]$ будет израсходована масса корма γt_2. Следовательно, по (5) условием для определения времени t_2 является

$$k\left(Q_0t_2-\frac{\gamma t_2^2}{2}\right)+\gamma t_2=Q_0, \quad (6)$$

Отсюда

$$t_2=\frac{Q_0}{\gamma}+\frac{1}{k}\pm\sqrt{\left(\frac{Q_0}{\gamma}\right)+\left(\frac{1}{k}\right)^2},$$

или после замены Q_0/γ в соответствии с (2) t_1 получаем

$$t_2=t_1+\frac{1}{k}\pm\sqrt{t_1^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}.$$

Так как

$$t_1^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2<\left(t_1+\frac{1}{k}\right)^2,$$

оба корня положительные. Но поскольку $t_2<t_1$, следует выбрать меньший корень, т. е. тот, которому соответствует знак минус перед радикалом. Следовательно, окончательно получаем

$$t_2=t_1+\frac{1}{k}-\sqrt{t_1^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}. \quad (7)$$

Если, например,

$$\gamma=0{,}02Q_0\frac{1}{\text{день}};\ k=0{,}005\frac{1}{\text{день}},$$

то согласно (2) $t_1=50$ дням, а согласно (7) $t_2=44$ дням.

Аналогичный расчет можно произвести и в случае, когда запас кормов расходуется не до нуля, а до некоторого резервного запаса A. В этом случае вместо условия (6) получаем

$$k\left(Q_0t_2-\frac{\gamma t_2^2}{2}\right)+\gamma t_2=Q_0-A, \quad (8)$$

откуда t_2 определяется в виде

$$t_2=t_1+\frac{1}{k}\pm\sqrt{t_1^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2+2\frac{A}{Q_0k}t_1}.$$

Так как $A<Q_0$, оба корня положительны, но $t_2<t_1$, т. е. перед радикалом следует выбрать знак минус. Отсюда имеем

$$t_2=t_1+\frac{1}{k}-\sqrt{t_1^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2+2\frac{A}{Q_0k}t_1}. \quad (9)$$

Полученный результат можно обобщить и на случай, когда корма расходуются не равномерно, а по некоторому заданному закону в зависимости от времени, т. е.

$$Q=Q_0-\varphi(t), \quad (10)$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая функция, определяемая текущими потребностями животных в кормах, причем $\varphi(0)=0$. В этом случае для потери массы корма за малый промежуток времени Δt в силу (10) имеем

$$\Delta R(t)=k[Q_0-\varphi(t)]\Delta t, \quad (11)$$

а следовательно, потеря массы корма за период $[0;\ t_2]$ определяется формулой

$$R(t_2)=k\left[-\int_0^{t_2}\varphi(t)\,dt+Q_0t_2\right].$$

За этот же период согласно (10) будет израсходована масса корма $\varphi(t_2)$. Следовательно, время t_2, в течение которого начальное количество корма Q_0 уменьшится до резервного запаса A, определяется из уравнения

$$k\left[Q_0t_2-\int_0^{t_2}\varphi(t)\,dt\right]+\varphi(t_2)=Q_0-A. \quad (12)$$

Если в этом уравнении ряд положительных действительных корней, то из них надо выбрать наименьший.

При определении оптимального запаса кормов решается следующая задача. Пусть запасы корма возобновляются в течение некоторого периода T и потребное количество корма Q_0 поступает равными партиями n раз. Тогда при скорости расходования корма γ к моменту времени t количество корма будет равно

$$Q=Q_0/n-\gamma t. \quad (13)$$

Потерю корма от порчи к моменту t можно подсчитать по формуле (5), если Q_0 заменить в ней Q_0/n, т. е.

$$R(t)=k\int_0^t\left(\frac{Q_0}{n}-\gamma t\right)dt=k\left(\frac{Q_0}{n}t-\gamma\frac{t^2}{2}\right).$$

Если положить далее $t=T/n$, то

$$R(T/n)=kT/n\left(Q_0-\frac{\gamma T}{2}\right)\Big/n. \quad (14)$$

Если цена единицы корма а, то расходы от порчи корма за все n периодов, т. е. за время T, составят

$$U_1=akT[Q_0/n-\gamma T/2n]. \quad (15)$$

Подсчитаем расходы на перевозки n партии кормов, при этом примем, что цена перевозки одной партии выражается линейной функцией от размера партии $\alpha+\beta\,Q_0/n$ (где α и β — известные коэффициенты). За все n периодов расходы на перевозку груза составят

$$U_2=n(\alpha+\beta Q_0/n)=\alpha n+\beta Q_0. \quad (16)$$

Определим далее расходы на хранение кормов. Средний размер хранимой партии кормов — $Q_0/2n$. Расходы на хранение можно считать линейной функцией $\gamma+\delta Q_0/$ $/2n$ размера хранимой партии. В этом случае расходы на хранение n партий составят

$$U_3 = n\left(\gamma + \delta\frac{Q_0}{2n}\right) = \gamma n + \frac{\delta Q_0}{2}. \quad (17)$$

Суммарные затраты $U = U_1 + U_2 + U_3$ согласно (15), (16) и (17) выражаются в виде

$$U = akT\frac{Q_0 - \frac{\gamma T}{2}}{n} +$$

$$+ \alpha n + \beta Q_0 + \gamma n + \frac{\delta Q_0}{2}. \quad (18)$$

Определим теперь, при каком n затраты будут наименьшими. Для производных имеем

$$\frac{dU}{dn} = -akT\frac{Q_0 - \frac{\gamma T}{2}}{n^2} + \alpha + \gamma,$$

$$\frac{d^2U}{dn^2} = 2akT\frac{Q_0 - \frac{\gamma T}{2}}{n^3}.$$

Заметим, что в силу (14) $Q_0 - \gamma T/2$ положительно, следовательно, $d^2U/dn^2 > 0$ и минимум обеспечен.

Приравнивая dU/dn нулю, находим искомое значение n:

$$= \sqrt{\frac{ak(TQ_0 - \frac{\gamma T}{2}}{\alpha+\gamma}}.$$

Размеры оптимального запаса $П = Q_0/n$ в силу (19) будут равны

$$П = \frac{Q_0}{\sqrt{Q_0 - \frac{\gamma T}{2}}}\sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{akT}}. \quad (20)$$

Если γ мало, т. е. порча кормов происходит медленно, то размер оптимального запаса приблизительно пропорционален квадратному корню из общего количества кормов.

ЛИТЕРАТУРА

Ланге О. Оптимальные решения. М.: Прогресс, 1967.

Статья поступила 10 октября 1983 г.