МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ -
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

А.И. Иноземцев

МНОГОМЕРНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Учебное пособие

Москва
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
2025

УДК 517.518
ББК22.161.67
И 67

Рецензенты:

О.Л. Шеметкова
кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики высшей школы кибертехнологий, математики и статистики ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова»

Н.А. Коноплин
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики института мелиорации, водного хозяйства и строительства имени А.Н. Костякова ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева»

И **Иноземцев, А.И.** Многомерные частно-интегральные уравнения Фредгольма в анизотропных пространствах Лебега: учебное пособие/ А.И. Иноземцев; Российский государственный аграрный университет-МСХА имени К.А. Тимирязева. — Москва: РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2025. — 75 с. — Текст: электронный.

ISBN 978-5-9675-2062-4
DOI: 10.26897/978-5-9675-2062-4-75

Учебное пособие содержит систематическое изложение теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных уравнений Фредгольма в анизотропных пространствах Лебега, их свойства, а также условия существования и единственности их решения.

Учебное пособие адресовано бакалаврам по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии», научным работникам, аспирантам и студентам, экономических и технических направлений, интересующихся функциональным и математическим анализом.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института экономики и управления АПК РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол № 1 от 30 августа 2024 г.

Inozemtsev, A.I. Multidimensional Fredholm partial integral equations in anisotropic Lebesgue spaces: textbook/ A.I. Inozemtsev; Russian State Agrarian University-Moscow State Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev. — Moscow: RSAU-MTAA named after K. A. Timiryazev, 2025. — 75 p. — Text: electronic.

The textbook contains a systematic presentation of the theory of partial integral and linear partial integral Fredholm equations in anisotropic Lebesgue spaces, their properties, as well as conditions for the existence and uniqueness of their solution.

The textbook is addressed to bachelors in the direction 09.03.02 "Information systems and technologies" , researchers, postgraduates and students, economic and technical directions interested in the theory of functional and mathematical analysis.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **5**

ГЛАВА I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ **7**

1 Операторы и их свойства 7

2 Принцип сжимающих отображений 14

3 Спектр линейного оператора 16

ГЛАВА II. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **18**

4 Интегральные уравнения Фредгольма 18

5 Интегральные уравнения Вольтерра 19

6 Некоторые интегральные преобразования 20

7 Частно-нтегральные операторы 24

8 Частно-нтегральные уравнения Фредгольма 25

9 Частно-нтегральные уравнения Вольтерра 27

10 Сведение линейного уравнения с частными производными к частно-интегральному уравнению Вольтерра 27

ГЛАВА III. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА **37**

11 Анизотропные пространства Лебега 37

12 Существование и единственность частно-интегрального уравнения Фредгольма 38

13 Частно-интегральное уравнение Вольтерра в анизотропных пространствах Лебега 46

ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 56

14 Линейные частно-интегральные уравнения Фредгольма 56

15 Линейные частно-интегральные уравнения Вольтерра 59

16 Линейные частно-интегральные уравнения Фредгольма в пространствах непрерывных функций 62

ЛИТЕРАТУРА 74

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит основы теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных уравнений, содержащих операторы вида

$$K_\alpha u(x) = \int_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{1}$$

$$K = \sum_\alpha K_\alpha \tag{2}$$

соответственно, в различных функциональных пространствах, к которым приводятся некоторые задачи математической физики.

Характерная особенность этого уравнения связана с интегрированием неизвестной функции $u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)$ под знаком интеграла не по всем, а по части переменных. В (1) $x \in \mathrm{R}_n$, α — мультииндекс, состоящий из элементов одного из 2^n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Операторы (1) и (2) — не интегральные и не компактные даже в случае непрерывного ядра $k_\alpha(x, t_\alpha)$. Поэтому уравнения, содержащие операторы (1) и (2) существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Интегральный оператор

$$Iu(x) = \int_D k(x, t)\, u(t)\, dt$$

с ядром $k(x, t)$ является частным случаем частно-интегрального оператора (1) при $\alpha = (1, 2, \ldots, n)$, $(\bar\alpha = \emptyset)$ т.е.

$$K_{(1,2,\ldots,n)} u(x) = \int_D k_{(1,2,\ldots,n)}(x, t)\, u(t)\, dt,$$

где $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — свободные от интегрирования переменные, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — переменные интегрирования. Линейные и нелинейные операторы и уравнения с частными интегралами изучались в монографиях [7], [8], [10], [11], [18], в этих же книгах содержится и библиография работ по теории операторов и уравнений с частными интегралами.

В учебном пособии изучаются: критерии и достаточные условия существования и единственности решения частно-интегрального уравнения Фредгольма и Вольтерра в анизотропных пространствах Лебега. Установленные свойства решений применяются к исследованию некоторых задач математической физики, модель которых сводится к интегральному уравнению содержащему частно-интегральный оператор (1) .

Учебное пособие разделено на 16 параграфов, объединенных в четыре главы.

Глава 1 начинается с основ теории функционального анализа и функций действительного переменного. Приведены основные понятия, определения и теоремы, общие понятия операторных уравнений. В главе 2 приведены примеры двух основных видов интегральных уравнений, имеющих многочисленные приложения в математической физики, вводится понятие частно-интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма. Основное содержание третьей главы связано с исследованием частно-интегральных уравнений в анизотропных пространствах Лебега. Глава 4 посвящена исследованию линейных частно-интегральных уравнений в анизотропных пространствах и пространствах непрерывных функций $C(D)$.

Автор надеется, что данное учебное пособие будет полезным научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся функциональным анализом, интегральными уравнениями и их приложениями.

ГЛАВА I
ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Операторы и их свойства

Определение 1.1.1. Отображением множества X на Y ($f : X \to Y$) называется любое соответствие элементам множества X элементов множества Y.

Множество $Dom(f) \subset X$ называется областью определения, а множество $Im(f) \subset Y$ — областью значений отображения f. Образом отображения f называется множество $\mathrm{Im} f = \{y = f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y$. Прообразом элемента $b \in B$ при отображении f называется множество $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Прообразом отображения f называется множество $Dom(f) = f^{-1}(Y_0) = \bigcup\limits_{y \in Y_0 \subset Y} f^{-1}(y)$.

Определение 1.1.2. Отображение $f : X \to Y$ числового множества X в числовое множество Y называется **функцией**.

Пример 1.1.1.

1. Основные элементарные функции: x^α, α^x, $\log_\alpha x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, shx, chx, $\arccos x$, $arshx$, $archx, \ldots$;
2. Элементарные функции, которые получаются из основных элементарных с помощью конечного числа применения операций сложения, вычитания, умножения, деления и композиции: $y = \dfrac{\frac{2}{x^3} - 3\sin e^x}{arch\sqrt[3]{x} + \ln shx}$;
3. функции, которые не выражаются через основные элементарные[1]

[1]приведены лишь некоторые функции, которые имеют широкое приложение в естественных науках

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2}\, dx = \Phi(x) + C$ (функция Лапласа);

(b) $\int \frac{\sin x}{x}\, dx = Si(x) + C$ (интегральный синус);

(c) $\int \frac{\cos x}{x}\, dx = Co(x) +$ (интегральный косинус);

(d) $\int \frac{e^x}{x}\, dx = Ei(x) + C$ (интегральная экспонента);

(e) $\int \frac{dx}{\ln x} = Li(x) + C$ (интегральный логарифм);

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$, $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$, $\int \frac{dx}{(1 + c \sin^2 x)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ $(k < 1)$ (эллиптические интегралы Лежандра 1-го, 2-го и 3-го рода соответственно);

(g) $\int \sin \frac{\pi x^2}{2}\, dx = S(x) + C$, $\int \cos \frac{\pi x^2}{2}\, dx = C(x) + C$, $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ (интегралы Френеля);

(h) $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt$ (бета-функция Эйлера);

(i) $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dz$ (гамма-функция Эйлера);

(j) $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$ (функция Бесселя первого рода).

Определение 1.1.3. Отображение $f : X \to Y$ множества элементов произвольной природы X в числовое множество Y называется **функционалом**.

Пример 1.1.2.

1. модуль вектора $f : V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(\bar{a}) = f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = |\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \in \mathbb{R}$;

2. определитель квадратной матрицы $f: M_{n\times n}(\mathrm{C}) \to \mathrm{C}$, $f(A_{n\times n}) = |A| \in \mathrm{C}$;

3. нормы в функциональных пространствах, $f: K \to \mathrm{R}$, $x \in X$, $f(K) = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Kx\|_Y = \|K\| \in \mathrm{R}$;

4. скалярное произведение на фиксированный вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. $f: V_n(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$, $\bar{x} \in V_n$, $f(\bar{x}) = f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \bar{x}\cdot\bar{a} = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n \in \mathrm{R}$;

5. значение функции в фиксированной точке $f: F(x) \to \mathrm{R}$, $y \in F(x)$, $f(y) = y(x_0) \in \mathrm{R}$;

6. величина интеграла от функции на отрезке $[a, b]$ $f: F(x) \to \mathrm{R}$, $y \in F(x)$, $f(y) = \int_a^b y(x)\,dx \in \mathrm{R}$.

Определение 1.1.4. Отображение $f: X \to Y$ множества элементов произвольной природы X в множество элементов произвольной природы Y называется **оператором**.

Пример 1.1.3.

1. векторное произведение на фиксированный вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $f: V_3(\mathrm{R}) \to V_3(\mathrm{R})$, $\bar{x} \in V_3(\mathrm{R})$, $f(\bar{x}) = \bar{x}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \in V_3(\mathrm{R})$;

2. умножение матриц на фиксированную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathrm{R})$, $f: M_{n\times n}(\mathrm{R}) \to M_{n\times n}(\mathrm{R})$, $X \in M_{n\times n}(\mathrm{R})$, $f(X) = X \times A = Y \in M_{n\times n}(\mathrm{R})$;

3. проекция (отображение) n-мерного пространства в m-мерное (матричный оператор), $f: V_n(\mathrm{R}) \to V_m(\mathrm{R})$ $\bar{x} \in V_n(\mathrm{R})$, $\bar{y} \in V_m(\mathrm{R})$, $f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} \\ \ldots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{m1} \end{pmatrix} = y \in V_m(\mathrm{R})$;

4. производная функции $f: F(x) \to F(x)$, $f(y) = y'(x) \in F(x)$;

5. оператор дифференцирования $f: F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(y) = D^{\alpha} y(x1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x_1^{\alpha 1} \partial x_2^{\alpha 2} \ldots \partial x_n^{\alpha n}} \in F(x)$, где мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

6. интеграл с переменным верхним пределом $f: F(x) \to F(x)$, $f(y) = \int_a^x y(t)\, dt \in F(X)$;

7. интегральный оператор $(Af)(x) = \int_D k(x, t, f(t))\, dt$, $t \in D$;

   (a) линейный интегральный оператор $(Kf)(x) = \int_D k(x, t) f(t)\, dt$;

   (b) интегральный оператор со слабой особенностью $(Kf)(x) = \int_D \dfrac{g(x, t)}{|x - t|^m} f(t)\, dt$, $0 < m < n$, $n-$ размерность пространства;

   (c) интегральный сингулярный оператор $(Kf)(x) = \int_D \dfrac{f(t)}{t - x} dt$, $t \in D$;

   (d) оператор вида свертки $(Sf)(x) = \int_D g(t - x) f(t)\, dt$;

   (e) частно интегральный оператор $(Kf)(x) = \int_D k(x_1, x_2, t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1$.

Любая функция является функционалом, любой функционал — оператором, т.е. понятие оператора более широкое.

Пусть X и Y — нормированные пространства.

Определение 1.1.5. Оператор $K : X \to Y$ называется линейным, если выполняются условия:

1. $\forall x \in X$ и $\lambda \in P$, $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ (однородность);
2. $\forall x_1, x_2 \in X$, $K(x_1 + x_2) = K(x_1) + K(x_2)$ (аддитивность).

Эти условия можно заменить одним $K(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha K(x_1) + \beta K(x_2)$ или $K\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(x_i)$.

Частные случаи линейных операторов: $E(x) = 0$ — нулевое отображение, $I(x) = x$ — единичное отображение, $K(x) = \lambda x$ — отображение подобия.

Пусть X и Y — два линейных нормированных пространства. Множество $B(X, Y)$ всех непрерывных линейных операторов действующих из X в Y по операциям сложения ($(A + B)x = Ax + Bx$) и умножения на число ($(\lambda A)x = \lambda Ax$): $\langle B(X, Y); +, \lambda\rangle$ образует линейное пространство.

Линейное оператор $K : X \to Y$ называется ограниченным, если для любого $x \in X$ существует постоянная C такая, что

$$\|K(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Линейный оператор K непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Число

$$C_0 = \sup_{\|x\|_X=1} \|K(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|K(x)\|_Y = \|K\|$$

называется нормой линейного оператора и обозначается $\|K\|$, т.к. удовлетворяет всем аксиомам нормы. Пространство $B(X, Y)$ — банахово (полное нормированное) пространство. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность непрерывных линейных операторов из X в Y такая, что $\|A_{n+p} - A_n\|_{n\to\infty} \to 0$ (фундаментальная последовательность), то существует оператор $A \in B(X, Y): A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ (сходимость по норме или равномерная сходимость).

Произведение операторов $A : Z \to Y$ и $B : X \to Z$ определим равенством $C(x) = (AB)x = A(Bx)$, где $C : X \to Y$. На множестве $B(X, X)$ можно определить степень оператора: $A^0(x) = I(x) = x$, $A^1(x) = A(x)$, $A^2(x) = A(A(x)) = (AA)x$, $A^n(x) = (\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n})x$, $A^{-1}(x)$ — обратный оператор $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Свойства операций

1. Пусть $A, B, C \in B(X, Y)$, тогда $\|C(x)\|_Y = \|A(x) + B(x)\|_Y \le \|A(x)\|_Y + \|B(x)\|_Y \le \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y + \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|B(x)\|_Y$ следовательно $\|C\| \le \|A\| + \|B\|$ и $C \in B(X, Y)$;
2. Пусть $A \in B(Z, Y), B \in B(X, Z), C \in B(X, Y)$, тогда $\|C(x)\|_Y = \|A(B(x))\|_Y \le \|A\| \cdot \|B(x)\|_Z \le \|A\| \cdot \|B\|$ следовательно $\|C\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ и $C \in B(X, Y)$.

Множество линейных операторов $\langle B(X, X); +, \cdot, \lambda\rangle$ — линейное нормированное пространство, которое относительно операций является кольцом.

Оператор K называется компактным, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное (замкнутый шар единичного радиуса из X он переводит в компактное множество из Y). Непрерывный компактный оператор называется вполне непрерывным. Любой компактный оператор является ограниченным. Для линейных операторов понятия компактности и вполне непрерывности совпадают. Пусть X и Y — нормированные пространства. Оператор $K : Dom(K) \subset X \to Y$ называется замкнутым, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset Dom(K)$ из условий $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} Kx_n = y_0$ следует, что $x_0 \in Dom(K)$ и $Kx_0 = y_0$.

Ядром линейного оператора $K : X \to Y$ называется множество $kerK = \{x \in X : K(x) = 0 \in Y\}$. Размерность ядра называется дефектом оператора. Коядром линейного оператора $K : X \to Y$, называется фактор-множество $cokerK = Y/(ImX)$. Оператор называется нетеровым, если его образ замкнут и размерности ядра и коядра конечны, если размерности ядра и коядра конечны и совпадают, то оператор называется фредгольмовым.

Виды сходимости последовательности операторов

1. равномерная сходимость (сходимость по норме): последовательность операторов A_n равномерно ($A_n \rightrightarrows A$) сходится к оператору A если $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$;

   Пример. При $\|A\| < 1$ ряд $I + A + A^2 + \dots$ равномерно сходится, т.к. $\|A_p - A_q\| = \left\| \sum_{i=0}^{p} A^i - \sum_{i=0}^{q} A^i \right\| = \left\| \sum_{i=q+1}^{p} A^i \right\| \le \sum_{i=q+1}^{p} \|A^i\| \le \sum_{i=q+1}^{p} \|A\|^i$. Если $S = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$, то $S(I - A) = I$ или $(I - A)S = I$, т.е. существует оператор $I - A$ обратный к оператору S, $(I - A)^{-1} = S = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$.

2. сильная сходимость (сходимость всюду): последовательность операторов A_n сильно сходится к оператору A если для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ сходится к A. Предел всюду сходящейся последовательности линейных операторов — снова

линейный оператор. Любая равномерно сходящаяся последовательность операторов является сильно сходящейся.

3. слабая сходимость: последовательность операторов A_n слабо сходится к оператору A если для любого $x, y \in X$ выполняется равенство $(A_n x, y) = (Ax, y)$.

Приведем некоторые классы линейных операторов: унитарные ($\|Ux\| = \|x\|$, сопряженный оператор $U^* = U^{-1}$); вполне непрерывный ($(Ax_n; y_n) \to (Ax; y)$ или $Ax_n \to Ax$ при слабой сходимости последовательностей $x_n \to x$, $y_n \to y$); проекционный ($Px = x'$, где $x \in X$, $x' \in X'$, X' — подпространство пространства X).

Пусть $L \in B(X, Y)$, где $Y = \mathrm{R}$, тогда $B(X, Y)$ — пространство непрерывных линейных функционалов. Пространство $X^* = B(X, \mathrm{R})$ с нормой $\|L\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Lx\|$ называется сопряженным к линейному нормированному пространству X. $\overset{*}{X}$ — банахово пространство.

Пусть $K : X \to Y$, тогда оператор $K^* : Y^* \to X^*$ для которого $K * \varphi(x) = \varphi(K(x))$, где $\varphi(x) \in Y^*$ называется сопряженным к оператору K. Известно, что $\|K\| = \|K^*\|$. Если $K = K^*$, то K — самосопряженный оператор. Обозначим $\langle x, f \rangle = f(x)$ значение линейного функционала f в точке x, тогда для сопряженного оператора $K * \varphi(x) = K(\varphi(x)) \Leftrightarrow \langle x, K * \varphi \rangle = \langle Kx, \varphi \rangle$. Если Y — банахово пространство, то K вполне непрерывен тогда и только тогда, когда K^* вполне непрерывен.

§2. Принцип сжимающих отображений

Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение K называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\rho_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_Y(K(x_1), K(x_2)) < \varepsilon$. Одним из классов равномерно непрерывных отображений является класс отображений, удовлетворяющих условию Гельдера порядка α $(0 < \alpha \leq 1)$: $\rho_y(K(x_1), K(x_2)) \leq c(\rho_X(x_1, x_2))^\alpha$, где c некоторая постоянная, наименьшая из которых называется постоянной (коэффициентом) Гельдера. При $\alpha = 1$ получим класс (условие) Липшица. Если $\alpha = 1$ и постоянная Липшица $c < 1$, то отображение K называется сжимающим отображением или отображением сжатия. Оператор $K : X \to X$ называется оператором обобщенного сжатия, если существуют такие числа $\delta, \varepsilon, c(\delta, \varepsilon) < 1$ что $\delta \leq \rho_X(x_1, x_2) \leq \varepsilon \Rightarrow \rho_X(K(x_1), K(x_2)) \leq c(\delta, \varepsilon)\rho_X(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in DomK$.

Теорема 1.2.1. *Пусть X — полное метрическое пространство, $K : X \to X$ — оператор сжатия, т.е. $\rho(Kx, Ky) \leq c\rho(x, y)$, где $c /= c(x, y)$ и $0 < c < 1$, тогда существует одна, и только одна точка x_0 такая, что $Kx_0 = x_0$.*

Точка x_0 удовлетворяющая условию $Kx_0 = x_0$ называется неподвижной.

□ Рассмотрим последовательность $Ax = x_1$, $Ax_1 = x_2, \ldots, Ax_n = x_{n+1}, \ldots$.

Покажем фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Из неравенств $\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_n) \leq c\rho(x_{n-1}, x_n) = c\rho(Ax_{n-2}, Ax_{n-1}) \leq c^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \ldots \leq c^n(x, Ax)$ и $\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq c^n(1 + c + \ldots + c^{p-1})\rho(x, Ax) = c^n c\frac{p-1}{c-1}\rho(x, Ax)$ следует

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(x, Ax),$$

так как $0 < c < 1$. Откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$ при любом

$p > 0$. Т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, в силу полноты пространства X существует элемент $x_0 \in X$, что $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Из неравенств $\rho(x_0, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + c\rho(x_{n-1}, x_0)$ и $\rho(x_0, x_n) < \varepsilon/2$, $\rho(x_{n-1}, x_0) < \varepsilon/2$ (т.к. $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$) получим $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$, а следовательно $Ax_0 = x_0$.

Неподвижная точка единственна т.к. предполагая существование еще одной точки $y_0 = Ay_0$ получим $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq c\rho(x_0, y_0)$ или $(1 - c)\rho(x_0, y_0) \leq 0$, но $0 < c < 1$ следовательно $\rho(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$.

Формула $\rho(x_n, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(x, Ax)$ дает оценку ошибки n-го приближения и является оценкой скорости сходимости.

§3. Спектр линейного оператора

Пусть X — банахово пространство, элемент $x \in X$ называется регулярным, если существует обратный к нему элемент $x^{-1} \in X$ и сингулярным в противном случае. Спектром $\sigma(x)$ элемента x называется множество комплексных чисел λ таких, что $\lambda e - x$ сингулярен. Число $|\sigma(x)| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda|$. Резольвентным множеством называется множество $\varrho(x) = \overline{\sigma(x)}$ дополнение спектра. Функция $x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ определенная на $\lambda \in \varrho(x)$ называется резольвентой элемента x. Известно, что $|\sigma(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |x^n|^{\frac{1}{n}} \leq |x|$.

Пусть X — банахово пространство над полем С, $K : X \to X$ — линейный оператор, $I : X \to X$ — единичный (тождественный оператор). Рассмотрим уравнение $Kx = \lambda x$ или $(K - \lambda I)x = 0$.

Число $\lambda \in$ С называется регулярной точкой оператора K, если $ker(K - \lambda I) = \{0\}$, $Im(K - \lambda I) = X$, оператор $(K - \lambda I)^{-1}$ ограничен, т.е. существует и принадлежит пространству $L(X)$. Множество всех регулярных точек оператора K называется резольвентным множеством оператора K и обозначается $\rho(K)$. Множество $\sigma(K) = C\backslash\rho(K)$ называется спектром оператора K. Операторная функция $R_K : \rho(K) \to X$, определенная формулой $R_K(\lambda) = (K - \lambda I)^{-1}$, называется резольвентой оператора K.

Число $\lambda \in C$ называется собственным значением оператора K, если существует элемент $x_\lambda \in X$ такой, что $x_\lambda \neq 0$ и $Kx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Элемент x_λ называется собственным вектором оператора K, соответствующим собственному значению λ. Множество собственных значений оператора K называется дискретным (точечным) спектром оператора K и обозначается $\sigma_d(K) \subset \sigma(K)$. Спектр оператора K состоит из трех частей: $\sigma(K) = \sigma_d(K) \cup \sigma_c(K) \cup \sigma_r(K)$, где $\sigma_d(K)$ — точечный спектр, $\sigma_c(K) = \{\lambda \in \sigma(K)\backslash\sigma_d(K): \overline{Im(K - \lambda I)} = X\}$ — непрерывный, $\sigma_r(K) = \{\lambda \in \sigma(K)\backslash\sigma_d(K): Im(K - \lambda I) \neq X\}$ — остаточный.

Свойства спектра оператора

1. если $|\lambda| > \|K\|$, то $\lambda \in \rho(K)$ и $R_K(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n}{\lambda^{n+1}}$;
2. спектр $\sigma(K)$ замкнут и $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\} \leq \|K\|$;
3. $\sigma(K) \neq \emptyset$;
4. если $\rho(K) \neq \emptyset$, то K замкнут.

ГЛАВА II
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§4. Интегральные уравнения Фредгольма

Определение 1.4.1. *Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение вида*

$$u(x) = \int_a^b k(x, y)u(y)\,dy + f(x), \tag{4.1}$$

где $u(x)$ *— неизвестная функция,* $k(x, y)$ *и* $f(x)$ *— заданные функции.*

Если в (4.2) $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, если $f(x) \not\equiv 0$, то неоднородным. Функция $k(x, y)$ называется ядром интегрального уравнения (4.2), а $f(x)$ — свободным членом.

Определение 1.4.2. *Интегральным уравнением Фредгольма первого рода называется уравнение вида*

$$\int_a^b k(x, y)u(y)\,dy = f(x). \tag{4.2}$$

Аналогично тому, как линейное преобразование задается в n-мерном векторном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$:

$$y = Ax \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, в случае интегральных уравнений вместо векторов x, y используем определенные в промежутке $[a, b]$

функции, вместо матрицы A — ядро $k(\tau, \sigma)$, и вместо суммирования — интегрирование:

$$y(\tau) = \int_a^b k(\tau, \sigma)x(\sigma)\, d\sigma.$$

Собственными значениями матрицы A называются такие значения μ, для которых уравнение $Ax = \mu x$ имеет ненулевые решения. Аналогично, собственными значениями ядра $k(\tau, \sigma)$ называются такие значения μ, для которых уравнение $\int_a^b k(\tau, \sigma)x(\sigma)\, d\sigma = \mu x$ имеет ненулевые решения. $\lambda = \frac{1}{\mu}$ называется характеристическим значением ядра $k(\tau, \sigma)$, если однородное интегральное уравнение $y(\tau) = \lambda \int_a^b k(\tau, \sigma)x(\sigma)\, d\sigma$ имеет ненулевые решения, которые называются собственными функциями ядра.

Ядра, удовлетворяющие условию $k(\tau, \sigma) = \int_a^b \int_a^b |k(\tau, \sigma)|\, d\tau d\sigma < +\infty$ называются фредгольмовыми.

§5. Интегральные уравнения Вольтерра

Определение 1.5.1. *Интегральным уравнением Вольтерра второго рода называется уравнение вида*

$$u(x) = \int_a^x k(x, y)u(y)\, dy + f(x), \tag{5.1}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция, $k(x, y)$ и $f(x)$ — заданные функции.

Если в (5.1) $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, если $f(x) \not\equiv 0$, то неоднородным. Функция $k(x, y)$ называется ядром интегрального уравнения (5.1), а $f(x)$ — свободным членом.

Определение 1.5.2. *Интегральным уравнением Вольтерра первого рода называется уравнение вида*

$$\int_a^x k(x, y)u(y)\,dy = f(x). \qquad (5.2)$$

Уравнение Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, доопределив ядро $k(x, y)$ при значениях $y > x$, т.е.

$$k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & a \le x \le y \\ 0, & x > y. \end{cases}$$

Если в уравнении (5.2) ядро имеет вид $k(x, y)\frac{q(x,y)}{|x-y|^\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, $q(x, y)$ — непрерывная на $[a, b]\times[c, d]$ функция, то уравнение (5.2) называется уравнением со слабой особенностью.

Частным случаем уравнения Вольтерра первого рода со слабой особенностью вида

$$\int_a^x \frac{q(y)}{|x-y|^\alpha}u(y)\,dy = f(x), \quad 0 < \alpha < 1$$

является уравнение Абеля, к которой сводится решение задачи о таутохроне.

§6. Некоторые интегральные преобразования

Приведем некоторые интегральные преобразования, которые часто используются в анализе и математической физике, а также формулы их обращения:

1. косинус-преобразование Фурье:

$$f(x) = (F_c u)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xt) u(t)\, dt \quad (x > 0).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xt) f(t)\, dt;$$

2. синус-преобразование Фурье:

$$f(x) = (F_s u)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xt) u(t)\, dt \quad (x > 0).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xt) f(t)\, dt;$$

3. комплексное преобразование Фурье:

$$f(x) = (Fu)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} u(t)\, dt \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)\, dt;$$

4. многомерное комплексное преобразование Фурье:

$$f(x) = (F u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} e^{-ix \cdot t} u(t)\, dt \quad (x \in R_n),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathrm{R}_n$, $x \cdot t = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$. Формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathrm{R}_n} e^{ix\cdot t} f(t)\, dt;$$

5. преобразование Лапласа:

$$f(x) = (\mathrm{L}y)(x) = \int_0^\infty e^{-xt} u(t)\, dt, \quad (x > 0).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx} f(t)\, dt,$$

где $a > 0$, функция $f(t)$ — аналитическая в комплексной полуплоскости $Re(t) > b$ $(b < a)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = O(|t|^{-\alpha})$, $\alpha > 0$;

6. преобразование Меллина:

$$f(x) = (\mathrm{M}u)(x) = \int_0^\infty t^{x-1} u(t)\, dt \quad (x > 0).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-t} f(t)\, dt,$$

где при $0 < k < c$ сходится интеграл $\int_0^\infty x^{k-1} |u(x)|\, dx$;

7. преобразование Ханкеля:

$$f(x) = (H_\nu u)(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt} J_\nu(xt) u(t)\, dt \quad (x > 0),$$

где $J_\nu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (z/2)^{\nu+2k}}{i!\Gamma(\nu+i+1)}$ — функция Бесселя первого рода $z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$, $\nu \in \mathbb{C}$ $(Re(\nu) > -1)$. При $\nu = -1/2$ получим $J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z$ и преобразование Ханкеля совпадает с косинус-преобразованием Фурье: $(H_{-1/2}u)(x) = (\mathrm{F}_c u)(x)$. При $\nu = 1/2$ получим $J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z$ и преобразование Ханкеля совпадает с косинус-преобразованием Фурье: $(H_{1/2}u)(x) = (\mathrm{F}_s u)(x)$. Формула обращения:

$$u(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xt}\, J_\nu(xt) f(t)\, dt;$$

8. общее интегральное преобразование:

$$f(x) = \int_0^{\infty} k(xt) u(t)\, dt \quad (x > 0).$$

Формула обращения:

$$u(x) = \int_0^{\infty} h(xt) f(t)\, dt,$$

где существует функция $h(t)$ такая, что $(\mathrm{M}k)(x)\cdot(\mathrm{M}h)(1-x) = 1$. Функции $k(x)$ и $h(x)$ в этом случае называются несимметричными ядрами Фурье. Если $(\mathrm{M}k)(x)\cdot(\mathrm{M}k)(1-x) = 1$, то $k(x)$ — ядро Фурье. Например: функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$, $\sqrt{x}J_\nu(x)$ — ядра Фурье.

§7. Частно-интегральные операторы

Определение 1.7.1. *Многомерными частно-интегральным оператором называется оператор*

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x;t_\alpha)\,u(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\,dt_\alpha, \quad 1 \le m < n, \qquad (7.1)$$

где t_α переменные интегрирования частного интеграла, $x_{\bar\alpha}$ — $(n-m)$ мерный вектор, номера координат которого не совпадают с номерами переменных интегрирования t_α и

$$D_\alpha^{(m)} = D_{\alpha_1}^{(1)} \times \ldots \times D_{\alpha_m}^{(1)} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \ldots \times (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$$

— m-мерный параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям.

Пример 1.7.1. Пусть $n = 5, \alpha = (2,4)$, тогда $\bar\alpha = (1,3,5)$ и частно-интегральный оператор (7.1) примет вид

$$(K_{(2,4)}^{(5)}u)(x) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_4}^{b_4} k_{(2,4)}(x;t_2,t_4)\;u(x_1,t_2,x_3,t_4,x_5)\,dt_2dt_4.$$

Определение 1.7.2. *Линейным частно-интегралным оператором называется оператор*

$$(Ku)(x) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\alpha}(K_\alpha^{(m)}u)(x), \qquad (7.2)$$

Заметим, что надстрочечное обозначение (m) в $K_\alpha^{(m)}$ в целом лишнее, т.к. уже содержится в подстрочечном обозначении $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Поэтому в некоторых случаях оно не указывается в тексте пособия.

Пример 1.7.2. Пусть $n = 3$, тогда линейный частно-интегральный оператор примет вид

$$(Ku)(x) = k_{(0,0,0)}(x_1,x_2,x_3)u(x_1,x_2,x_3)+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1} k_{(1,0,0)}(x_1, x_2, x_3; t_1)u(t_1, x_2, x_3)\, dt_1+$$

$$+\int_{a_2}^{b_2} k_{(0,1,0)}(x_1, x_2, x_3; t_2)u(x_1, t_2, x_3)\, dt_2+$$

$$+\int_{a_3}^{b_3} k_{(0,0,1)}(x_1, x_2, x_3; t_3)u(x_1, x_2, t_3)\, dt_3+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} k_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2)u(t_1, t_2, x_3)\, dt_1dt_2+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} k_{(1,0,1)}(x_1, x_2, x_3; t_1, t_3)u(t_1, x_2, t_3)\, dt_1dt_3+$$

$$+\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} k_{(0,1,1)}(x_1, x_2, x_3; t_2, t_3)u(x_1, t_2, t_3)\, dt_2dt_3+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} k_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)u(t_1, t_2, t_3)\, dt_1dt_2dt_3.$$

§8. Частно-интегральные уравнения Фредгольма

Определение 1.8.1. *Частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид*

$$\varphi(t, s) = \lambda\int_{a_1}^{b_1} k_1(t, s, \tau)\varphi(\tau, s)\, d\tau + f(t, s), \qquad t, s \in D \subset \mathrm{R}_2, \qquad (8.1)$$

или

$$\varphi(t,s) = \lambda \int_{a_2}^{b_2} k_2(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\sigma + f(t,s), \quad t,s \in D \subset \mathrm{R}_2, \quad (8.2)$$

на конечном прямоугольнике $D = D_{1,2} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ *и* $\lambda \in \mathrm{C}$.

Частно-интегральными уравнениями Фредгольма *первого рода* называются соответственно уравнения

$$\int_{a_1}^{b_1} k_1(t,s,\tau)\varphi(\tau,s)\,d\tau = f(t,s),$$

$$\int_{a_2}^{b_2} k_2(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\sigma = f(t,s).$$

Определение 1.8.2. *Линейным частно-интегральным уравнением Фредгольма в* R_2 *называется уравнение* $\varphi(t, s) = \lambda(K\varphi)(t,s) + f(t,s)$, *где* $(t,s) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$,

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4,$$

$$(K_1\varphi)(t,s) = k_1(t,s)\varphi(t,s)$$

— *оператор умножения на функцию,*

$$(K_2\varphi)(t,s) = \int_{a_1}^{b_1} k_2(t,s,\tau)\varphi(\tau,s)\,d\tau$$

— *частно-интегральный оператор,*

$$(K_3\varphi)(t,s) = \int_{a_2}^{b_2} k_3(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma)\,d\sigma$$

— *частно-интегральный оператор,*

$$(K_4\varphi)(t,s) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} k_4(t,s,\tau,\sigma)\varphi(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma.$$

§9. Частно-интегральные уравнения Вольтерра

Через $D = D_1 \times D_2$ обозначим конечный прямоугольник в R_2, где $D_1 = (a_1, b_1)$, $D_2 = (a_2, b_2)$, $D_{1,2} = D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.

Частно-интегральным оператором Вольтерра в R_2 называются выражения

$$(K_1u)(x) = \int_{a_1}^{x_1} k_1(x; t_1)u(t_1, x_2)\, dt_1. \tag{9.1}$$

$$(K_2u)(x) = \int_{a_2}^{x_2} k_2(x; t_2)u(x_1, t_2)\, dt_2. \tag{9.2}$$

Частно-интегральный оператор Вольтерра является частным случаем частно-интегрального оператора Фредгольма

$$(K_1u)(x) = \int_{a_1}^{b_1} k(x; t_1)u(t_1, x_2)dt_1$$

при

$$k(x; t_1) = \begin{cases} k_1(x; t_1) & t_1 \leq x_1, \\ 0 & t_1 > x_1. \end{cases}$$

Частно-интегральным уравнением Вольтерра второго рода с оператором (9.1) будем называть уравнения вида

$$\varphi(x) = \lambda K_1\varphi(x) + f(x), \quad \varphi(x) = \lambda K_2\varphi(x) + f(x). \tag{9.3}$$

§10. Сведение линейного уравнения с частными производными к частно-интегральному уравнению Вольтерра

Введем обозначения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ — длина мультииндекса, $\alpha_j = 0, 1, 2, \ldots$, $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1\, \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$, где $|\alpha| \leq m \in N$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha(x) D^\alpha u(x) = F(x), \qquad (10.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$, $c_\alpha(x), u(x), F(x) \in C(D)$.

1. Линейное уравнение с частными производными по одной переменной

Уравнение (10.1) при $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0)$, $|\alpha| = \alpha_j \le m$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ примет вид

$$c_0(x)\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_j^m} + c_1(x)\frac{\partial^{m-1} u(x)}{\partial x_j^{m-1}} + \dots + c_{m-1}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c_m(x)u(x) = F(x)$$

или в краткой форме

$$\sum_{0\le\alpha_j\le m} c_{\alpha_j}(x) D_{x_j}^{\alpha_j} u(x) = F(x), \qquad (10.2)$$

с начальными условиями

$$D_{x_j}^{\alpha_j} u(x_0) = C_{\alpha_j}(\bar{x}),$$

где $x_0 = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_j^m}. \qquad (10.3)$$

Обозначим оператор интегрирования и дифференцирования по переменной x_j как $I_{x_j}\, g(x) = \int_0^{x_j} g(\bar{x}, t_j)\, dt_j$ и $D_{x_j}\, g(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}$ соответственно, где $(\bar{x}, t_j) = (x_1, \dots, x_{j-1}, t_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

При каждых фиксированных значениях $\bar{x}$ справедлива следующая формула

$$I_{x_j}^m g(x) = \int_0^{x_j} \frac{(x_j - t_j)^{n-1}}{(n-1)!} g(\bar{x}, t_j)\, dt_j, \qquad (10.4)$$

а так же формула

$$D^m_{x_j} I^m_{x_j} g(x) = g(x), \text{ но } I^m_{x_j} D^m_{x_j} g(x) \neq g(x).$$

Из равенств (10.3) и (10.4) следует

$$\frac{\partial^{m-1} u(x)}{\partial x_j^{m-1}} = I_{x_j} \varphi(x) + C_{m-1}(\bar{x}),$$

$$\frac{\partial^{m-2} u(x)}{\partial x_j^{m-2}} = I^2_{x_j} \varphi(x) + C_{m-1}(\bar{x}) x_j + C_{m-2}(\bar{x}),$$

и так далее

$$\frac{\partial^{\alpha_j} u(x)}{\partial x_j^{\alpha_j}} = I_{x_j}^{m-\alpha_j} \varphi(x) + C_{m-1}(\bar{x}) x_j^{m-\alpha_j-1} + C_{m-2}(\bar{x}) x_j^{m-\alpha_j-2} + \ldots$$

$$\ldots + C_{\alpha_j+1}(\bar{x}) x_j + C_{\alpha_j}(\bar{x}),$$

$$u(x) = I^m_{x_j} \varphi(x) + C_{m-1}(\bar{x}) x_j^{m-1} + C_{m-2}(\bar{x}) x_j^{m-2} + \ldots + C_1(\bar{x}) x_j + C_0(\bar{x}).$$

Тогда уравнение (10.1) можно привести к линейному частно-интегральному уравнению

$$c_0(x)\varphi(x) + c_1(x) I_{x_j} \varphi(x) + \ldots + c_{m-1}(x) I^{m-1}_{x_j} \varphi(x) + c_m(x) I^m_{x_j} \varphi(x) = f(x),$$

где $f(x) = F(x) - \sum\limits_{\alpha_j=0}^{m-1} a_{m-\alpha_j}(x) \left(C_{m-1}(\bar{x}) x_j^{m-\alpha_j-1} + C_{m-2}(\bar{x}) x_j^{m-\alpha_j-2} + \right.$

$\left. \ldots + C_{\alpha_j+1}(\bar{x}) x_j + C_{\alpha_j}(\bar{x}) \right)$ или

$$\sum_{0 \le \alpha_j \le m} c_{\alpha_j}(x) I^{\alpha_j}_{x_j} \varphi(x) = f(x). \tag{10.5}$$

С учетом (10.4) получим уравнение

$$c_0(x)\varphi(x) + c_1(x) \int_0^{x_j} \varphi(\bar{x}, t_j)\, dt_j + c_2(x) \int_0^{x_j} (x_j - t_j) \varphi(\bar{x}, t_j)\, dt_j + \ldots +$$

$$+c_m(x)\int_0^{x_j}\frac{(x_j-t_j)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(\bar{x},t_j)\,dt_j=f(x).$$

или

$$c_0(x)\varphi(x)+\int_0^{x_j}\sum_{1\le\alpha_j\le m}c_{\alpha_j}(x)\frac{(x_j-t_j)^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!}\varphi(\bar{x},t_j)\,dt_j=f(x).$$

В результате получим частно-интегральное уравнение Вольтерра

$$c_0(x)\varphi(x)+\int_0^{x_j}k_j(x,t_j)\varphi(\bar{x},t_j)\,dt_j=f(x),$$

где $k_j(x,t_j)=\sum_{1\le\alpha_j\le m}c_{\alpha_j}(x)\frac{(x_j-t_j)^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!}$.

2. Линейное уравнение с частными производными по двум переменным второго порядка

Рассмотрим уравнение (10.1) при $\alpha=(0,\ldots,0,\alpha_i,0,\ldots,0,\alpha_j,0,\ldots,0)$, $i\neq j$, $|\alpha|=\alpha_i+\alpha_j\le 2$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

$$c_{00}(x)u(x)+c_{10}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+c_{01}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+c_{20}(x)\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2}+c_{02}(x)\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_j^2}+$$

$$+c_{11}(x)\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=F(x)$$

или

$$\sum_{0\le\alpha_i+\alpha_j\le 2}c_{(\alpha_i,\alpha_j)}D^{\alpha_i+\alpha_j}u(x)=F(x). \qquad (10.6)$$

Обозначив

$$\varphi(x)=\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2},$$

получим

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_0^{x_i} \varphi(\bar{x}_i, t_i)\,dt_i + C_1(\bar{x}_i), \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^{x_i} \frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j}\,dt_i + \frac{\partial C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j},$$

$$u(x) = \int_0^{x_i} (x_i - t_i)\varphi(\bar{x}_i, t_i)\,dt_i + C_1(\bar{x}_i)x_i + C_0(\bar{x}_i),$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_0^{x_i} (x_i - t_i)\frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j}\,dt_i + x_i\frac{\partial C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial C_0(\bar{x}_i)}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = \int_0^{x_i} (x_i - t_i)\frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j^2}\,dt_i + x_i\frac{\partial^2 C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 C_0(\bar{x}_i)}{\partial x_j^2},$$

где $(\bar{x}_i, t_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\bar{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ Подставляя полученные выражения в (10.6), имеем

$$c_{00}(x)\int_0^{x_i} (x_i - t_i)\varphi(\bar{x}_i, t_i)\,dt_i + c_{10}(x)\int_0^{x_i} \varphi(\bar{x}_i, t_i)\,dt_i +$$
$$+ c_{01}(x)\int_0^{x_i} (x_i - t_i)\frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j}\,dt_i + c_{11}(x)\int_0^{x_i} \frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j}\,dt_i +$$
$$+ c_{20}(x)\varphi(x) + a_{02}\int_0^{x_i} (x_i - t_i)\frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j^2}\,dt_i = h(x), \quad (10.7)$$

где $h(x) = F(x) - c_{00}(x)[C_1(\bar{x}_i)x_i + C_0(\bar{x}_i)] - c_{10}(x)C_1(\bar{x}_i) - c_{01}(x)[x_i\frac{\partial C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial C_0(\bar{x}_i)}{\partial x_j}] - c_{11}(x)\frac{\partial C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j} - c_{02}(x)[x_i\frac{\partial^2 C_1(\bar{x}_i)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 C_0(\bar{x}_i)}{\partial x_j^2}]$.

Обозначив

$$\psi(x) = \frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j^2},$$

получим

$$\frac{\partial\varphi(\bar{x}_i, t_i)}{\partial x_j} = \int_0^{x_j} \psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_j + A_1(\bar{x}_{ij}, t_i),$$

$$\varphi(\bar{x}_i, t_i) = \int_0^{x_j} (x_j - t_j)\psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_j + A_1(\bar{x}_{ij}, t_i)x_j + A_0(\bar{x}_{ij}, t_i).$$

Подставляя полученные равенства в (10.7), имеем

$$c_{00}(x)\int_0^{x_j}\int_0^{x_i} (x_i - t_i)\psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_i dt_j +$$

$$+c_{10}(x)\int_0^{x_j}\int_0^{x_i} (x_j - t_j)\psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_i dt_j +$$

$$+c_{01}(x)\int_0^{x_j}\int_0^{x_i} (x_i - t_j)\psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_i dt_j + c_{11}(x)\int_0^{x_j}\int_0^{x_i} \psi(\bar{x}_{ij}, t_i, t_j)\, dt_i dt_j +$$

$$+c_{20}(x)\int_0^{x_j} (x_j - t_j)\psi(\bar{x}_j, t_j)\, dt_j + c_{02}(x)\int_0^{x_i} (x_i - t_i)\psi(\bar{x}_i, t_i)\, dt_i = f(x),$$

где $f(x) = h(x) - c_{00}(x)\int_0^{x_i} (x_i - t_i)(A_1(\bar{x}_{ij}, t_i)x_j + A_0(\bar{x}_{ij}, t_i))\, dt_i -$ $c_{10}(x)\int_0^{x_i} (A_1(\bar{x}_{ij}, t_i)x_j + A_0(\bar{x}_{ij}, t_i))\, dt_i - c_{01}(x)\int_0^{x_i} (x_i - t_i)A_0(\bar{x}_{ij}, t_i)\, dt_i -$ $c_{11}(x)\int_0^{x_i} A_0(\bar{x}_{ij}, t_i)\, dt_i - c_{20}(x)(A_1(\bar{x}_j)x_j + A_0(\bar{x}_j))$. В результате получим линейное частно-интегральное уравнение Вольтерра вида

$$\int_0^{x_i} k_i(x, t_i)\psi(\bar{x}_i, t_i)\, dt_i + \int_0^{x_j} k_j(x, t_j)\psi(\bar{x}_j, t_j)\, dt_j +$$

$$+\int_0^{x_j}\int_0^{x_i} k_{ij}(x,t_1,t_2)\psi(\bar{x}_{ij},t_i,t_j)\,dt_i dt_j = f(x), \qquad (10.8)$$

где $k_i(x,t_i) = c_{02}(x)(x_i - t_i)$, $k_j(x,t_j) = c_{20}(x)(x_j - t_j)$, $k_{ij}(x,t_i,t_j) = c_{00}(x)(x_i - t_i) + c_{10}(x)(x_j - t_j) + c_{01}(x)(x_i - t_i) + c_{11}(x)$.

3. Линейное дифференциальное уравнение с частными производными

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x_1,x_2)\frac{\partial^{n-i}u(x_1,x_2)}{\partial x_1^{n-i}} + \sum_{j=0}^{m} b_j(x_1,x_2)\frac{\partial^{m-j}u(x_1,x_2)}{\partial x_2^{m-j}} = H(x_1,x_2), \qquad (10.9)$$

с начальными условиями (10.2).

Обозначив $\varphi(x_1,x_2) = \frac{\partial^n u(x_1,x_2)}{\partial x_1^n}$ и следуя выше приведенному алгоритму можно свести уравнение (10.9) к виду (10.8)

$$a_0(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2) + \int_0^{x_1} k_1(x_1,x_2,t_1)\varphi(t_1,x_2)\,dt_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{m} b_j(x_1,x_2)\frac{\partial^{m-j}u(x_1,x_2)}{\partial x_2^{m-j}} = h(x_1,x_2), \qquad (10.10)$$

где

$$u(x_1,x_2) = \int_0^{x_1}\frac{(x_1-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t_1,x_2)\,dt_1 + \sum_{r=0}^{n-1} C_r(x_2)x_1^r.$$

Тогда при $j = 0, 1, \ldots m$, имеем

$$\frac{\partial^{m-j}u(x_1,x_2)}{\partial x_2^{m-j}} = \int_0^{x_1}\frac{(x_1-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{m-j}\varphi(t_1,x_2)}{\partial x_2^{m-j}}\,dt_1 + \sum_{r=0}^{n-1} x_1^r\frac{\partial^{m-j}C_r(x_2)}{\partial x_2^{m-j}}. \qquad (10.11)$$

Подставляя (10.11) в (10.10), получим

$$a_0(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2) + \int_0^{x_1} k_1(x_1, x_2, t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} b_j(x_1, x_2) \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{m-j}\varphi(t_1, x_2)}{\partial x_2^{m-j}}\, dt_1 = \tilde{h}(x_1, x_2), \quad (10.12)$$

где $\tilde{h}(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) - \sum_{j=0}^{m} b_j(x_1, x_2) \sum_{r=0}^{n-1} x_1^r \frac{\partial^{m-j} C_r(x_2)}{\partial x_2^{m-j}}$.

Обозначив $\psi(t_1, x_2) = \frac{\partial^m \varphi(t_1, x_2)}{\partial x_2^m}$, получим

$$\frac{\partial^{m-1}\varphi(t_1, x_2)}{\partial x_2^{m-1}} = I_{x_2}\psi(t_1, x_2) + A_{m-1}(t_1) = \int_0^{x_2} \psi(t_1, t_2)\, dt_2 + A_{m-1}(t_1),$$

$$\frac{\partial^{m-2}\varphi(t_1, x_2)}{\partial x_2^{m-2}} = I_{x_2}^2\psi(t_1, x_2) + A_{m-1}(t_1)x_2 + A_{m-2}(t_1) =$$

$$= \int_0^{x_2} (t_1 - t_2)\psi(t_1, t_2)\, dt_2 + A_{m-1}(t_1)x_2 + A_{m-2}(t_1),$$

и так далее

$$\frac{\partial^{m-j}\varphi(t_1, x_2)}{\partial x_2^{m-j}} = I_{x_2}^j\psi(t_1, x_2) + A_{m-1}(t_1)x_1^{j-1} + A_{m-2}(t_1)x_2^{j-2} + \ldots$$

$$\ldots + A_{m-j+1}(t_1)x_2 + A_{m-j}(t_1) =$$

$$= \int_0^{x_2} \frac{(t_1 - t_2)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\psi(t_1, t_2)\, dt_2 + A_{m-1}(t_1)x_1^{j-1} + A_{m-2}(t_1)x_2^{j-2} + \ldots$$

$$\ldots + A_{m-j+1}(t_1)x_2 + A_{m-j}(t_1),$$

$$\varphi(t_1, x_2) = I_{x_2}^m\psi(t_1, x_2) + A_{m-1}(t_1)x_2^{m-1} + A_{m-2}(t_1)x_2^{m-2} + \ldots$$

$$+A_1(t_1)x_2 + A_0(t_1) =$$

$$= \int_0^{x_2} \frac{(t_1 - t_2)^{m-1}}{(m-1)!} \psi(t_1, t_2)\, dt_2 + A_{m-1}(t_1) x_2^{m-1} + A_{m-2}(t_1) x_2^{m-2} + \ldots$$

$$+ A_1(t_1) x_2 + A_0(t_1).$$

Подставляем полученные равенства в (10.12)

$$a_0(x_1, x_2) \int_0^{x_2} \frac{(x_1 - t_2)^{m-1}}{(m-1)!} \psi(x_1, t_2)\, dt_2 + a_0(x_1, x_2) \sum_{r=1}^{m} A_{r-1}(x_1) x_2^{r-1} +$$

$$+ \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} k_1(x_1, x_2, t_1) \frac{(t_1 - t_2)^{m-1}}{(m-1)!} \psi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} x_2^{r-1} \int_0^{x_1} k_1(x_1, x_2, t_1) A_{r-1}(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ b_0(x_1, x_2) \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!} \psi(t_1, x_2)\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} b_j(x_1, x_2) \frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(t_1 - t_2)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} \psi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \int_0^{x_1} b_j(x_1, x_2) \frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!} A_{m-r}(t_1) x_1^{j-r}\, dt_1 = \tilde{h}(x_1, x_2)$$

или

$$\int_0^{x_1} K_1(x_1, x_2, t_1) \psi(t_1, x_2)\, dt_1 + \int_0^{x_2} K_2(x_1, x_2, t_2) \psi(x_1, t_2)\, dt_2 +$$

$$+ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K_{12}(x_1, x_2, t_1, t_2) \psi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 = f(x_1, x_2),$$

где

$$K_1(x_1, x_2, t_1) = b_0(x_1, x_2)\,\frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$K_2(x_1, x_2, t_2) = a_0(x_1, x_2)\,\frac{(x_1 - t_2)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$K_{12}(x_1, x_2, t_1, t_2) = k_1(x_1, x_2, t_1)\,\frac{(t_1 - t_2)^{m-1}}{(m-1)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j(x_1, x_2)\,\frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{(t_1 - t_2)^{m-j-1}}{(m-j-1)!},$$

$$f(x_1, x_2) = \tilde{h}(x_1, x_2) - a_0(x_1, x_2)\sum_{r=1}^{m} A_{r-1}(x_1)x_2^{r-1} -$$

$$- \sum_{r=1}^{m} x_2^{r-1}\int_0^{x_1} k_1(x_1, x_2, t_1)A_{r-1}(t_1)\,dt_1 -$$

$$- \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} b_j(x_1, x_2)\int_0^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{n-1}}{(n-1)!}A_{m-r}(t_1)x_1^{j-r}\,dt_1.$$

В результате получим линейное частно-интегральное уравнение Вольтерра.

Заметим, что приведенный алгоритм сведения применим и к линейным дифференциальным уравнениям, включающим неизвестную функцию с любым конечным числом переменных. При этом функции входящие в него должны обладать хорошими свойствами гладкости до необходимого порядка.

ГЛАВА III
ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

§11. Анизотропные пространства Лебега

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ и $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i\}$ — конечный параллелепипед в R_n с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Определение 1.11.1. *Анизотропное пространство Лебега* $L_{\mathbf{p}}$ *определено как класс функций, для которых конечна норма*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1}|f(x)|^{p_1}\,dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots dx_{n-1}\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}. \tag{11.1}$$

Известно, что это пространство банахово.

Заметим, что при равных компонентах мультииндекса $p_1 = \dots = p_n = p$ анизотропная норма Лебега $L_{\mathbf{p}} = L_p$.

Пример 1.11.1. Вычислить норму функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \log_3 x_2 \sqrt{x_3}$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{(2,1,3)}(D)$, где $D = (1, 2) \times (1, 3) \times (2, 3)$.

$$\|f\|_{L_{(2,1,3)}(D)} = \left(\int_2^3\left(\int_1^3\left(\int_1^2 |x_1 \log_3 x_2 \sqrt{x_3}|^2\,dx_1\right)^{\frac{1}{2}}dx_2\right)^{\frac{3}{1}}dx_3\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\int_2^3\left(\int_1^3\left(\log_3^2 x_2 \cdot x_3 \int_1^2 x_1^2\,dx_1\right)^{\frac{1}{2}}dx_2\right)^{\frac{3}{1}}dx_3\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\int_2^3 \left(\int_1^3 \left(\log_3^2 x_2 \cdot x_3 \cdot \frac{x_1^3}{3}\Big|_1^2\right)^{\frac12} dx_2\right)^{\frac31} dx_3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(\int_2^3 \left(\int_1^3 \left(\log_3^2 x_2 \cdot x_3\right)^{\frac12} dx_2\right)^{\frac31} dx_3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(\int_2^3 \left(\int_1^3 \log_3 x_2 \cdot \sqrt{x_3}\, dx_2\right)^{\frac31} dx_3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(\int_2^3 \sqrt{x_3}\left(\int_1^3 \log_3 x_2\, dx_2\right)^{\frac31} dx_3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(\int_2^3 \sqrt{x_3}\left(x_2 \log_3 x_2 - \frac{x_2}{\ln 3}\right)\Big|_1^3 \,dx_3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(\left(3-\frac{2}{\ln 3}\right)^3 \int_2^3 x_3^{\frac32}\, dx_3\right)^{\frac13} = \sqrt{\frac73}\left(\left(3-\frac{2}{\ln 3}\right)^3 \frac25 x_3^{\frac52}\Big|_2^3\right)^{\frac13} =$$

$$= \sqrt{\frac73}\left(3-\frac{2}{\ln 3}\right)\sqrt[3]{\frac25}\sqrt[3]{9\sqrt{3}-4\sqrt{2}} \approx 2{,}8536.$$

§12. Существование и единственность частно-интегрального уравнения Фредгольма

Далее будем использовать оценку нормы функции $(K_1\varphi)(x_1, x_2)$, полученную в работе [1]

$$\|K_1 u\|_{L_{(p_1,p_2)}(D)} \le \|k_1\|_{L_{(q_1;\ p_1,\ p_2 q_2)}(D_1\times D)} \|u\|_{L_{(p_1;p_2^2)}(D_1\times D_2)} \qquad (12.1)$$

Применяется классический метод последовательных приближений, в том же виде, в каком он используется для определения решений интегрального уравнения Фредгольма. То есть, его решение будем искать в виде степенного ряда

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x)\lambda^{m}. \qquad (12.2)$$

Подставляем (12.2) в (8.1) получим равенство степенных рядов по λ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x),$$

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\varphi^{(0)}(t_1, x_2)\, dt_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(m)}(x) = \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\varphi^{(m-1)}(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Выражая $\varphi^{(m)}(x)$ через $f(x)$, имеем

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1 = \int_{D_1} k_1^{(1)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1,$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_1)\left(\int_{D_1} k_1^{(1)}(\tau_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1\right) d\tau_1 =$$

$$= \int_{D_1}\left(\int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_1) k_1^{(1)}(\tau_1, x_2; t_1)\, d\tau_1\right) f(t_1, x_2)\, dt_1 =$$

$$= \int_{D_1} k_1^{(2)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi^{(m)}(x) = \int_{D_1} k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$\int_{D_1} k_1^{(m)}(x;t) f(t_1, x_2)\, dt_1 = (K_1^m f)(x),$$

имеем

$$\varphi^{(m)}(x) = (K_1^m f)(x) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, предполагаемое решение (12.2) примет вид следующего ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x). \tag{12.3}$$

Обозначим

$$A_1 = \sup_{1\le i\le m-1} \left\{ (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^{2i} q_2}}, (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2 q_2^m}} \right\}, \quad B_1 = \sup_m (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^m q_2}},$$

$$C_1 = \max\{A_1, B_1\},$$

$$S_1 = \max \left\{ \|k_1\|_{L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}, \|k_1\|_{L_\infty(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))} \right\},$$

тогда справедлива

Теорема 1.12.1. *Пусть ядро k_1 частного интеграла K_1,*

$$Q_1 = \sup \left\{ \|k_1\|_{L_{p_2^m q_2}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty,$$

$$\|f\|_{\Lambda_1} = \sup \left\{ \|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty$$

и пусть $|\lambda|\, C_1 S_1 < 1$. Тогда в $\mathbf{L_p}$ существует предел $\Phi = \lim_{r\to\infty} \Phi_r$ функциональной последовательности

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i K_1^i f(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_{(p_1,\infty)}(D_{1,2})$ в $\mathbf{L_p}(D_{1,2})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})} \le \varliminf_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})}.$$

Решение уравнения Фредгольма с частным интегралом K_1 *существует в виде операторного ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f \quad \textit{причем} \quad \|\varphi\|_{L^p} \le \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1 - |\lambda| C_1 S_1}.$$

Единственность следует из теоремы.

Теорема 1.12.2. *Если* $|\lambda| < C_1^{-1} S_1^{-1}$*, то уравнение* (8.1) *при этом значении* λ *в* $L_{(p_1,\infty)}(D)$ *имеет единственное решение, и это решение определяется формулой* (12.3).

□

Пусть $\psi(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$ — любое решение уравнения (8.1) и пусть $\omega(x_1, x_2)$ разность решений $\psi(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$, т.е. $\omega(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)$. Докажем, что $\omega(x_1, x_2) \equiv 0$ почти всюду при $|\lambda| C_1 S_1 < 1$. Подставляем функцию $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \omega(x_1, x_2)$ в (8.1) получим

$$\varphi(x_1, x_2) + \omega(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)(\varphi(t_1, x_2) + \omega(t_1, x_2))\, dt_1 + f(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1 + f(x_1, x_2) + \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Следовательно $\omega(x_1, x_2)$ — решение однородного уравнения

$$\omega(x_1, x_2) = \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Так как $\omega(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, следовательно $\|\omega(x_1, x_2)\|_{L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))} = N_1 < \infty$. Тогда

$$\|\omega(x_1, x_2)\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} =$$

$$= \left\| \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1 \right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le$$

$$\le |\lambda| \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\| \omega \right\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} =$$

$$= |\lambda| \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \times$$

$$\times \left\| \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1 \right\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le$$

$$\le |\lambda|^2 \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \times$$

$$\times \left\| \omega \right\|_{L_{p_2^3}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le \ldots$$

Продолжая данный процесс с использованием неравенства (12.1), получим

$$\left\| \omega(x_1, x_2) \right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le$$

$$\le |\lambda|^m \prod_{i=1}^{m} \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\| \omega \right\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

Из неравенств

$$\left\| k_1 \right\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \le C_1 \left\| k_1 \right\|_{L_\infty(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))},$$

$$\left\| \omega \right\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le C_1 \left\| \omega \right\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

следует

$$\left\| \omega(x_1, x_2) \right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \le |\lambda|^m C_1^m \left\| k_1 \right\|^m_{L_\infty(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \times$$

$$\times \; C_1 \left\| \omega \right\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))} = (|\lambda| C_1 S_1)^m C_1 N_1.$$

Так как $|\lambda| C_1 S_1 < 1$, то при $m \to \infty$ имеем $(|\lambda| C_1 S_1)^m \to 0$. Отсюда следует, что $\omega(x_1, x_2) \equiv 0$ почти всюду на D.

■

Рассмотрим уравнение (8.1) с вырожденным ядром

$$k_1(x_1, x_2; t_1) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1, x_2) a_i(t_1). \qquad (12.4)$$

Из неравенства (12.1) при $m \to \infty$ следует

$$k_1(x_1, x_2; t_1) \in L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})),$$

тогда

$$k_{1i}(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1)), \quad a_i(t_1) \in L_{q_1}(D_1).$$

Уравнение (8.1) запишем в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1, x_2) \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1 + f(x_1, x_2). \qquad (12.5)$$

Обозначим

$$u_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1, \qquad (12.6)$$

получим

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1, x_2) u_i(x_2) + f(x_1, x_2). \qquad (12.7)$$

Подставляя (12.7) в (12.6), получим

$$u_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1) \left(\lambda \sum_{j=1}^{N} \tilde{k}_{1j}(t_1, x_2) u_j(x_2) + f(t_1, x_2) \right) dt_1, \qquad (12.8)$$

или

$$u_i(x_2) - \lambda \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(x_2) u_j(x_2) = f_i(x_2), \qquad (12.9)$$

где

$$\mu_{ij}(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)\, dt_1, \quad f_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Так как $k_{1i}(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, $a_i(t_1) \in L_{q_1}(D_1)$, то

$$\mu_{ij}(x_2) \in L_\infty(D_2).$$

Действительно,

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} = ess\sup_{x_2} |\mu_{ij}(x_2)| = ess\sup_{x_2} \left|\int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)\, dt_1\right| \leq$$

$$\leq ess\sup_{x_2} \int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)||\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)|\, dt_1 .$$

Воспользуемся неравенством Гельдера с показателями p_1 и q_1, получим

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} \leq ess\sup_{x_2} \left[\left(\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} \right].$$

Выражение $\left(\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{q_1}}$ не зависит от x_2, получим

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} \leq \left(\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{q_1}} ess\sup_{x_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \|a_i\|_{L_{q_1}(D_1)} \|\tilde{k}_{1j}\|_{L_\infty(D_2; L_{p1}(D_1))}.$$

(12.9) — система линейных алгебраических уравнений, определителем которой является функция

$$D_\lambda(x_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\mu_{11}(x_2) & \dots & -\lambda\mu_{1N}(x_2) \\ . & \ddots & . \\ -\lambda\mu_{N1}(x_2) & \dots & 1-\lambda\mu_{NN}(x_2) \end{vmatrix} = det(I-\lambda M),$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x_2) & \dots & \mu_{1N}(x_2) \\ . & \ddots & . \\ \mu_{N1}(x_2) & \dots & \mu_{NN}(x_2) \end{pmatrix}.$$

$D_\lambda(x_2)$ — полином степени N относительно переменной λ с коэффициентами $\mu_{ij}(x_2) \in L_\infty(D_2;\ L_{p_1}(D_1))$, тогда $D_\lambda(x_2) \in L_\infty(D_2;\ L_{p_1}(D_1)) \in L_\infty(D_2;\ L_{p_1}(D_1))$, т.е. является существенно ограниченной функцией по переменной x_2.

Если $D_\lambda(x_2) \neq 0$, то уравнение (12.5) однозначно разрешимо при любом $f(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$.

Вернемся к решению, представленное рядом (12.3). Это решение выразим через итерированные ядер частного интеграла K_1^m. Это приведет к решению в интегральной записи

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{D_1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1)\lambda^m \right] f(t_1, x_2)\, dt_1 .$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой резольвенту ядра k_1:

$$r_1(x; t_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m\ k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1) \in L_\infty\left(D_2; L_{(p_1 q_1)}(D_{1,1})\right),$$

ряд которой равномерно сходится при выполнении условия $|\lambda| < C_1^{-1} S_1^{-1} \leq A_1^{-1} Q_1^{-1}$, то есть $\varphi(x)$ дает решение уравнения (8.1) в пространстве $L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})$. Следовательно решение уравнения (8.1) можно записать в операторной форме

$$(I+\lambda R_1)f(x) = \varphi(x) = f(x)+\lambda\int_{D_1} r_1(x;t_1;\lambda)f(t_1,x_2)\,dt_1, \quad (12.10)$$

в которой $I+\lambda R_1$ представляет собой оператор типа частного интеграла, ядром которого является резольвента ядра частного интеграла K_1.

Уравнение (8.1) запишем в операторной форме

$$(I-\lambda K_1)\,\varphi(x) = f(x)\,. \quad (12.11)$$

Тогда операторная форма (12.10) решения (12.11) определено применением оператора $I+\lambda R_1$ к правой части операторного уравнения (12.11):

$$\varphi(x) = (I+\lambda R_1)\,(I-K_1)\,\varphi(x) = (I+\lambda R_1)\,f(x).$$

В связи с этим положим

$$I+\lambda R_1 = (I-\lambda K_1)^{-1}.$$

Оператор $I+\lambda R_1$ совпадает с оператором Ф и является обратным к оператору $I-\lambda K_1$.

§13. Частно-интегральное уравнение Вольтерра в анизотропных пространствах Лебега

Пусть

$$(K_1u)(x) = \int_{a_1}^{x_1} k_1(x;t_1)u(t_1,x_2)dt_1. \quad (13.1)$$

Рассмотрим уравнение вида

$$\varphi(x) = \lambda K_1\varphi(x)+f(x). \quad (13.2)$$

Рассмотрим класс функций $u(x_1, x_2)$ из $L_{p_{\alpha_i}}(D_{\alpha_i})$ со значениями в пространстве $L_{p_{\bar{\alpha}_i}}(D_{\bar{\alpha}_i})$ будем обозначать $L_{p_{\alpha_i}}(D_{\alpha_i}; L_{p_{\bar{\alpha}_i}}(D_{\bar{\alpha}_i}))$. Исследуем частно-интегральное уравнение Вольтерра (9.3) в рамках анизотропного пространства Лебега. При этом потребуется оценка функции нормы $K_1 u$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $p_i \geq 1$.

$$\|\overset{m}{K_1} u\|_{L_{\mathbf{p}}(D^{(2)}_{1,2})} \leq \|\overset{(m)}{k_1}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|u\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}, \tag{13.3}$$

где $1/p_i + 1/q_i = 1$, $i = 1, 2$.

Для нахождения решения уравнения (13.2) применим классический метод последовательных приближений. За начальное приближение решения принимается правая часть частно-интегрального уравнения Волтерра: $\varphi_0(x_1, x_2) = f(x)$. Далее все последующие приближения решения (13.2) находятся путем подстановки функции $\varphi_{n-1}(x)$ в правую часть (13.2), т.е. в виде

$$\varphi_n(x) = \lambda K_1 \varphi_{n-1}(x) + f(x) = \lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x; t_1)\varphi_{n-1}(t_1, x_2)dt_1 + f(x). \tag{13.4}$$

Методом математической индукции можно показать справедливость равенства

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda K_1 f(x) + \lambda^2 K_1^{(2)} f(x) + \lambda^3 K_1^{(3)} f(x) + \ldots + \lambda^n K_1^{(n)} f(x),$$

которое запишем в виде конечной суммы

$$\varphi_m(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m K_1^{(m)} f(x) \quad (= \Phi_m f(x)),$$

где

$$(K_1^{(m)} u)(x) = \int_{a_1}^{x_1} k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) u(t_1, x_2) dt_1 \tag{13.5}$$

и $k_1^{(m)}$ - *m-итерированное ядро* определяется формулой

$$k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) = \int_{t_1}^{x_1} k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1) k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1}) d\tau_{m-1}, \quad (13.6)$$

в которой итерированные ядра ЧИ-оператора Вольтерра имеют вид

$$\begin{cases} k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) = 0, & t_1 > x_1 \\ k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) = \int_{t_1}^{x_1} k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1) k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1}) d\tau_{m-1}, & t_1 \leq x_1. \end{cases} \quad (13.7)$$

Введем обозначение $\Phi_\infty = \Phi$. Нетрудно показать, что

$$\Phi f = \sum_m^{\infty} \lambda^m K_1^{(m)} f(x). \quad (13.8)$$

Для дальнейших исследований нам необходим аналог неравенства (12.1) для нормы m-итерированного ядра $k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1)$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{p_2 q_2}(D_2)$ функций $u(x, t)$ со значением в пространстве Лебега $L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1})$ этот класс функций будем обозначать $L_{p_2 q_2}\left(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1})\right)$.

Теорема 1.13.1. *В пространстве* $L_{p_2 q_2}\left(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1})\right)$ *норма итерированного ядра* $k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1)$ *оператора* K^m_1 *удовлетворяет неравенству*

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq$$

$$\leq \|k_1(x_1, x_2; \tau_1)\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}. \quad (13.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Левую часть неравенства (1.13.1) представим в виде нормы от интеграла от произведения итерированного и неитерированного ядер

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} =$$

$$= \left\| \int_{t_1}^{x_1} k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)\; k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})\, d\tau_{m-1} \right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}.$$

По переменной τ_{m-1} воспользуемся неравенством Гельдера с показателями p_1 и q_1. Имеем

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \le \left\| \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} =$$

$$= \left(\int_{t_2}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{q_1}{q_1}} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right)^{\frac{p_2q_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2q_2}}.$$

Функция $\int_{t_1}^{x_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1}\, d\tau_{m-1}$ не зависит от переменной t_1, поэтому

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \le$$

$$\le \left(\int_{t_2}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int_{t_1}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{x_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1}\, d\tau_{m-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right)^{\frac{p_2q_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2q_2}}.$$

Функция $\left(\int_{t_1}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{x_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}\,d\tau_{m-1}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}dt_1\right)^{\frac{p_1}{q_1}}$ не зависит от x_1, поэтому

$$\left\|k_1^{(m)}\right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\le$$

$$\le\left(\int_{t_2}^{x_2}\left(\int_{t_1}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{x_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}\,d\tau_{m-1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}dx_1\right)^{\frac{p_2q_2}{p_1}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{t_1}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{x_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}\,d\tau_{m-1}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}dt_1\right)^{\frac{p_2q_2}{q_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2q_2}}.$$

Еще раз воспользуемся неравенством Гельдера по переменной x_2 с показателями p_2 и q_2, получим неравенство

$$\left\|k_1^{(m)}\right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\le$$

$$\le\left(\int_{t_2}^{x_2}\left(\int_{t_1}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{x_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}\,d\tau_{m-1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}dx_1\right)^{\frac{p_2q_2^2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2q_2^2}}\times$$

$$\times\left(\int_{t_2}^{x_2}\left(\int_{t_1}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{x_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}\,d\tau_{m-1}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}dx_1\right)^{\frac{p_2^2q_2}{q_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2^2q_2}}=$$

$$=\left\|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})\right\|_{L_{p_2q_2^2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\times$$

$$\times\left\|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)\right\|_{L_{p_2^2q_2}(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}.$$

То есть норма m-итерированного ядра $k^{(m)}$ оценена через (m-1)-итерированное ядро. Рассуждая аналогично, получим оценку нормы (m-1)-итерированного ядра $k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})$ в пространстве $L_{p_2q_2^2}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)$:

$$\left\|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})\right\|_{L_{p_2q_2^2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\le$$

$$\leq \left\| k_1^{(m-2)}(x_1, x_2; \tau_{m-2}) \right\|_{L_{p_2 q_2^3}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \times$$
$$\times \left\| k_1(\tau_{m-2}, x_2; \tau_{m-1}) \right\|_{L_{p_2^2 q_2^2}(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Последнее действие в процессе доказательства теоремы— это получить оценку нормы дважды итерированного ядра $k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2)$ в пространстве $L_{p_2 q_2^{m-1}}\left(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)$. Здесь применяем описанный выше подход, получим необходимое неравенство:

$$\left\| k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2) \right\|_{L_{p_2 q_2^{m-1}}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leq$$
$$\leq \left\| k_1(x_1, x_2; \tau_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\| k_1(\tau_1, x_2; \tau_2) \right\|_{L_{p_2^2 q_2^{m-1}}(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}.$$

В итоге получили теорему о норме m-кратно итерированного ядра оператора K_1^m.

Доказательство закончено.

При бесконечных итерациях $m \to \infty$, получим, что некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций в неравенстве (1.13.1) стремятся к ∞ : $p_2 q_2^m \to \infty$, $p_2^2 q_2^{m-1} \to \infty$, тогда справедливы неравенства

$$\left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leq A_1 \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))},$$
$$\left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))} \leq A_1 \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))},$$

где константа A_1 зависит от области интегрирования и вычисляется по формуле:

$$A_1 = \sup_{1 \leq i \leq m-1} \left\{ (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^2 q_2^i}}, (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2 q_2^m}} \right\}.$$

Заметим, что пространства

$$L_\infty\left(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right) \quad \text{и} \quad L_\infty\left(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)$$

строго говоря, различны. Пусть

$$S_1 = \max\left\{ \|k_1\|_{L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}, \|k_1\|_{L_\infty(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))} \right\},$$

тогда

$$\|k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1)\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \le$$

$$\le \|k_1(x_1, x_2; \tau_1)\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))} \le A_1^m S_1^m.$$

Введем следующую функцию $V_m(x_2) = \|k_1^{(m)}(x_2)\|_{L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})}$. Ряд $V(x_2; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m V_{m+1}(x_2)$ сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию из $L_\infty(D_2)$, так как функция $V_{m+1}(x_2)$ существенно ограничена при $|\lambda| A_1 S_1 < 1$. Этот ряд назовем регулярным, если существует функция

$$r_1(x; t_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t) \in L_\infty\left(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right),$$

которая называется резольвентой ядра $k_1(x; t_1)$ частного интеграла K_1 или резольвентой частно-интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_{D_1} k_1(x; t_1)\, \varphi(t_1, x_2)\, dt_1 + f(x).$$

Дальнейшие рассуждения связаны с применением неравенства (12.1) и неравенства

$$\|K_1^m f\|_{L_p} \le \prod_{i=1}^{m} \|k_1\|_{L_{(q_1,p_1,p_2^i q_2)}(D_{1,1,2})} \cdot \|f\|_{L_{(p_1,p_2^{m+1})}(D_{1,2})}. \qquad (13.10)$$

Обозначим

$$B_1 = \sup_m \left\{ (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^m q_2}} \right\}_{m=1}^{\infty}, \quad C_1 = \max\{A_1, B_1\},$$

тогда справедлива

Теорема 1.13.2. *Пусть ядро* k_1 *частного интеграла* (13.1) *и правая часть неравенства* (13.10) *удовлетворяют условиям:*

$$Q_1 = \sup_{m=1}^{\infty} \|k_1\|_{L_{p_2^m q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} < \infty,$$

$$\|f\|_{\Lambda_1} = \sup_{m=1}^{\infty} \|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))} < \infty,$$

и пусть $|\lambda|\, C_1\, S_1 < 1$. *Тогда в* $L_{\mathbf{p}}$ *существует предел* $\Phi = \lim_{r\to\infty} \Phi_r$ *функциональной последовательности*

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0} \lambda^i K_1^i f(x)\,.$$

Оператор Φ *действует ограниченно из* $L_{(p_1,\infty)}(D_{1,2})$ *в* $L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})} \le \underline{\lim}_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})}.$$

Решение уравнения Вольтерра (13.2) *с частным интегралом* (13.1) *существует в виде операторного ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}}} \le \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1-|\lambda| C_1\, S_1}.$$

Это решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство существования решения уравнения (13.2) аналогично доказательству существования решения частно-интегрального уравнения Фредгольма,

$$\varphi = \lim_{r\to\infty} \varphi^{(r)} = \lim_{r\to\infty} \sum_{m=0}^{r} \lambda^m K_1^m f = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f$$

является решением уравнения (13.2).

Докажем единственность решения.

Пусть функция $\psi(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$ — любое решение уравнения (13.2) и пусть $\omega(x_1, x_2)$ разность решений $\psi(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$, т.е. $\omega(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)$. Докажем, что $\omega(x_1, x_2) \equiv 0$ почти всюду при $|\lambda| C_1 S_1 < 1$. Подставляем функцию $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \omega(x_1, x_2)$ в (13.2) получим

$$\varphi(x_1, x_2) + \omega(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)(\varphi(t_1, x_2) + \omega(t_1, x_2))\, dt_1 + f(x_1, x_2) =$$

$$= \lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1 + f(x_1, x_2) + \lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Следовательно $\omega(x_1, x_2)$ — решение однородного уравнения

$$\omega(x_1, x_2) = \lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Так как $\omega(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, следовательно $\|\omega(x_1, x_2)\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))} = N_1 < \infty$. Тогда

$$\|\omega(x_1, x_2)\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} =$$

$$= \left\|\lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1\right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

$$\leq |\lambda| \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \|\omega\|_{L^2_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} =$$

$$= |\lambda| \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\|\lambda \int_{a_1}^{x_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\omega(t_1, x_2)\, dt_1\right\|_{L^2_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

$$\leq |\lambda|^2 \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \|k_1\|_{L^2_{p_2 q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \|\omega\|_{L^3_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

$$\leq \ldots$$

Продолжая данный процесс с использованием неравенства (13.10), получим

$$\left\|\omega(x_1, x_2)\right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leq$$

$$\leq |\lambda|^m \prod_{i=1}^{m} \left\|k_1\right\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \left\|\omega\right\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

Из неравенств

$$\left\|k_1\right\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leq C_1\left\|k_1\right\|_{L_\infty(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))},$$

$$\left\|\omega\right\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leq C_1\left\|\omega\right\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

следует

$$\left\|\omega(x_1, x_2)\right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leq$$

$$\leq |\lambda|^m C_1^m \left\|k_1\right\|^m_{L_\infty(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} C_1\left\|\omega\right\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leq$$

$$\leq (|\lambda| C_1 S_1)^m C_1 N_1.$$

Так как $|\lambda| C_1 S_1 < 1$, то при $m \to \infty$ имеем $(|\lambda| C_1 S_1)^m \to 0$. Отсюда следует, что $\omega(x_1, x_2) \equiv 0$ почти всюду на D.

Доказательство закончено.

Приведем два существенный замечания к приведенным теоремам:

Замечание 1.13.1. *Теорема о единственности перестает быть верной в случае, если отказаться от условия его суммируемости даже в случае обыкновенных уравнений Вольтерра.*

Замечание 1.13.2. *Более того, метод последовательных приближений используется для решения частно-интегральных уравнений Вольтерра в случае конечного интервала действительной оси. В случае бесконечного интервала используются интегральные преобразования.*

ГЛАВА IV
ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§14. Линейные частно-интегральные уравнения Фредгольма

Линейные частно-интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода имеют вид

$$u(x) = \lambda\,(Ku)(x) + f(x) = \lambda \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}u\right)(x) + f(x). \qquad (14.1)$$

В евклидовом пространстве R_2 для непрерывных функций и ядер и при отсутствии в (14.1) оператора K_0 исследование линейных частно-интегральных уравнений Фредгольма выполнено профессором А.С. Калитвиным, его учениками и последователями.

В [17] доказаны существование и единственность решения частно-интегрального уравнения (14.1) в анизотропных пространствах Лебега в случае $K = K_{\alpha}$ в виде операторного ряда Неймана. В случае оператора $K = \sum_{\alpha} K_{\alpha}$, включающем операторы K_0 (умножение на функцию) и $K_{1,\dots,n}$ (интегральный оператор), справедлива

Теорема 1.14.1. *Пусть* $k_{\alpha} \in L_{(1;\infty)}(D_{\alpha} \times D)$, $f \in L_{\infty}(D)$, *и пусть* $|\lambda| < 1/M$, *где* $M = \sum_{\alpha} \|k_{\alpha}\|_{L_{(1;\infty)}(D_{\alpha}\times D)}$, *тогда в* $L_{\infty}(D)$ *существует предел* $\Phi = \lim_{r\to\infty} \Phi_r$ *функциональной последовательности* $\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i K^i f(x)$. *Оператор* Φ *действует ограниченно из* $L_{\infty}(D)$ *в* $L_{\infty}(D)$ *и удовлетворяет неравенству* $\|\Phi\|_{L\infty(D)} \le \lim_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L\infty(D)}$. *Тогда существует и единственное решение уравнения* (14.1) *в виде ряда Неймана* $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f$.

Доказательство

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i \geq 1$. В работе [15] показана ограниченность норм итераций функций $K^j_\alpha u$ в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, причем выполняется неравенство

$$\left\|K^j_\alpha u\right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^{j} \left\|k_\alpha\right\|_{L_{(q_\alpha;p_\alpha,p^j_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha\times D)} \left\|u\right\|_{L_{(p_\alpha;p^{j+1}_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha,\bar{\alpha}})},$$

из которого следует, что для принадлежности функции $K^j u_\alpha$ пространству $L_{\mathbf{p}}(D)$ достаточно принадлежности функций $k_\alpha(x, t_\alpha)$ и $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ пространствам $L_{(q_\alpha;p_\alpha,p^j_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$ и $L_{(p_\alpha;p^{j+1}_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha,\bar{\alpha}})$ соответственно, где $p_\alpha = (p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_m})$, $p^j_{\bar{\alpha}} = (p^j_{\bar{\alpha}_1}, \ldots, p^j_{\bar{\alpha}_{n-m}})$. При бесконечных итерациях $j \to \infty$ и $p_i \geq 1$ получим $u \in L_{(p_\alpha;\infty)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$, $k_\alpha \in L_{(q_\alpha;p_\alpha,\infty)}(D_\alpha \times D)$, т.к. мультииндекс α пробегает все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, то для ограниченности оператора K_α и их итераций достаточно $u \in L_{(\infty,\ldots,\infty)}(D) = L_\infty(D)$ и $k_\alpha \in L_{(1;\infty)}(D_\alpha \times D)$. Из (14.1) следует, что $K_\alpha u \in L_\infty(D)$, тогда из неравенства Минковского следует

$$\left\|Ku\right\|_{L_\infty(D)} = \left\|\sum_\alpha K_\alpha u\right\|_{L_\infty(D)} \leq \sum_\alpha \left\|K_\alpha u\right\|_{L_\infty(D)} \leq$$

$$\leq \sum_\alpha \left\|k_\alpha\right\|_{L_{(1;\infty)}(D_\alpha\times D)} \left\|u\right\|_{L_\infty(D)} \leq \left\|u\right\|_{L_\infty(D)} \sum_\alpha \left\|k_\alpha\right\|_{L_{(1;\infty)}(D_\alpha\times D)}.$$

Если $|\lambda| \sum_\alpha \left\|k_\alpha\right\|_{L_{(1;\infty)}(D_\alpha\times D)} < 1$, то в силу теоремы Банаха оператор $A = \lambda K + f$ является сжимающим и уравнение (14.1) имеет единственное решение, которое можно представить в виде операторного ряда Неймана $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f$.

Из оценок норм операторов K_α вытекает, что функция u должна принадлежать одновременно разным лебеговым классам: $u \in L_{(p_1^2,p_2^2,\ldots,p_n^2)} \cap \ldots \cap L_{(\mathbf{p}_\alpha,\mathbf{p}^2_{\bar{\alpha}})} \cap \ldots \cap L_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$. Введем мультииндекс $\mathbf{r}$, который может принимать одно из значений $(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$, $\dots, (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}^2_{\bar\alpha})$, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Обозначим через $\mathrm{L}_{\mathbf{r}}(D)$ класс функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathbf{r}} = \max_{\mathbf{r}} \|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})}.$$

Теорема 1.14.2. *Пусть функция $u \in L_{\mathbf{r}}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})$ и для всех мультииндексов α ядра операторов K_α имеют конечные нормы. Тогда линейный оператор с частными интегралами K непрерывен как оператор из $\mathrm{L}_{\mathbf{r}}(D)$ в $L_{\mathbf{p}}(D)$, причем*

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le A\|u\|_{\mathbf{r}},$$

где $A = \sum_\alpha C_\alpha$.

Доказательство

Для оператора $K = \sum_\alpha K_\alpha$, воспользовавшись неравенством Минковского для суммы функций, получим $\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \sum_\alpha \|K_\alpha u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$.
Обозначив $C_\alpha = \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\, \mathbf{p}_\alpha,\, \mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D)}$, воспользуемся оценкой каждого слагаемого, полученного выше, имеем неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \sum_\alpha \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\mathbf{p}_{\bar\alpha},\mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D)} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha,\mathbf{p}^2_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})} \le$$

$$\le \sum_\alpha C_\alpha \|u\|_{\mathbf{r}} = A\|u\|_{\mathbf{r}}.$$

Из теоремы следует справедливость оценки $\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le B \max_\alpha \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^2_\alpha;\mathbf{p}^2_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})}$, то есть класс функций $\mathrm{L}_{\mathbf{r}}(D)$ можно сузить до множества $\bigcap_\alpha L_{(\mathbf{p}^2_\alpha;\mathbf{p}^2_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})$. Более того, если при любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется неравенство $p_i^2 \ge p_j$, то $\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le C\|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D)}$, где B и C — некоторые постоянные, зависящие от норм ядер k_α.

§15. Линейные частно-интегральные уравнения Вольтерра

Частно-интегральным оператором Вольтерра в R_n называется выражение

$$(V_\alpha u)(x) = \int\limits_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \qquad (15.1)$$

где $\Omega_\alpha = (a_1, x_1) \times (a_1, x_2) \times \ldots \times (a_n, x_n)$.

Частно-интегральный оператор Вольтерра является частным случаем частно-интегрального оператора Фредгольма

$$(V_\alpha u)x \equiv (K_\alpha u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} \bar{k}(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha$$

при

$$\bar{k}(x; t_\alpha) = \begin{cases} k_\alpha(x; t_\alpha) & t_\alpha \in \Omega_\alpha, \\ 0 & t_\alpha \notin \Omega_\alpha. \end{cases}$$

Для функций $V_\alpha u$ справедлива оценка (12.1). В случае линейного частно-интегрального оператора Вольтерра $(V u)(x) = \sum_\alpha (V_\alpha u)(x)$, справедлива теорема 1.14.2 и следствия из нее.

В случае ограниченности ядра k_α в $L_{(q_\alpha; p_\alpha, p^j_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$ решение такого уравнения можно получить методом последовательных приближений в виде операторного ряда Неймана. Полученный ряд, в отличие от частно-интегрального уравнения Фредгольма, сходится для любых значений λ, а суммируемое решение уравнения (9.3) существует и единственное.

Линейным частно-интегральным уравнением Вольтерра второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) = \lambda V \varphi(x) + f(x), \qquad (15.2)$$

где $(V u)(x) = \sum\limits_\alpha (V_\alpha u)(x)$.

Рассмотрим уравнение Вольтерра 2-го рода с двумя частно-интегральными операторами:

$$\varphi(x) = \lambda\,(V\varphi)(x) + f(x) = \lambda\,((V_\alpha + V_\beta)\varphi)(x) + f(x) \tag{15.3}$$

с многомерными частно-интегральными операторами вида

$$(V_\alpha u)(x) = \int_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha,$$

$$(V_\beta u)(x) = \int_{\Omega_\beta} k_\beta(x; t_\beta)\, u(x_{\bar\beta}, t_\beta)\, dt_\beta.$$

Используя неравенство Минковского и неравенство (12.1), получим

$$\|(V_\alpha + V_\beta)u\|_{L_p} \le \|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha; p_\alpha, p_{\bar\alpha} q_{\bar\alpha})}} \|u\|_{L_{(p_\alpha; p^2_{\bar\alpha})}} + \|k_\beta\|_{L_{(q_\beta; p_\beta, p_{\bar\beta} q_{\bar\beta})}} \|u\|_{L_{(p_\beta; p^2_{\bar\beta})}}.$$

Оценка нормы функции $V^i u$ в пространстве $L_p(\Omega)$ сводится к неравенствам

$$\|V_\alpha u\|_{L_{(p_\alpha; p^i_{\bar\alpha})}} \le \|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha; p_\alpha, p^i_{\bar\alpha} q_{\bar\alpha})}} \|u\|_{L_{(p_\alpha; p^{i+1}_{\bar\alpha})}},$$

$$\|V_\beta u\|_{L_{(p_\alpha; p^i_{\bar\alpha})}} \le \|k_\beta\|_{L_{(q_{\bar\alpha}; p_\alpha q_\alpha, p^i_{\bar\alpha})}} \|u\|_{L_{(p_{\bar\alpha}; p^2_\alpha)}},$$

$$\|V_\alpha u\|_{L_{(p_\beta; p^i_{\bar\beta})}} \le \|k_\alpha\|_{L_{(q_{\bar\beta}; p_\beta q_\beta, p^i_{\bar\beta})}} \|u\|_{L_{(p_{\bar\beta}; p^2_\beta)}},$$

$$\|V_\beta u\|_{L_{(p_\beta; p^i_{\bar\beta})}} \le \|k_\beta\|_{L_{(q_\beta; p_\beta, p^i_{\bar\beta} q_{\bar\beta})}} \|u\|_{L_{(p_\beta; p^{i+1}_{\bar\beta})}},$$

из которых следует, что норма итерации r-го порядка оператора V не превосходит суммы 2^n слагаемых, каждое из которых содержит произведение r норм ядер k_α или k_β, т.е. $\|(V_\alpha + V_\beta)^r u\|_{L_{p(D)}} \le \sum_i \prod_\alpha \|k_\alpha\|_{L_\delta} \prod_\varepsilon \|k_\beta\|_{L_\varepsilon} \|u\|_{L_\gamma}$, где $\delta \in \{(q_\alpha; p_\alpha, p^i_{\bar\alpha} q_{\bar\alpha}), (q_{\bar\beta}, p_\beta q_\beta; p^i_{\bar\beta})\}_j$, $\varepsilon \in_2 \{(q_{\bar\alpha}, p_\alpha q_\alpha, p^i_{\bar\alpha}), (q_\beta, p_\beta, p^i_{\bar\beta} q_{\bar\beta})\}$, $\gamma \in \{(p_\alpha; p_{\bar\alpha}), (p_\beta; p_{\bar\beta}), ((p_{\bar\alpha}; p_\alpha)), (p_{\bar\beta}; p_\beta)\}$, $r, j, i = 1, 2, \ldots, n$.

Решение уравнения (15.3) получим методом последовательных приближений в виде степенного ряда Неймана $\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \left((V_\alpha + V_\beta)^r f\right)(x)$. При $r \to \infty$ получим $k_\alpha(x; t_\alpha) \in L_{(q_\alpha;p_\alpha,\infty)} \cap L_{(q_{\bar\beta},p_\beta q_\beta;\infty)}$, $k_\beta(x; t_\beta) \in L_{(q_\beta;\infty)} \cap L_{(q_{\bar\alpha},p_\alpha q_\alpha,\infty)}$, $f(x) \in L_{(p_\alpha,\infty)} \cap L_{(p_\beta;\infty)} \cup L_{(p_{\bar\alpha},\infty)} \cup L_{(p_{\bar\beta},\infty)}$. Введем обозначения

$$A = \max_\alpha \Big\{ \|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha;p_\alpha,p^i_{\bar\alpha} q_{\bar\alpha})}},\ \|k_\beta\|_{L_{(q_\beta;p_{\bar\beta} q_{\bar\beta},p^i_{\bar\beta})}},$$

$$\|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha;p_{\bar\alpha} q_{\bar\alpha},p^i_{\bar\alpha})}},\ \|k_\beta\|_{L_{(q_\beta;p_\beta,p^i_{\bar\beta} q_{\bar\beta})}} \Big\}_{i=1}^{\infty},$$

$$\|f\|_\Lambda = \max_\alpha \Big\{ \|f\|_{L_{(p_\alpha;p^{i+1}_{\bar\alpha})}},\ \|f\|_{L_{(p_\beta;p^{i+1}_{\bar\beta})}} \Big\}_{i=1}^{\infty},$$

$$S = \max_\alpha \left\{ \|k_\alpha\|_{L_{(q_\alpha;\infty,\infty)}},\ \|k_\beta\|_{L_{(q_\beta;\infty,\infty)}} \right\},$$

$$C = \max_\alpha \Big\{ \prod_{s,r=\overline{1,n}} (\mu(D_s))^{\frac{1}{p^i_s}} (\mu(D_r))^{\frac{1}{p^i_r q_r}} \Big\}.$$

Из ранее полученных неравенств следует

Теорема 1.15.1. Пусть $A < \infty$, $\|f\|_{L_\Lambda} < \infty$, и пусть $|\lambda| < \frac{1}{2CS}$. Тогда в $L_{\mathbf{p}}$ существует предел $\Phi = \lim_{r\to\infty} \Phi_r$ функциональной последовательности $\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0} \lambda^i (V_\alpha + V_\beta)^i f(x)$. Оператор Φ действует ограниченно из $L_{(p_{\alpha\cap\beta},\infty)}(D_{\alpha\cap\beta} \times D_{\overline{\alpha\cap\beta}})$ в $L_{\mathbf{p}}(D)$ и удовлетворяет неравенству $\|\Phi\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \lim_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$. Тогда существует и единственное решение уравнения (15.3) в виде ряда Неймана $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (V_\alpha + V_\beta)^m f$.

Как и в случае линейного частно-интегрального уравнения Фредгольма, при $|\lambda| < 1/M$ для уравнения (15.2) справедлив аналог теоремы 1.15.1.

§16. Линейные частно-интегральные уравнения Фредгольма в пространствах непрерывных функций

Рассуждения этой части диссертации справедливы для любой размерности евклидова пространства. Учитывая возникающие при этом технические трудности, мы подробно остановимся на случае $n = 3$. Общий случай представлен в конце этого пункта.

Линейный частно-интегральный (ЛЧИ) оператор берем в следующей форме

$$K = \sum_{m=1} \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(m)}. \qquad (16.1)$$

Напомним, что верхний индекс (m) в обозначении частного интеграла соответствует размерности области интегрирования частного интеграла. От общего вида ЛЧИ выражение (16.1) отличается отсутствием оператора умножения на функцию, что не принципиально, а лишь облегчает дальнейшие выкладки. Частные интегралы $K_{\alpha}^{(m)}$ в (16.1) определены так же, как в общем ЛЧИ операторе (**??**):

$$(K_{\alpha}^{(m)}u)(x) = \int_{D_{\alpha}^{(m)}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha})\, u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha})\, dt_{\alpha}. \qquad (16.2)$$

Классическим фредгольмовским уравнением, как известно, называется интегральное уравнение Фредгольма второго рода при условии принадлежности его ядра $k = k(x, t)$ и правой части уравнения f пространству Лебега L_2. Оператор K называется фредгольмовым, если $k(x; t) \in L_2$.

Следуя этому определению, будем называть уравнение в частных интегралах $(I - K)\varphi(x) = f(x)$ *фредгольмовым* в анизотропных классах функций Лебега, если выполняются следующие условия

$$\|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{q}}(D\times D_\alpha)} < \infty, \quad \forall \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3), \quad 1 \le q_i \le \infty;$$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} < \infty, \quad \forall \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad 1 \le p_i \le \infty.$$

Этим условиям удовлетворяют существенно ограниченные функции. Упрощая условия, будем считать функции $k_\alpha \in C(D; L^1(D_\alpha))$, а $f(x)$ непрерывной.

В нашем изложении частно-интегральный оператор с помощью фиксации «лишних переменных» будет сведен к интегральному, который заведомо является фредгольмовым.

Тогда фредгольмовость частно-интегрального уравнения будет следствием фредгольмовости интегрального уравнения.

Как и в классическом случае, принятое определение фредгольмовости уравнения равносильно существованию и единственности его решения.

Рассмотрим ЛЧИ уравнение Фредгольма второго рода при $\lambda = 1$

$$(I - K)\,\varphi = f, \tag{16.3}$$

где $K = K_1 + K_2 + K_3 + K_{1,2} + K_{1,3} + K_{2,3} + K_{1,2,3}$, I — единичный оператор.

Введем обозначения

$$K_{1^*,2} = K_{1,2} + K_1K_2, \quad K_{1^*,3} = K_{1,3} + K_1K_3,$$
$$K_{2^*,3} = K_{2,3} + K_2K_3, \quad K_{1^*,2,3} = K_{1,2,3} - K_1K_2K_3, \tag{16.4}$$

$$(R_1\varphi)(x) = \int_{D_1} r_1(x, t_1)\varphi(t_1, x_2, x_3)\, dt_1,$$

$$(R_2\varphi)(x) = \int_{D_2} r_2(x, t_2)\varphi(x_1, t_2, x_3)\, dt_2,$$

$$(R_3\varphi)(x) = \int_{D_3} r_3(x, t_3)\varphi(x_1, x_2, t_3)dt_3, \quad (16.5)$$

$$K^{**}_{1,2} = K^{*}_{1,2} + R_1K^{*}_{1,2} + R_2K^{*}_{1,2} + R_2R_1K^{*}_{1,2},$$

$$K^{**}_{1,3} = K^{*}_{1,3} + R_1K^{*}_{1,3} + R_3K^{*}_{1,3} + R_3R_1K^{*}_{1,3},$$

$$K^{**}_{2,3} = K^{*}_{2,3} + R_2K^{*}_{2,3} + R_3K^{*}_{2,3} + R_3R_2K^{*}_{2,3}, \quad (16.6)$$

$$K^{**}_{1,2,3} = K^{*}_{1,2,3}+R_1K^{*}_{2,3}+R_1K^{*}_{1,2,3}+R_2K^{*}_{1,3}+R_2K^{*}_{1,2,3}+R_3K^{*}_{1,2}+R_3K^{*}_{1,2,3}+$$

$$+R_3R_1K^{*}_{1,2}+R_3R_1K^{*}_{2,3}+R_3R_1K^{*}_{1,2,3}+R_3R_2K^{*}_{1,2}+R_3R_2K^{*}_{1,3}+R_3R_2K^{*}_{1,2,3}+$$

$$+R_2R_1K^{*}_{1,3} + R_2R_1K^{*}_{2,3} + R_2R_1K^{*}_{1,2,3} + R_3R_2R_1K^{*}_{1,2} + R_3R_2R_1K^{*}_{1,3}+$$

$$+R_3R_2R_1K^{*}_{2,3} + R_3R_2R_1K^{*}_{1,2,3},$$

$$u_1(x_1) = \int_{D_1} k_1(x, t_1)u_1(t_1)\, dt_1 + f(x_1), \quad (x_2, x_3) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

$$u_2(x_2) = \int_{D_2} k_2(x, t_2)u_2(t_2)\, dt_2 + f(x_2), \quad (x_1, x_3) \in [a_1, b_1] \times [a_3, b_3],$$

$$u_3(x_3) = \int_{D_3} k_3(x, t_3)u_3(t_3)\, dt_3 + f(x_3), \quad (x_1, x_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

$$u_{1,2}(x_1, x_2) = \iint_{D_{1,2}} w^{**}_{1,2}(x, t_1, t_2)u_{1,2}(t_1, t_2)\, dt_1dt_2+f(x_1, x_2), \ x_3 \in [a_3, b_3],$$

$$u_{1,3}(x_1, x_3) = \iint_{D_{1,3}} w^{**}_{1,3}(x, t_1, t_3)u_{1,3}(t_1, t_3)\, dt_1dt_3+f(x_1, x_3), \ x_2 \in [a_2, b_2],$$

$$u_{2,3}(x_2, x_3) = \iint\limits_{D_{2,3}} w^{**}_{2,3}(x, t_2, t_3)u_{2,3}(t_2, t_3)\, dt_2dt_3+f(x_2, x_3),\ x_1 \in [a_1, b_1], \tag{16.7}$$

где $w^{**}_{1,2}(x, t_1, t_2)$, $w^{**}_{1,3}(x, t_1, t_3)$, $w^{**}_{2,3}(x, t_2, t_3)$ — ядра операторов (16.6) соответственно.

Теорема 1.16.1. *Уравнение (16.3) с частными интегралами* K_α, *ядра которых* $k_\alpha \in C(D; L^1(D_\alpha))$ *фредгольмово в* $C(D)$ *тогда и только тогда, когда при фиксированных значениях аргументов справа интегральные уравнения* (16.7) *обратимы в пространствах непрерывных функций* $C(D_1)$, $C(D_2)$, $C(D_3)$, $C(D_1 \times D_2)$, $C(D_1 \times D_3)$, $C(D_2 \times D_3)$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть в уравнении (16.3) $k_\alpha \in C(D; L^1(D_\alpha))$, тогда

$$I-K = (I-K_1)(I-K_2)(I-K_3)-(K^*_{1,2}+K^*_{1,3}+K^*_{2,3})-K^*_{1,2,3}, \tag{16.8}$$

где операторы $K^*_{1,2}$, $K^*_{1,3}$, $K^*_{2,3}$, $K_1{}^*{}_{,2,3}$ определены равенствами (16.4). Поэтому в случае существования обратных операторов $(I - K_1)^{-1}$, $(I - K_2)^{-1}$ и $(I - K_3)^{-1}$ уравнение (16.3) эквивалентно уравнению

$$(I-K_1)(I-K_2)(I-K_3)x = (K_1{}^*{}_{,2}+K_1{}^*{}_{,3}+K_2{}^*{}_{,3}+K^*_{1,2,3})x+f. \tag{16.9}$$

Оператор $(I - K_\alpha)^{-1}$ существует и представим в виде $(I - K_\alpha)^{-1} = I+R_\alpha$. [2] Таким образом, в R₃ операторы $(I-K_1)^{-1}$, $(I-K_2)^{-1}$, $(I-K_3)^{-1}$ существуют и могут быть представлены в виде

$$(I - K_1)^{-1} = I + R_1,\quad (I - K_2)^{-1} = I + R_2,\quad (I - K_3)^{-1} = I + R_3,$$

$G_1 = (I - K_3)^{-1}(I - K_2)^{-1}(I - K_1)^{-1}$, где R_i — ЧИ-операторы с

[2] В книге работах профессора Калитвина А.С. для случая R_2 показано, что операторы $(I - K_\alpha)^{-1}$ существуют и представимы в виде $(I - K_\alpha)^{-1} = I + R_\alpha$, где R_α — вполне непрерывный оператор.

резольвентными ядрами $r_i(x, t_i) \in C(D; L^1(D_i))$ $(i = 1, 2, 3)$ определены равенствами (16.5). Тогда

$$\varphi = (I + R_3)(I + R_2)(I + R_1)(K^*_{1,2} + K_1{}^*{}_{,3} + K_2{}^*{}_{,3} + K^*_{1,2,3})\varphi + G_1 f.$$

Отсюда

$$\varphi = (I + R_1 + R_2 + R_3 + R_3R_1 + R_3R_2 + R_2R_1 + R_3R_2R_1) \times$$

$$\times(K_1{}^*{}_{,2} + K_1{}^*{}_{,3} + K_2{}^*{}_{,3} + K^*_{1,2,3})\varphi + G_1 f$$

или

$$\varphi = (K_1{}^{**}{}_{,2} + K_1{}^{**}{}_{,3} + K_2{}^{**}{}_{,3} + K^{**}_{1,2,3})\varphi + G_1 f, \qquad (16.10)$$

где операторы $K^{**}_{1,2}$, $K^{**}_{1,3}$, $K^{**}_{2,3}$, $K_1{}^{**}{}_{,2,3}$ определены равенствами (16.6).

В случае существования обратных операторов $(I - K^{**}_{2,3})^{-1}$, $(I - K^{**}_{1,3})^{-1}$, $(I - K^{**}_{1,2})^{-1}$, уравнение (16.10) эквивалентно уравнению

$$(I - K^{**}_{1,2})(I - K^{**}_{1,3})(I - K^{**}_{2,3})\varphi =$$
$$(K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3} + K^{**}_{1,2}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} - K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,2,3})\varphi + G_1 f. \qquad (16.11)$$

Пусть $(I - K^{**}_{2,3})^{-1} = I + R_{2,3}$, $(I - K^{**}_{1,3})^{-1} = I + R_{1,3}$, $(I - K^{**}_{1,2})^{-1} = I + R_{1,2}$, $G_2 = (I - K^{**}_{2,3})^{-1}(I - K^{**}_{1,3})^{-1}(I - K^{**}_{1,2})^{-1}$, тогда $\varphi = (I + R_{2,3})(I+R_{1,3})(I+ R_{1,2})(K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3} + K^{**}_{1,2}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} - K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,2,3})\varphi + G_2G_1 f$. Раскрывая скобки, получим

$$\varphi = H_{1,2,3}\varphi + F, \qquad (16.12)$$

где

$$\varphi = H_{1,2,3}\varphi + F = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} h(t_1, t_2, t_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3)x(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + F,$$

$$H_{1,2,3} = (I + R_{2,3})(I + R_{1,3})(I + R_{1,2})\times$$
$$\times(K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3} + K^{**}_{1,2}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} - K^{**}_{1,2}K^{**}_{1,3}K^{**}_{2,3} + K^{**}_{1,2,3}),$$
$$F = G_2G_1f.$$

Оператор $H_{1,2,3}$ — 3-х мерный интегральный оператор, а уравнение (16.12) — интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вполне непрерывным оператором $H_{1,2,3}$, к которому можно применять результаты теории интегральных уравнений.

Существование операторов $(I - K_1)^{-1}$, $(I - K_2)^{-1}$, $(I - K_3)^{-1}$, $(I - K^{**}_{2,3})^{-1}$, $(I - K^{**}_{1,3})^{-1}$, и $(I - K^{**}_{1,2})^{-1}$ связано с разрешимостью интегральных уравнений (16.7), ядра которых $w^{**}_{1,2}(x, t_1, t_2)$, $w^{**}_{1,3}(x, t_1, t_3)$, $w^{**}_{2,3}(x, t_2, t_3)$ принадлежат пространствам $C(D; L^1(D_{1,2}))$, $C(D; L^1(D_{1,3}))$, $C(D; L^1(D_{2,3}))$ соответственно и выражаются равенствами

$$w^{**}_{1,2}(x, t_1, t_2) = k_{1,2}(x, t_1, t_2) + k_1(x, t_1)k_2(t_1, x_2, x_3, t_2)+$$
$$+\int_{D_1} r_1(x, \tilde{t}_1)k_{1,2}(\tilde{t}_1, x_2, x_3, t_1, t_2)\,d\tilde{t}_1+$$
$$+\int_{D_1} r_1(x, \tilde{t}_1)k_1(\tilde{t}_1, x_2, x_3, t_1)k_2(t_1, x_2, x_3, t_2)\,d\tilde{t}_1+$$
$$+\int_{D_2} r_2(x, \tilde{t}_2)k_{1,2}(x_1, \tilde{t}_2, x_3, t_1, t_2)\,d\tilde{t}_2+$$
$$+\int_{D_2} r_2(x, \tilde{t}_2)k_1(x_1, \tilde{t}_2, x_3, t_1)k_2(t_1, x_2, x_3, t_2)\,d\tilde{t}_2+$$
$$+\iint_{D_1\times D_2} r_2(x, \tilde{t}_2)r_1(x_1, \tilde{t}_2, x_3, \tilde{t}_1)k_{12}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, x_3, t_1, t_2)\,d\tilde{t}_1d\tilde{t}_2+$$

$$+\iint\limits_{D_1\times D_2} r_2(x,\tilde t_2)r_1(x_1,\tilde t_2,x_3,\tilde t_1)k_1(\tilde t_1,\tilde t_2,x_3,t_1)k_2(\tilde t_1,\tilde t_2,x_3,t_2)\,d\tilde t_1 d\tilde t_2,$$

$$w^{**}_{1,3}(x,t_1,t_3) = k_{1,3}(x,t_1,t_3) + k_1(x,t_1)k_3(t_1,x_2,x_3,t_3)+$$

$$+\int\limits_{D_1} r_1(x,\tilde t_1)k_{1,3}(\tilde t_1,x_2,x_3,t_1,t_3)\,d\tilde t_1+$$

$$+\int\limits_{D_1} r_1(x,\tilde t_1)k_1(\tilde t_1,x_2,x_3,t_1)k_3(t_1,x_2,x_3,t_3)\,d\tilde t_1+$$

$$+\int\limits_{D_3} r_3(x,\tilde t_3)k_{1,3}(x_1,x_2,\tilde t_3,t_1,t_2)\,d\tilde t_3+$$

$$+\int\limits_{D_3} r_3(x,\tilde t_3)k_1(x_1,x_2,\tilde t_3,t_1)k_3(t_1,x_2,\tilde t_3,t_3)\,d\tilde t_3+$$

$$+\iint\limits_{D_1\times D_3} r_3(x,\tilde t_3)r_1(x_1,x_2,\tilde t_3,\tilde t_1)k_{1,3}(\tilde t_1,x_2,\tilde t_3,t_1,t_3)\,d\tilde t_1 d\tilde t_3+$$

$$+\iint\limits_{D_1\times D_3} r_3(x,\tilde t_3)r_1(x_1,x_2,\tilde t_3,\tilde t_1)k_1(\tilde t_1,x_2,\tilde t_3,t_1)k_2(t_1,x_2,\tilde t_3,t_2)\,d\tilde t_1 d\tilde t_3,$$

$$w^{**}_{2,3}(x,t_2,t_3) = k_{23}(x,t_2,t_3) + k_2(x,t_2)k_3(x_1,t_2,x_3,t_3)+$$

$$+\int\limits_{D_2} r_2(x,\tilde t_2)k_{2,3}(x_1,\tilde t_2,x_3,t_2,t_3)\,d\tilde t_2+$$

$$+\int\limits_{D_2} r_2(x,\tilde t_2)k_2(x_1,\tilde t_2,x_3,t_2)k_3(x_1,t_2,x_3,t_3)\,d\tilde t_2+$$

$$+\int\limits_{D_3} r_3(x,\tilde t_3)k_{2,3}(x_1,x_2,\tilde t_3,t_2,t_3)\,d\tilde t_3+$$

$$+\int\limits_{D_3} r_3(x,\tilde t_3)k_2(x_1,x_2,\tilde t_3,t_2)k_3(x_1,t_2,\tilde t_3,t_3)\,d\tilde t_3+$$

$$+\iint\limits_{D_2\times D_3} r_3(x,\tilde t_3)r_2(x_1,x_2,\tilde t_3,\tilde t_2)k_{2,3}(x_1,\tilde t_2,\tilde t_3,t_2,t_3)\,d\tilde t_2 d\tilde t_3+$$

$$+\iint\limits_{D_2\times D_3} r_3(x_3,\tilde t_3)r_2(x_1,x_2,\tilde t_3,\tilde t_2)k_2(x_1,\tilde t_2,\tilde t_3,t_2)k_3(x_1,t_2,\tilde t_3,t_3)\,d\tilde t_2 d\tilde t_3.$$

Пусть при некотором $(\bar x_1, \bar x_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ уравнение

$$u_3(x_3) = \int\limits_{D_3} k_3(\bar x_1, \bar x_2, x_3, t_3)u_3(t_3)\,dt_3 + f(x_3) \qquad (16.13)$$

необратимо. Интегральный оператор

$$\bar K_3(x_1, x_2)u_3(x_3) = \int\limits_{D_3} k_3(\bar x_1, \bar x_2, x_3, t_3)u_3(t_3)\,dt_3$$

в силу полной непрерывности имеет собственную функцию $\bar u_3(x_3)$.

Запишем оператор $I - K$ в виде

$$I - K = (I - K_1)(I - K_2)(I - K_3) - (K_1K_2 + K_{1,2} + K_1K_3 + K_{1,3})-$$

$$- (K_2K_3 + K_{2,3}K_{2,3}) - (K_1K_2K_3 + K_{1,2,3}). \quad (16.14)$$

Интегральный оператор с ядром из $C(D;\ L^1(D))$ $K_1K_2K_3 + K_{1,2,3}$ не влияет на фредгольмовость оператора $I - K$. Операторы во вторых и третьих скобках правой части равенства (16.14) с учетом теоремы Фубини могут быть записаны следующим образом:

$$(K_1K_2 + K_{1,2} + K_1K_3 + K_{1,3})u(x) =$$

$$= \iint\limits_{D_{1,2}} b(x, t_1, t_2)u(t_1, t_2, x_3)\,dt_1\,dt_2 + \iint\limits_{D_{1,3}} b_1(x, t_1, t_3)u(t_1, x_2, t_3)\,dt_1\,dt_3,$$

$$(K_2K_3 + K_{2,3})u(x) = \iint\limits_{D_{2,3}} c(x, t_2, t_3)u(t_2, x_2, t_3)\,dt_2\,dt_3,$$

где $b(x,t_1,t_2)$, $b_1(x,t_1,t_3)$ и $c(x,t_2,t_3)$ — некоторые функции из $C(D;\ L^1(D_{1,2}))$, $C(D;\ L^1(D_{1,3}))$ и $C(D;\ L^1(D_{2,3}))$ соответственно.

Выберем натуральное n_0 настолько большим, чтобы $a_i+1/n \le b_i$ $(i=1,2)$ при $n \ge n_0$ и положим $D_{in}=[a_i, a_i+1/n]$. Пусть

$$u_{in}(x_i) = \begin{cases} 1-(a_i+1/n)^{-1}x_i, & \text{если } t_i \in D_i, \\ 0, & \text{если } x_i \notin D_i. \end{cases}$$

Последовательность функций $u_{1n}(x_1)u_{2n}(x_2)\bar{u}_3(x_3)$ $(n=n_0, n_0+1, \dots)$, очевидно, нормирована и некомпактна в $C(D)$, причем в силу (16.14) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $(I-K)u_{1n}(x_1)u_{2n}(x_2)\bar{u}_3(x_3) \to 0$ в $C(D)$ при $n\to\infty$. По теореме Вольфа, оператор $I-K$ не является фредгольмовым в $C(D)$.

Аналогично можно показать, что если при некотором фиксированном $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \in [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ необратимо первое уравнение (16.7) или при некотором $(\bar{x}_1, \bar{x}_3) \in [a_1,b_1]\times[a_3,b_3]$ необратимо второе уравнение (16.7), то уравнение (16.3) не является фредгольмовым в $C(D)$.

Таким образом, из необратимости хотя бы одного из первых трех уравнений (16.9) хотя бы при одном значении параметра вытекает отсутствие фредгольмовости у уравнения (16.3) в $C(D)$.

Поэтому обратимость данных уравнений при всех значениях параметров является необходимым условием фредгольмовости уравнения (16.3) и влечет обратимость операторов $I-K_i$ $(i=1,2,3)$.

Предположим, что операторы $I-K_i$ $(i=1,2,3)$ обратимы в $C(D)$. В этом случае, как показано выше, уравнение (16.3) сводится к эквивалентному уравнению (16.9) с частными двумерными интегралами и ядрами из $C(L^1(D_{1,2}))$, $C(L^1(D_{1,3}))$, $C(L^1(D_{2,3}))$ и

$C(L^1(D))$. Так же, как из необратимости уравнения (16.13) вытекает не фредгольмовость уравнения (16.3), доказывается, что из необратимости хотя бы одного из последних трех уравнений (16.7) хотя бы при одном значении параметра следует не фредгольмовость уравнения (16.9), следовательно, и уравнения (16.3).

Доказательство окончено.

Приведенные рассуждения показывают, что если ядра интегрального уравнения (16.3) принадлежат $C(L^1(D))$, то обратимость интегральных уравнений семейств (16.7) эквивалентна обратимости в $C(D)$ следующих интегральных уравнений с частными интегралами:

$$(I - K_\alpha)\varphi = f \ (\alpha = 1, 2, 3), \ (I - K_\beta^{**})\varphi = f, \ (\beta = \{1, 2; 1, 3; 2, 3\}. \tag{16.15}$$

Поэтому справедлива

Теорема 1.16.2. *Линейное интегральное уравнение (16.3) с частными интегралами и ядрами* $k_\alpha \in C(D; L^1(D_\alpha))$, $(\alpha = \{1; 2; 3; 1, 2; 1, 3; 2, 3\})$ *фредгольмово в* $C(D)$ *тогда и только тогда, когда в* $C(D)$ *обратимы интегральные уравнения (16.15).*

Общая схема получения критериев фредгольмовости линейных уравнений с многомерными частными интегралами

Следующая схема получения критериев фредгольмовости в пространстве непрерывных функций линейных уравнений с многомерными частными интегралами и интегрально ограниченными и непрерывными в целом ядрами обобщает приведенные в разделе 3 рассуждения на случай линейных уравнений второго рода с частными интегралами и с неизвестными функциями, зависящими от

n переменных:

1. Рассматриваются линейные интегральные уравнения второго рода с одномерными частными интегралами, входящими в исходное уравнение. Если хотя бы одно из этих уравнений необратимо, то исходное уравнение не является фредгольмовым. Если все рассматриваемые уравнения с одномерными частными интегралами обратимы, то исходное интегральное уравнение сводится к эквивалентному интегральному уравнению с частными интегралами, в котором отсутствуют одномерные частные интегралы. Это уравнение обозначим как U_1.

2. Рассматриваются уравнения вида $(I - A)\varphi = f$, где I — единичный оператор, а оператор A есть алгебраическая сумма двумерных операторов с частными интегралами и с одинаковыми первыми индексами нумерации: $12, \cdots, 1n; 23, \cdots, 2n; \cdots$. Если хотя бы одно из этих уравнений необратимо, то первоначальное уравнение не фредгольмово. Если все уравнения обратимы, то интегральное уравнение U_1 сводится к эквивалентному интегральному уравнению с частными интегралами, в котором отсутствуют одномерные и двумерные частные интегралы. Это уравнение обозначим через U_2.

3. Описанным способом производится переход к эквивалентному интегральному уравнению с частными интегралами, в котором отсутствуют одномерные, двумерные и трехмерные частные интегралы. Это уравнение обозначим как U_3.

Данные процесс продолжается до тех пор, пока не получится интегральное уравнение второго рода с интегрированием неизвестной функции либо по всем переменным, либо по переменным, число которых меньше n. Интегральный оператор этого уравнения имеет ядро из $C(L^1(D))$. В первом случае этот оператор является вполне непрерывным, а само уравнение фредгольмово. Во втором случае соответствующий этому уравнению оператор является частично интегральным и фредгольмовость этого уравнения равносильна его обратимости.

Приведенная схема носит скорее теоретический характер, так как в преобразованиях применяются обратные операторы. Однако в случае ядер отдельных классов данная схема может быть реализована практически.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иноземцев, А.И. Уравнения в частных интегралах в анизотропных пространствах Лебега. Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" , КФУ. — Казань, 2021, 102 с.

[2] Иноземцев, А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами / А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №5 (176). — Вып. 34. — С. 17 – 26.

[3] Иноземцев, А.И. Ранжированное неравенство Гельдера в анизотропных классах Лебега / А.И. Иноземцев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, №1, Январь – Март, – Воронеж: Издательской дом ВГУ. — 2020. — С. 61 – 66.

[4] Калитвин, А.С. Оператор-функции с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №25(196). — Вып. 37. — С. 19 – 29.

[5] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научнотехнический вестник Поволжья. №5 2018 г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 17 — 21.

[6] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости двух классов линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научно-технический вестник Поволжья. №5 2018г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 22 — 24.

[7] Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

[8] Калитвин, А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

[9] Калитвин, А.С. Операторы и уравнения с частными интегралами и их приложения [Текст]: дисс. ... д. ф.–м. н. 01.01.02. / А.С. Калитвин. — Липецк, 2003. — 267 с.

[10] Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.

[11] Калитвин, А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. C – теория [Текст] / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

[12] Самко, С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[13] Kalitvin, A.S. About integral equations with multidimensional partial integrals / A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev, V.A. Kalitvin

// Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 249. — № 6. — P. 954 – 966.

[14] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two-dimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 888 – 892.

[15] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 893 – 899.

[16] Lyakhov, L.N. About Fredgholm equations for partial integral in R_2 / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev, N.I. Trusova // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 251. — № 6. — P. 839 – 849.

[17] Lyakhov, L.N. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2021. — Vol. 255. — № 6. — P. 715 – 725.

[18] Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations [Text] / J.M. Appell, A.S. Kalit-vin, P.P. Zabrejko. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

Учебное издание

Иноземцев Алексей Иванович

МНОГОМЕРНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА
В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Учебное пособие

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной системе
высшего образования
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44
Тел. 8 (499) 977-40-64