

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА**

Ш.Г. Хусаинов

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Часть II

Электромагнетизм и волны

Учебное пособие

Москва
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
2022

УДК 537.8+534(075)

ББК 22.33я73

X98

Рецензенты:

Тимеркаев Б.А., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ» (Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева - КАИ)

Никитин О.Р., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиотехники и радиосистемы ФГБОУ ВО «ВлГУ» (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых)

X98 **Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. II : Электромагнетизм и волны : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов ; Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева. – Москва : РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2022. – 240 с. – Текст электронный.

ISBN 978-5-9675-1940-6

Учебное пособие написано в соответствии с государственными образовательными стандартами для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. В нем в краткой и доступной форме изложен теоретический материал лекций по второй части курса общей физики. Приведенные в пособии материалы будут полезны для самостоятельного написания обучающимися конспектов лекций, на практических занятиях, при выполнении индивидуальных домашних заданий и при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие адресовано студентам РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева инженерно-технических направлений подготовки с углубленным изучением дисциплины «Физика»: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» и 35.03.06 «Агроинженерия» для получения теоретических и практических навыков и углубления знаний по физике.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией Института механики и энергетики имени В.П. Горячкина РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол №3 от 1 апреля 2022 г.

Khusainov, Sh. G. Lectures on physics. Part II : Electromagnetism and waves : textbook / Sh. G. Khusainov ; Russian state agrarian University – Moscow state Agricultural Academy named after K. A. Timiryazev. – Moscow : RSAU-MTAA named after K. A. Timiryazev, 2022. – 240 p. – Text: electronic.

The textbook is written in accordance with state educational standards for engineering and technical specialties of higher educational institutions. It presents in a concise and accessible form the theoretical material of lectures on the second part of the general physics course. The materials provided in the manual will be useful for students to write lecture notes on their own, in practical classes, when doing individual homework and preparing for tests and exams.

The textbook is addressed to students of the RSAU-MTAA named after K.A. Timiryazev, engineering training areas with in-depth study of discipline of «Physics»: 13.03.01 «Thermal Engineering»; 13.03.02 «Power engineering and electrical engineering»; 15.03.02 «Technological machines and equipment» and 35.03.06 «Agroengineering» to gain theoretical and practical skills and deepen my knowledge in physics.

УДК 537.8+534(075)

ББК 22.336я73

© Хусаинов Ш.Г., 2022

© ФГБОУ ВО РГАУ–МСХА имени

К.А. Тимирязева, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Часть 1. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....	7
Лекция 1. Электростатика.....	7
1.1. Электрический заряд. Закон сохранения заряда.....	7
1.2. Закон Кулона.....	8
1.3. Электростатическое поле и его напряженность. Принцип суперпозиции электростатических полей.....	10
1.4. Работа по перемещению точечного заряда в электростатическом поле. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.....	15
1.5. Потенциал. Разность потенциалов.....	16
1.6. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.....	19
1.7. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей.....	22
Примеры решения задач.....	27
Задачи.....	30
Лекция 2. Диэлектрики и проводники в электростатическом поле. Конденсаторы	32
2.1. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков.....	32
2.2. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике.....	33
2.3. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике.....	36
2.4. Проводники во внешнем электрическом поле. Емкость уединенного проводника.....	37
2.5. Конденсаторы.....	40
2.6. Энергия электростатического поля.....	43
Примеры решения задач.....	46
Задачи.....	50
Лекция 3. Постоянный электрический ток.....	52
3.1. Электрический ток и его основные характеристики.....	52
3.2. Электродвижущая сила.....	53
3.3. Закон Ома. Сопротивление проводников	56
3.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.....	58
3.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	60
3.6. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.....	61
Примеры решения задач.....	64
Задачи.....	68

Л е к ц и я 4. Магнитостатика	70
4.1. Магнитное поле и его характеристики.....	70
4.2. Закон Био – Савара – Лапласа	74
4.3. Действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды...	78
4.4. Магнитное поле движущегося заряда.....	82
4.5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме.....	84
4.6. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции.....	86
4.7. Магнитное поле соленоида и тороида.....	88
4.8. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.....	90
Примеры решения задач.....	92
Задачи.....	96
Л е к ц и я 5. Магнитное поле в веществе. Электромагнитная индукция	98
5.1. Магнитные моменты электронов и атомов.....	98
5.2. Намагниченность магнетика. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в веществе	100
5.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.....	102
5.4. Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики	104
5.5. Электромагнитная индукция.....	109
5.5.1. Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца.....	109
5.5.2. Явление самоиндукции.....	111
5.5.3. Токи при размыкании и замыкании цепи.....	113
5.5.4. Взаимная индукция.....	116
5.5.5. Токи Фуко. Скин-эффект.....	120
5.5.6. Энергия магнитного поля.....	121
Примеры решения задач.....	122
Задачи.....	126
Теоретические вопросы по первой части.....	127
Ч а с т ь 2. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	133
Л е к ц и и 6 – 7. Уравнения Максвелла. Механические и электромагнитные колебания	133
6.1. Вихревое электрическое поле.....	133
6.2. Ток смещения.....	134
6.3. Уравнения Максвелла.....	137
6.4. Механические и электромагнитные колебания.....	141
6.4.1. Колебания и их основные характеристики.....	141
6.4.2. Механические гармонические колебания.....	143

6.4.3. Маятники.....	146
6.4.4. Электрический колебательный контур.....	151
6.4.5. Сложение гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Биения.....	153
6.4.6. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.....	156
6.4.7. Свободные затухающие колебания.....	159
6.4.8. Вынужденные колебания.....	164
6.4.9. Переменный ток.....	171
Примеры решения задач.....	175
Задачи.....	183
Л е к ц и и 8 – 9. Волны	185
8.1. Упругие волны.....	185
8.1.1. Волновой процесс. Продольные и поперечные волны.....	185
8.1.2. Уравнения плоской и сферической волн.....	188
8.1.3. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость.....	191
8.1.4. Интерференция волн. Стоячие волны.....	193
8.1.5. Звуковые волны.....	195
8.1.6. Эффект Доплера для звуковых волн.....	199
8.1.7. Ультразвук и его применение.....	202
8.2. Электромагнитные волны.....	205
8.2.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля.....	205
8.2.2. Свойства электромагнитных волн.....	206
8.2.3. Энергия и импульс электромагнитной волны.....	207
8.2.4. Излучение диполя.....	211
8.2.5. Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме.....	213
8.2.6. Шкала электромагнитных волн.....	214
Примеры решения задач.....	216
Задачи.....	221
Теоретические вопросы по второй части.....	223
ПРИЛОЖЕНИЕ	227
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	239

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и содержит последовательное изложение основных положений классической и современной физики. Отбор материала и его содержание ориентированы на будущих специалистов в области агропромышленного комплекса и являются обобщением методических приемов, выработанных автором за долгие годы работы. В доступной форме в книге приведены лекции, состоящие из теоретических сведений и вопросов по всем разделам второй части курса общей физики. Предлагаемый материал может быть использован студентами для самостоятельного изучения соответствующих тем, составления конспектов лекций, на практических занятиях или лабораторных практикумах, при выполнении индивидуальных домашних заданий, а также при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие окажется полезным для студентов аграрных и технических вузов всех направлений подготовки, преподавателей курса общей физики и широкого круга читателей, интересующихся физикой.

Книга состоит из двух частей и восьми лекций, в лекциях материал структурирован по темам, содержит 97 рисунков. В учебное пособие включено 44 задачи с подробными решениями и разбором основных методов и математических приемов, 90 задач содержат краткие ответы и предложены для самостоятельного решения, с целью повторения материала представлено 132 теоретических вопроса, в приложении – 27 таблиц, библиографический список, включающий 11 источников (учебников, учебных пособий и справочников). Приведенный в учебном пособии справочный материал опирается на современные достижения науки и охватывает электричество, электромагнетизм, колебания и волны. Книга дополняет широко известные курсы физики, не дублируя их содержания. Ее удобно использовать для повторения пройденного материала непосредственно перед зачетом или экзаменом, а также для быстрого восстановления в памяти забытого теоретического или практического материала.

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам О.Р. Никитину и Б.А. Тимеркаеву за рецензирование книги и важные замечания, а также доценту кафедры физики РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева К.А. Горшкову за помощь в подготовке учебного пособия.

Автор

Часть 1. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Лекция 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика – раздел электродинамики, в котором изучается взаимодействие неподвижных электрических зарядов, осуществляемое посредством электростатического поля. (Большая российская энциклопедия).

1.1. Электрический заряд. Закон сохранения заряда

Электрический заряд – физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Свойства заряда:

1. Носителями электрического заряда являются заряженные элементарные частицы – *протон* ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг) и *электрон* ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг), а также их античастицы – *антипротон* и *позитрон* – и некоторые нестабильные частицы: *π -мезоны*, *μ -мезоны* и т. д.

2. Все заряженные элементарные частицы обладают одним и тем же по величине зарядом, называемым *элементарным зарядом*, который обозначают буквой e ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). [Опыт показывает, что заряд элементарных частиц не зависит от скорости].

3. Заряд элементарных частиц может быть положительным или отрицательным. Одноименные частицы отталкиваются, разноименные – притягиваются. За положительный заряд принят заряд протона $+e$; заряд электрона – отрицательный ($-e$). [Заряженные частицы взаимодействуют между собой с силами, убывающими с расстоянием также медленно, как гравитационные, но во много раз превышающими их по величине].

Единица электрического заряда q – *кулон* [Кл]; 1 Кл – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с. Кулон – производная единица.

Если в состав макроскопического тела входит различное количество электронов N_e и протонов N_p , то оно оказывается заряженным. Заряд тела всегда представляется числом, кратным величине элементарного заряда:

$$q = e(N_p - N_e). \quad (1.1)$$

В результате обобщения опытных данных и экспериментального подтверждения Фарадеем (1843 г.) был сформулирован **закон сохранения электрического заряда**: *полный заряд замкнутой системы, т. е. алгебраическая сумма зарядов всех тел, постоянен*:

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const.} \quad (1.2)$$

[Это утверждение очевидно, если в системе не происходит превращений элементарных частиц. Закон сохранения заряда имеет *фундаментальный характер* – он выполняется в любых процессах рождения и уничтожения элементарных частиц. *Замкнутой* называют *систему*, не обменивающуюся зарядами с внешними телами].

1.2. Закон Кулона

Закон Кулона [установлен в 1785 г. Ш. Кулоном с помощью крутильных весов] описывает взаимодействие *неподвижных* относительно друг друга *точечных электрических зарядов*, т. е. элементарных частиц или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними: *сила взаимодействия F* [кулоновская сила] *двух неподвижных точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними*:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.3)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Сила взаимодействия направлена вдоль прямой, соединяющей заряды (*центральные силы*); одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r^2}, \quad (1.4)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; \vec{r}_{12} – радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 ; $r = |\vec{r}_{12}|$ (рис. 1). На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

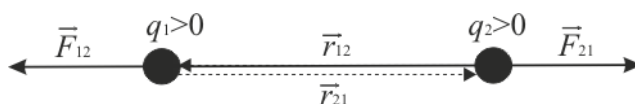


Рис. 1

В СИ коэффициент пропорциональности k равен

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Тогда закон Кулона [см. формулу (1.3)] в СИ запишется в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.5)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н · м²) или $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – *электрическая постоянная* [относится к числу *фундаментальных физических постоянных*]; тогда $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ Н · м²/Кл² или $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, где Ф (фарад) – единица электрической емкости (С[Ф]).

Если заряды поместить в среду (вода, масло, керосин и т. д.), то кулоновская сила уменьшится в ϵ раз; ϵ – *диэлектрическая проницаемость среды* (или *вещества*), $\epsilon > 0$ [для воздуха $\epsilon \approx 1$ и вакуума $\epsilon = 1$]. С учетом ϵ закон Кулона записывается в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (1.5')$$

1.3. Электростатическое поле и его напряженность.

Принцип суперпозиции электростатических полей

Взаимодействие заряженных частиц друг с другом осуществляется посредством *электромагнитного поля*. Это означает, что: 1) заряженные частицы создают в окружающем пространстве электромагнитное поле; 2) на заряженную частицу действует электромагнитное поле, существующее в данной точке пространства в данный момент времени. Поле, создаваемое точечным источником, пропорционально его заряду; воздействие поля на заряженную частицу пропорционально заряду этой частицы.

Электромагнитное поле представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей – *электрического* и *магнитного*. Действие электрического поля на заряженную частицу не зависит от ее скорости, а действие магнитного поля пропорционально скорости частицы. Источником электрического поля служат любые заряженные частицы, магнитное поле создается движущимися зарядами. Свойства полей полностью описываются системой четырех уравнений Максвелла [см. п. 6.3].

Поля, создаваемые неподвижными электрическими зарядами, называются *электростатическими*. Электростатическое поле может проявить себя по силовому воздействию на заряженную частицу. Силовой характеристикой электростатического поля является *напряженность* \vec{E} .

Напряженность \vec{E} *электростатического поля* – физическая величина, численно равная силе, действующей на *пробный точечный положительный заряд* q_0 , помещенный в данную точку поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.6)$$

[q_0 – такой заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле)].

Согласно формуле (1.6), единица напряженности E – *ньютон на кулон* [Н/Кл]; 1 Н/Кл – напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл

действует силой 1 Н; $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$ [$\text{Н/Кл} = (\text{Н}\cdot\text{м})/\text{Кл}\cdot\text{м} = \text{Дж}/\text{Кл}\cdot\text{м} = \text{В/м}$], где В (вольт) – единица потенциала φ электростатического поля [см. п. 1.5].

Напряженность поля точечного заряда q в вакууме

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2} \quad (1.7)$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (1.8)$$

[учли выражения (1.6) и (1.5)].

Вектор \vec{E} направлен в сторону действия силы \vec{F} : если поле создается положительным зарядом ($q > 0$), то вектор \vec{E} направлен вдоль радиус-вектора от заряда (рис. 2, а); если поле создается отрицательным зарядом ($q < 0$), то вектор \vec{E} направлен к заряду (рис. 2, б).

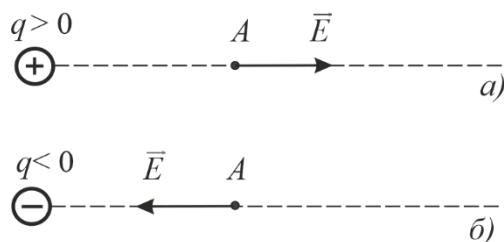


Рис. 2

Для большей наглядности электростатическое поле представляют непрерывными линиями напряженности или силовыми линиями – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением \vec{E} (рис. 3); если поле создается точечным зарядом $q > 0$, то линии напряженности – радиальные прямые, выходящие из заряда (рис. 4, а), и входящие в него, если заряд $q < 0$ (рис. 4, б).

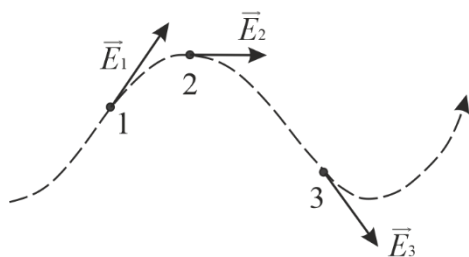


Рис. 3

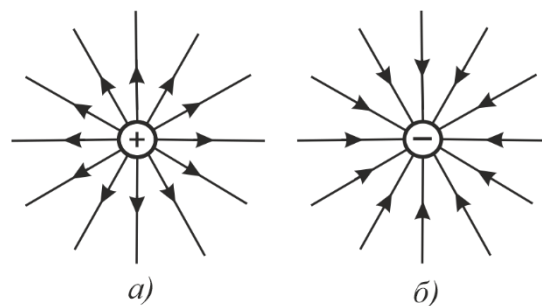


Рис. 4

Линии напряженности электростатического поля начинаются на положительных электрических зарядах и заканчиваются на отрицательных, либо уходят в бесконечность. На рис. 5 для примера показаны линии напряженности электростатического поля для двух одинаковых по модулю одноименных (рис. 5, а) и разноименных (рис. 5, б) точечных зарядов.

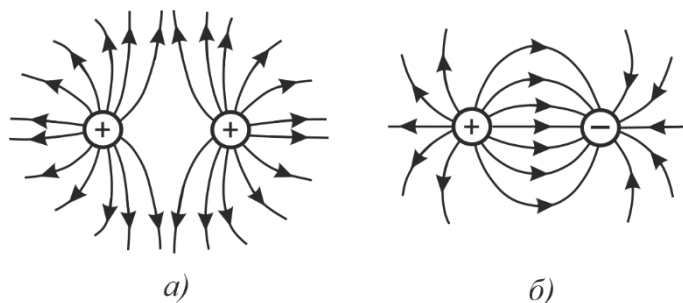


Рис. 5

Если в какую-либо точку электростатического поля [рассматриваем систему неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n] поместить пробный заряд q_0 , то на него со стороны зарядов q_1, q_2, \dots, q_n будут действовать кулоновские силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Результирующая сила \vec{F} , с которой действуют на q_0 все n зарядов q_i , равна векторной сумме сил \vec{F}_i , приложенных к q_0 со стороны каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.9)$$

Согласно (1.6), $\vec{F} = q_0 \vec{E}$, где \vec{E} – напряженность результирующего поля. Подставляя $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ в (1.9), получаем

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.10)$$

где \vec{E}_i – напряженность поля, создаваемого зарядом q_i .

Формула (1.10) выражает **принцип суперпозиции электростатических полей**: напряженность \vec{E} результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любой системы неподвижных зарядов.

[**Поле диполя.** Простейшей системой точечных зарядов является *электрический диполь* – пара равных по величине и противоположных по знаку неподвижных точечных зарядов $(+q, -q)$, разделенных расстоянием l , которое пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием от этих зарядов до рассматриваемых точек поля.

Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называют *плечом диполя* \vec{l} . Диполь характеризуется *электрическим моментом диполя* (или *дипольным моментом*) \vec{p} , представляющим собой произведение величины положительного заряда $+q$ на плечо \vec{l} (рис. 6):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.11)$$

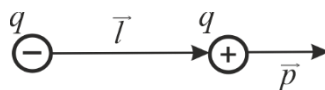


Рис. 6

Согласно принципу суперпозиции (1.10), напряженность \vec{E} поля диполя в произвольной точке

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \quad (1.12)$$

где \vec{E}_+ и \vec{E}_- – напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Воспользовавшись формулой (1.12), рассчитаем \vec{E} в произвольной точке на *продолжении оси диполя* и на *перпендикуляре к середине его оси*.

1. *Напряженность \vec{E} поля диполя на продолжении оси диполя в точке A.*

Напряженность \vec{E} поля диполя в точке A (рис. 7, а) направлена по оси диполя и, согласно принципу суперпозиции (1.12), по модулю равна $E = E_+ - E_-$. На основании формулы (1.8) получим

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2},$$

где r – расстояние от точки A до середины оси диполя.

Согласно определению диполя, $l/2 \ll r$, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (1.13)$$

2. Напряженность \vec{E} поля, создаваемого диполем в точке B , находящейся на перпендикуляре, проходящем через середину плеча диполя.

Точка B (рис. 7, б) равноудалена от зарядов $+q$ и $-q$, поэтому

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2}, \quad (1.14)$$

где r' – расстояние от точки B до середины плеча диполя.

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор \vec{E}_B , получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{(r')^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r'},$$

откуда

$$E_B = \frac{E_+ l}{r'}. \quad (1.15)$$

Подставив в выражение (1.15) значение (1.14), получим

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r')^3}. \quad (1.16)$$

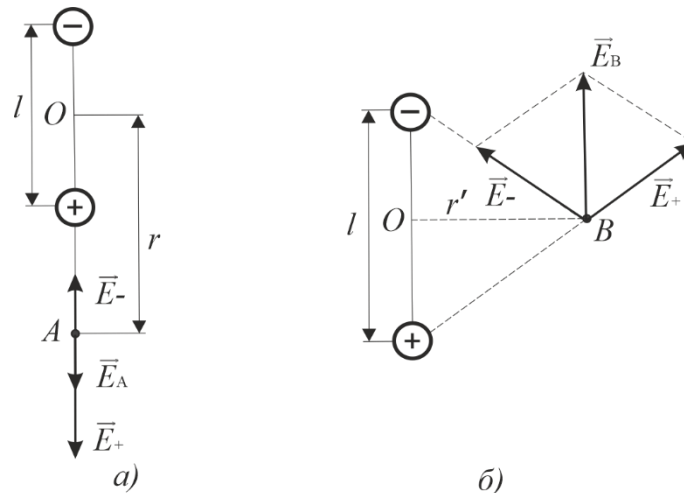


рис. 7

Вектор \vec{E}_B имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя \vec{p} (см. рис. 6 и 7, б)].

1.4. Работа по перемещению точечного заряда в электростатическом поле.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Рассчитаем работу, совершаемую электростатическим полем положительного точечного заряда q , по перемещению другого положительного точечного заряда q_0 из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории (рис. 8).

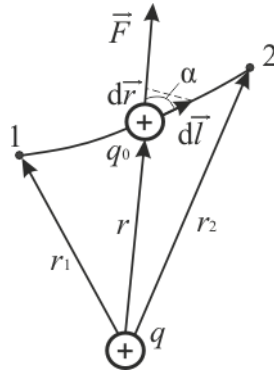


Рис. 8

Работа силы \vec{F} на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr, \quad (1.17)$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{l}$; $dl \cos \alpha = dr$ – проекция вектора $d\vec{l}$ на направление силы \vec{F} .

Работа при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right), \quad (1.18)$$

где r_1 и r_2 – соответственно расстояния от заряда q до точек 1 и 2. Из формулы (1.18) следует, что работа A_{12} , совершаемая при перемещении заряда q_0 в поле заряда q , не зависит от формы траектории движения, а зависит только от начального и конечного положений заряда. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*.

Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда, например, *единичного положительного заряда* q_0 , во внешнем электростатическом поле *по любому замкнутому пути* L , равна нулю [следует из формулы (1.18)], т. е.

$$\oint_L dA = \oint_L q_0 \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0 \quad (1.19)$$

или

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0, \quad (1.20)$$

где $E_l = E \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{E} на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$; $q_0 = 1$ Кл.

Интеграл

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl \quad (1.21)$$

называется *циркуляцией вектора напряженности*, а выражение (1.21) – теоремой о циркуляции вектора напряженности \vec{E} . Из формулы (1.20) следует, что *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю*. Это утверждение справедливо для потенциального поля.

1.5. Потенциал. Разность потенциалов

Как и любое стационарное поле, электростатическое поле является потенциальным. Это означает, что работа поля при перемещении пробного заряда q_0 из одной точки пространства в другую не зависит от траектории [см. п. 1.4]. Работа в потенциальном поле совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = -\Delta W = W_1 - W_2. \quad (1.22)$$

Из формул (1.18) и (1.22) следует, что потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + C.$$

При $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия $W = 0$, поэтому $C = 0$. Тогда

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}. \quad (1.23)$$

Из формулы (1.23) следует, что отношение W/q_0 не зависит от заряда q_0 и поэтому может служить *энергетической характеристикой электростатического поля*, называемой **потенциалом**:

$$\varphi = \frac{W}{q_0} \quad (1.24)$$

– физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда q_0 , помещенного в данную точку.

Из формул (1.24) и (1.23) следует, что потенциал, создаваемый точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.25)$$

Если поле создается зарядами q_1, q_2, \dots, q_n , то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.26)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля, при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 [см. (1.22), (1.24) и (1.25)]:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.27)$$

равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

Если заряд q_0 из точки с потенциалом φ удалить на бесконечность, где, по условию, потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно (1.27), $A_\infty = q_0\varphi$, откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}. \quad (1.28)$$

Потенциал φ – физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда q_0 при удалении его из данной точки поля в бесконечность.

Из формул (1.24), (1.28) и (1.27) следует, что единица потенциала φ и разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ – *вольт* [В]; 1 В – потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл).

Работа сил поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 может быть записана также в виде

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 E_l dl, \quad (1.29)$$

где E_l – проекция вектора \vec{E} на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

Приравняв (1.27) и (1.29), получим выражение для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl \quad (1.30)$$

[интегрирование в (1.30) можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения]. В общем случае

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \text{ или } \vec{E} = -\nabla\varphi; \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right), \quad (1.31)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей. Знак « $-$ » определяется тем, что вектор напряженности \vec{E} поля направлен в *сторону убывания* потенциала φ .

1.6. Поток вектора напряженности электростатического поля.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Для характеристики электростатического поля вводят понятие **потока вектора напряженности поля** (Φ_E или $d\Phi_E$). По определению, *потоком вектора напряженности электрического поля* через элементарную площадку dS (в пределах которой поле можно считать однородным) называют величину

$$d\Phi_E = \vec{E} d\vec{S} = E \cos \alpha \cdot dS = E_n dS, \quad (1.32)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \vec{n} к элементарной площадке dS ; α – угол между вектором \vec{E} и нормалью \vec{n} ; $E_n = E \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS (рис. 9).

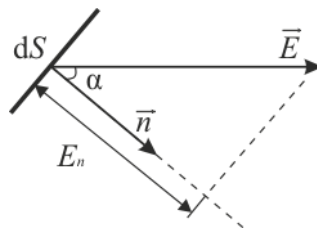


Рис. 9

Единица потока вектора напряженности электростатического поля Φ_E – *вольт-метр* $[V \cdot m]$.

Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора \vec{E} через эту поверхность

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS. \quad (1.33)$$

Поток вектора \vec{E} является *алгебраической величиной*: зависит не только от конфигурации поля \vec{E} , но и от выбора направления \vec{n} .

В соответствии с формулой (1.33) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса r , охватывающую точечный заряд q , находящийся в ее центре (рис. 10), равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.34)$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Знак потока Φ_E совпадает со знаком заряда q .

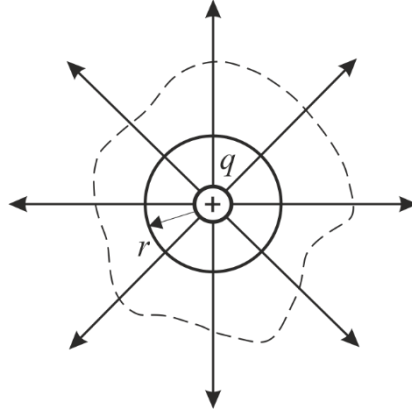


Рис. 10

[На рис. 11 представлена произвольная замкнутая поверхность, охватывающая заряд $q > 0$.



Рис. 11

Некоторые линии напряженности выходят из поверхности, некоторые – входят в нее. Нечетное число пересечений сводится к одному: линии, выходящие из поверхности – положительные, а линии, входящие – отрицательные. Если замкнутая поверхность не охватывает заряд, то $\Phi_E = 0$].

Если произвольная поверхность охватывает n зарядов, то согласно принципу суперпозиции (1.10) $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$, тогда

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

[учли, что согласно (1.34), каждый из интегралов стоящий под знаком суммы, равен q_i/ϵ_0].

Следовательно,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.35)$$

Формула (1.35) *выражает теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную ϵ_0* . [Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы **русским математиком М.В. Остроградским**, а затем независимо от него применительно к электростатическому полю – К. Гауссом].

Теорема Гаусса означает, что силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах, а в пустом пространстве непрерывны. Отметим, что теорема Гаусса и непрерывность силовых линий являются следствием того, что кулоновская сила убывает с расстоянием, как $1/r^2$.

В случае непрерывного распределения зарядов теорему Гаусса (1.35) можно записать так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.36)$$

где $\rho = dq/dV$ – *объемная плотность заряда* – количество электрического заряда, приходящееся на единицу объема. Единица объемной плотности заряда ρ – *кулон на метр в кубе* [Кл/м³].

1.7. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме

Применяя теорему Гаусса, можно определить напряженности полей, создаваемых заряженными телами различной формы.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ . *Поверхностная плотность заряда σ* – физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу поверхности:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (1.37)$$

Единица поверхностной плотности заряда σ – *кулон на метр в квадрате* [Кл/м²].

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей [линии напряженности \vec{E} перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны] (рис. 12).

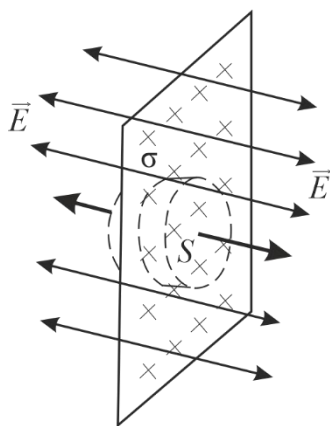


Рис. 12

Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания, и для основания E_n совпадает с E , т. е. равен $2ES$. Согласно теореме Гаусса (1.35)

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.38)$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна [см. формулу (1.30)]

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (1.39)$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Результирующая напряженность \vec{E} определяется как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности [см. п. 1.3, формулу (1.10)]. В области между плоскостями (рис. 13) складываемые поля [определяются формулой (1.39)] имеют одинаковое направление, поэтому результирующая напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.40)$$

Слева и справа от плоскостей, т. е. вне объема, ограниченного плоскостями, поля вычитаются, и результирующая напряженность $E = 0$.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между плоскостями, расстояние между которыми d [см. формулу (1.30)], равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d. \quad (1.41)$$

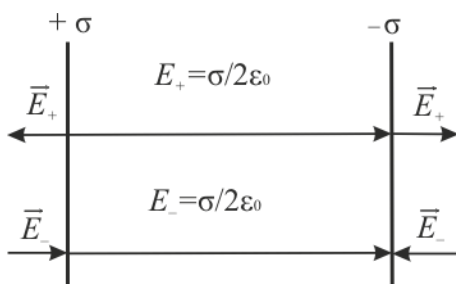


Рис. 13

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности. Сферическая поверхность радиуса R с общим зарядом q заряжена равномерно с поверхностной плотностью $+\sigma$. Линии напряженности направлены радиально, так как поле обладает сферической симметрией (рис.14). Поле является *центрально-*

симметричным относительно центра сферы. Напряженность является функцией расстояния r [r – радиус воображаемой сферы] от центра сферы и одинакова во всех точках, равноудаленных от сферы.

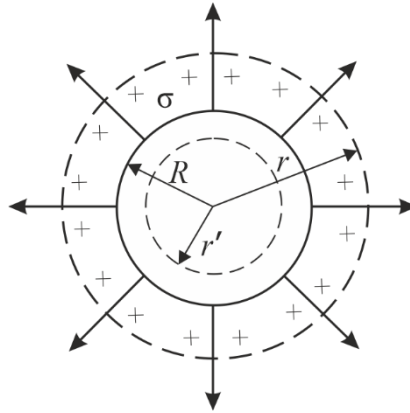


Рис.14

Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд q , создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса (1.35)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (1.42)$$

[Если $r' < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует, т. е. $E(r) = 0$].

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы ($r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.43)$$

4. Поле объемно заряженного шара. Шар радиуса R с общим зарядом q заряжен равномерно с объемной плотностью заряда ρ [см. формулу (1.36)]:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.44)$$

Поле является центральносимметричным (центр шара – центр симметрии поля). Как и в случае сферы, напряженность E одинакова во всех точках воображаемой сферы радиусом r (рис.15).

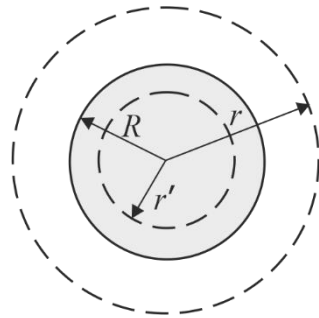


Рис.15

Для поля *вне шара* ($r > R$) получится тот же результат, что и в случае поверхностно заряженной сферы, и поле описывается формулой (1.42). *Внутри шара* ($r' < R$) сфера радиусом r' охватывает заряд $q' = 4\pi(r')^3\rho/3$. Поэтому, согласно теореме Гаусса (1.35),

$$E(r) \cdot 4\pi(r')^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi(r')^3\rho}{3\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что $\rho = q/(4\pi R^3/3)$, получаем

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r' \quad (r' \leq R). \quad (1.45)$$

[Напряженность поля *вне шара* убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда, а *внутри шара* – растет линейно с расстоянием r' от центра шара].

Напряженность поля объемно заряженного шара *вне шара* определяется формулой (1.42), поэтому разность потенциалов между двумя точками определяется выражением (1.43). *Внутри шара* разность потенциалов между двумя точками, расположенными на расстояниях r'_1 и r'_2 от центра шара ($r'_1 < R$, $r'_2 < R$, $r'_2 > r'_1$), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} [(r'_2)^2 - (r'_1)^2]. \quad (1.46)$$

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити). Бесконечный цилиндр радиуса R заряжен равномерно с линейной плотностью τ .

Линейная плотность заряда τ – физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу длины:

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (1.47)$$

Единица линейной плотности заряда τ – кулон на метр [Кл/м].

Из соображений симметрии следует, что линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра (рис.16).

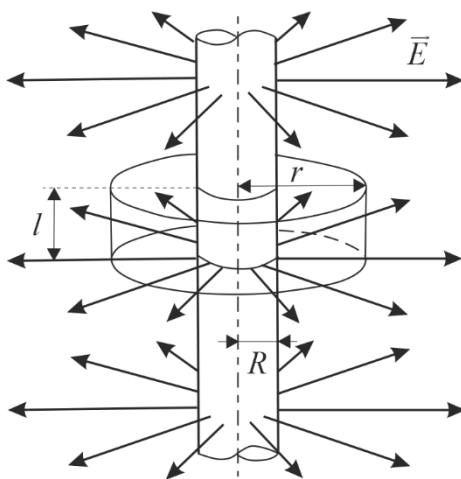


Рис.16

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный заряженный цилиндр радиусом r и высотой l . Поток вектора \vec{E} сквозь торцы цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность равен $2\pi r l E$. По теореме Гаусса, при $r > R$: $2\pi r l E = \tau l / \epsilon_0$, откуда

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R). \quad (1.48)$$

Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси заряженного цилиндра ($r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.49)$$

Примеры решения задач

1.1. Найдите величину зарядов q_1 и q_2 , если заряды находятся в касторовом масле ($\epsilon = 4,8$) на расстоянии $r = 4$ см друг от друга и взаимодействуют с силой $F = 1,2$ Н. Величина одного заряда в 2 раза больше другого ($q_1 = 2q_2$). Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Дано: $F = 1,2$ Н; $r = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\epsilon = 4,8$; $q_1 = 2q$; $q_2 = q$.

Найти: q_1 ; q_2 .

Решение. Между одноименными точечными зарядами, согласно закону Кулона, действует сила отталкивания

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}, \quad (1)$$

где q_1 и q_2 – заряды; ϵ_0 – электрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; r – расстояние между зарядами. По условию задачи $q_1 = 2q$; $q_2 = q$.

Тогда

$$F = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (2)$$

откуда

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2 F}{2}}. \quad (3)$$

Ответ: $q_1 = 1431,38$ нКл; $q_2 = 715,69$ нКл.

1.2. Найдите ускорение, сообщаемое одним протоном ($e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) другому, находящемуся от первого в трансформаторном масле ($\epsilon = 2,2$) на расстоянии $r = 1$ см.

Дано: $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $\epsilon = 2,2$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг; $r = 10^{-2}$ м.

Найти: a .

Решение. По закону Кулона протоны, находящиеся в трансформаторном масле на расстоянии r , отталкиваются с силой

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (1)$$

Под действием кулоновской силы, в соответствии со вторым законом Ньютона, протон приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m_p}, \quad (2)$$

где m_p – масса протона.

Тогда искомое ускорение

$$a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2 m_p}. \quad (3)$$

Ответ: $a = 626,86 \text{ м/с}^2$.

1.3. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями с поверхностными плотностями $0,4 \text{ мкКл/м}^2$ и $-0,6 \text{ мкКл/м}^2$. Пространство между плоскостями заполнено текстолитом ($\epsilon_2 = 7,5$). Найдите напряженность E электростатического поля: а) между плоскостями (E'); б) вне плоскостей (E'').

Дано: $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$; $\sigma_2 = -6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; $\epsilon_1 = 1$; $\epsilon_2 = 7,5$.

Найти: E' ; E'' .

Решение. Напряженность поля, создаваемого бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ , равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad (1)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность \vec{E} результирующего поля, создаваемого обеими плоскостями, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой заряженной плоскостью:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2)$$

Учитывая формулы (1) и (2), получаем искомое поле:

а) в зазоре между плоскостями

$$E' = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0\epsilon_2} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon_2} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\epsilon_0\epsilon_2}; \quad (3)$$

б) за пределами плоскостей

$$E'' = E_2 - E_1 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon_1} - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0\epsilon_1} = \frac{|\sigma_2| - |\sigma_1|}{2\epsilon_0\epsilon_1}. \quad (4)$$

Ответ: $E' = 7,53 \text{ кВ/м}$; $E'' = 11,30 \text{ кВ/м}$.

1.4. Найдите поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую шаровую поверхность, внутри которой находятся пять точечных зарядов $q_1 = +1$ нКл, $q_2 = -2$ нКл, $q_3 = +3$ нКл, $q_4 = -4$ нКл и $q_5 = +5$ нКл. Рассмотрите случаи, когда система зарядов находится в вакууме ($\varepsilon_1 = 1$) и в спирте ($\varepsilon_2 = 26$).

Дано: $q_1 = +1$ нКл; $q_2 = -2$ нКл; $q_3 = +3$ нКл; $q_4 = -4$ нКл; $q_5 = +5$ нКл; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 26$.

Найти: Φ'_E ; Φ''_E .

Решение. Поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS, \quad (1)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к поверхности; $E_n = E \cos \alpha$.

В каждой точке шаровой поверхности E – величина постоянная и определяется по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}. \quad (2)$$

Тогда поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля сквозь шаровую поверхность площадью $S = 4\pi r^2$ будет иметь вид:

$$\Phi_E = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2. \quad (3)$$

Учитывая формулу (2), для одного заряда получаем

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (4)$$

Согласно теореме Остроградского – Гаусса, для системы зарядов полный поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность произвольной формы равен:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) числовые значения физических величин, получим искомый поток вектора напряженности:

а) в случае, когда заряды находятся в вакууме, $\Phi'_E = 338,98$ В · м;

б) в случае, когда заряды находятся в спирте, $\Phi''_E = 13,04$ В · м.

Ответ: $\Phi'_E = 338,98$ В · м; $\Phi''_E = 13,04$ В · м.

1.5. Найдите работу по перемещению заряда $q = 2$ нКл вдоль линии напряженности с расстояния 80 см до расстояния 40 см, если электростатическое поле создается бесконечно длинной, равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 1,5$ мкКл/м.

Дано: $q = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл; $r_1 = 0,8$ м; $r_2 = 0,4$ м; $\tau = 1,5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м; $\varepsilon = 1$.

Найти: A .

Решение. Работа силы F на элементарном перемещении dr вдоль линии напряженности

$$dA = Fdr, \quad (1)$$

где сила

$$F = -qE \quad (2)$$

[знак « \rightarrow » показывает, что направление силы F и перемещение противоположны друг другу].

Бесконечная, равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда τ создает аксиально симметричное поле напряженностью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad (3)$$

где ε_0 – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Учитывая формулу (3) для напряженности поля, найдем искомую работу по перемещению заряда с расстояния r_1 до расстояния r_2 :

$$A = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = -\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (4)$$

Ответ: $A = 37,42$ мкДж.

Задачи

1. Найдите, какими равными зарядами следует зарядит два одинаковых шарика массой $m = 10$ г каждый, находящиеся на некотором расстоянии r друг от друга, чтобы их взаимодействие уравновешивало силу тяготения. Гравитационная и электрическая постоянные соответственно равны $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²) и $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Ответ: 0,86 пКл

2. Чтобы сила взаимодействия между двумя точечными зарядами осталась неизменной, их помещают в жидкий диэлектрик. При этом расстояние между зарядами уменьшают на 30 %, а величину каждого заряда увеличивают на 40 %. Найдите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика. Ответ: 4

3. Найдите, на каком расстоянии r_2 от заряженного шарика напряженность E поля будет такая же, какая была до погружения в жидкий диэлектрик ($\varepsilon = 9$) на расстоянии $r_1 = 28$ см. Шарик считать точечным зарядом. Ответ: 10 см

4. Потенциал поля в точке, удаленной от положительного точечного заряда q на расстояние $r = 18$ см, равен $\varphi = 24$ В. Найдите величину напряженности E поля в этой точке. Потенциал поля в бесконечности принять равным нулю.

Ответ: 300 В/м

5. Найдите работу A , которую нужно совершить, чтобы сблизить находящиеся в вакууме на расстоянии $r_1 = 50$ см друг от друга положительные заряды $q_1 = 20$ нКл и $q_2 = 8$ нКл до расстояния $r_2 = 20$ см.

Ответ: 4,32 мкДж

6. Найдите работу A по перемещению заряда $q = 2$ нКл вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 8$ см до расстояния $r_2 = 4$ см, если электростатическое поле создается *бесконечной равномерно заряженной тонкой нитью* с линейной плотностью заряда $\tau = 3$ мкКл/м.

Ответ: 74,83 мкДж

7. Электрическое поле в вакууме создано двумя точечными зарядами: $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -30$ нКл. Расстояние между зарядами равно $l = 0,5$ м. Найдите напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 0,4$ м от первого и на расстоянии $r_2 = 0,3$ м от второго зарядов.

Ответ: 1272,79 В/м

8. Найдите напряженность E и потенциал φ поля в точке пересечения диагоналей квадрата со стороной $a = 0,2$ м, если в вершинах квадрата находятся заряды $q_1 = 0,3$ нКл и $q_2 = q_3 = q_4 = -0,3$ нКл.

Ответ: 270 В/м; 38,18 В

9. Найдите разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя бесконечными параллельными плоскостями, равномерно заряженными разноименными зарядами с поверхностными плотностями $\sigma_1 = +40$ нКл/м² и $\sigma_2 = -90$ нКл/м² зарядов, если расстояние между ними равно $d = 35,4$ мм.

Ответ: 260 В

10. Пространство между двумя параллельными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов $\sigma_1 = +30$ нКл/м² и $\sigma_2 = -70$ нКл/м² заполнено текстолитом ($\varepsilon = 7,5$). Найдите напряженность поля между плоскостями (E') и вне плоскостей (E'').

Ответ: 753 В/м; 2260 В/м

11. Найдите поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую шаровую поверхность, внутри которой находятся четыре точечных заряда $q_1 = +3$ нКл, $q_2 = -2$ нКл, $q_3 = -3$ нКл и $q_4 = +7$ нКл. Рассмотреть случаи, когда система зарядов находится в вакууме ($\varepsilon_1 = 1$) и в керосине ($\varepsilon_2 = 2,1$).

Ответ: 565 В · м; 269 В · м

12. Электростатическое поле создается бесконечной равномерно заряженной тонкой нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 8$ нКл/м. Найдите поток Φ_E вектора напряженности сквозь цилиндрическую поверхность длиной $l = 4$ м, ось которой совпадает с нитью.

Ответ: 3615,82 В · м

Лекция 2. ДИЭЛЕКТРИКИ И ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. КОНДЕНСАТОРЫ

2.1. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

Диэлектрики (или *изоляторы*) – вещества, плохо проводящие электрический ток, следовательно, в них отсутствуют свободные носители заряда (или их ничтожно мало). Термин «диэлектрик» (от греч. *dia* – через и англ. *electric* – электрический) введен М. Фарадеем для обозначения веществ, в которые проникает электростатическое поле. Электрическая проводимость диэлектриков по сравнению с металлами очень мала. Удельное электрическое сопротивление ρ диэлектриков порядка 10^8 – 10^{17} Ом · см, а у металлов $\sim 10^{-6}$ – 10^{-4} Ом · см.

При помещении в электрическое поле любого вещества электроны и атомные ядра испытывают силы со стороны этого поля. В результате часть зарядов направленно перемещается, создавая электрический ток. Остальные же заряды перераспределяются так, что «центры тяжести» положительных ($+q$) и отрицательных зарядов ($-q$) смещаются относительно друг друга [молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом \vec{p} , определяемым формулой $\vec{p} = q\vec{l}$ (см. п. 1.3)]. В последнем случае говорят о *поляризации* вещества. *Поляризацией* диэлектрика называют процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей. [В зависимости от того, какой из этих двух процессов (*поляризация* или *электрическая проводимость*) преобладает, вещества делят на диэлектрики (все неионизированные газы, некоторые жидкости и твердые тела) и проводники (металлы, электролиты, плазма)].

Если молекулы диэлектриков (например, H_2 , N_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 , ...) имеют *симметричное строение*, т. е. центры масс положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают, то дипольный момент \vec{p} таких молекул равен нулю; подобные молекулы называют *неполярными*.

[Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные – по полю, отрицательные – против поля), и молекула приобретает дипольный момент].

Если молекулы диэлектриков (например, H_2O , NH_3 , SO_2 , CO , ...) имеют *асимметричное строение*, т. е. центры масс положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля не совпадают, то дипольный момент таких молекул отличен от нуля; подобные молекулы называют **полярными**. [При отсутствии внешнего поля дипольные моменты \vec{p} полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично, и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля, и возникает отличный от нуля результирующий дипольный момент].

2.2. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике

Под действием внешнего электростатического поля диэлектрик поляризуется. При поляризации средний дипольный момент молекул становится отличным от нуля, и возникает дипольный момент объема диэлектрика. Степень поляризации в данной точке диэлектрика характеризуется **поляризованностью** \vec{P} , определяемой как суммарный дипольный момент молекул в расчете на единицу объема:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}, \quad (2.1)$$

где V – объем диэлектрика; $\vec{p}_V = \sum \vec{p}_i$ – дипольный момент диэлектрика; \vec{p}_i – дипольный момент i -й молекулы.

Единица поляризованности P – *кулон на метр в квадрате* [Кл/м²].

Поляризованность \vec{P} в данной точке диэлектрика возникает под воздействием электрического поля и определяется его напряженностью \vec{E} . Для не очень сильных полей \vec{P} зависит от \vec{E} линейно, а в изотропном диэлектрике, кроме того, $\vec{P} \parallel \vec{E}$:

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.2)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая восприимчивость вещества, характеризующая свойства диэлектрика; ϵ – величина безразмерная, притом всегда $\epsilon > 0$ и для большинства диэлектриков (твердых и жидких) составляет несколько единиц [хотя, например, для спирта $\epsilon \approx 25$, для воды $\epsilon = 80$].

Поместим однородный и изотропный диэлектрик в виде бесконечной плоскопараллельной пластины (свойства диэлектрика одинаковы во всех точках и по всем направлениям) во внешнее однородное электростатическое поле с напряженностью \vec{E}_0 , созданное двумя разноименными плоскостями с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 17).

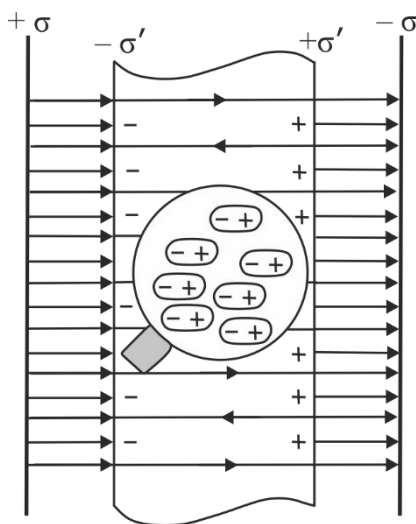


Рис. 17

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов: положительные смещаются по полю, отрицательные – против поля. В результате этого на правой грани диэлектрика, обращенного к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на левой – отрицательного заряда с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Эти нескомпенсированные *заряды*, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются *связанными*.

Связанные заряды создадут внутри диэлектрика однородное поле, напряженность которого согласно формуле (1.40)

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

Поле E' направлено против внешнего поля \vec{E}_0 , создаваемого свободными зарядами, и ослабляет его (см. рис. 17). Результирующее поле *внутри* диэлектрика

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (2.4)$$

Результирующее поле *вне* диэлектрика $E = E_0$.

По формуле (2.1) полный дипольный момент пластинки диэлектрика

$$p_V = PV = PSd,$$

где S – площадь грани пластинки; d – ее толщина. С другой стороны, полный дипольный момент, согласно (1.11), равен произведению связанного заряда каждой грани $q' = \sigma' S$ на расстояние между ними, т. е.

$$p_V = \sigma' Sd.$$

Таким образом, $PSd = \sigma' Sd$, или

$$\sigma' = P, \quad (2.5)$$

т. е. поверхностная плотность σ' связанных зарядов для рассмотренного частного случая равна поляризованности P .

Подставив в формулу (2.4) выражения (2.5) и (2.2), получаем

$$E = E_0 - \varkappa E,$$

откуда напряженность E результирующего поля внутри диэлектрика

$$E = \frac{E_0}{1 + \varkappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \varkappa \quad (2.7)$$

называется **диэлектрической проницаемостью среды**, которая показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком [из (2.6) следует, что $\varepsilon = E_0/E$]; диэлектрическая проницаемость среды ε характеризует количественно свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

2.3. Вектор электрического смещения.

Теорема Гаусса для поля в диэлектрике

Напряженность \vec{E} электростатического поля определяется как связанными, так и сторонними, нанесенными на диэлектрик извне, зарядами. Вектор напряженности \vec{E} , переходя через границу диэлектрика, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчете электростатических полей [см. (2.6)]. Так как распределение связанных зарядов заранее не известно, удобно ввести новую величину, которую называют *электрическим смещением* \vec{D} . Для электрически изотропной среды

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (2.8)$$

где ε_0 – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Единица электрического смещения D – *кулон на метр в квадрате* [Кл/м²].

Используя формулы (2.7) и (2.2), вектор электрического смещения можно выразить как

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.9)$$

Аналогично линиям напряженности \vec{E} можно ввести линии электрического смещения \vec{D} [см. п. 1.3]. [*Линии вектора \vec{E} могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных, в то время как линии вектора \vec{D} – только на свободных зарядах. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора \vec{D} проходят не прерываясь*].

Поток вектора электрического смещения \vec{D} , сквозь произвольную замкнутую поверхность S , равен

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS, \quad (2.10)$$

где D_n – проекция вектора \vec{D} на нормаль \vec{n} к площадке $d\vec{S}$; $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью \vec{n} к площадке.

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (2.11)$$

где $\sum q_i$ – алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов. [Формула (2.4) справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред].

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью $\rho = dq/dV$ [см. (1.44)] теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике можно записать в виде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV, \quad (2.12)$$

т. е. поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью.

[Для вакуума $D_n = \varepsilon_0 E_n$ ($\varepsilon = 1$), тогда поток вектора напряженности \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность [см. с (1.35)] равен

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Так как источниками поля \vec{E} в среде являются как *свободные*, так и *связанные заряды*, то теореме Гаусса (1.35) для поля \vec{E} в самом общем виде можно записать как

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^N q_i + \sum_{i=1}^N q_{icв}, \quad (2.13)$$

где $\sum q_i$ и $\sum q_{icв}$ – соответственно алгебраическая сумма свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S].

Условия на границе раздела диэлектрических сред (проницаемости которых ε_1 и ε_2) при отсутствии на границе свободных зарядов:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad D_{n1} = D_{n2}, \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (2.14)$$

где E_{τ} , D_{τ} и E_n , D_n – тангенциальные и нормальные составляющие векторов \vec{E} и \vec{D} соответственно.

2.4. Проводники во внешнем электрическом поле.

Емкость уединенного проводника

Проводником называется вещество способное проводить электрический ток. Для этого вещество должно содержать *свободные заряды*, способные перемещаться по объему проводника. При внесении незаряженного проводника во внешнее электростатическое поле заряды приходят в движение: положительные в направлении вектора напряженности \vec{E} , отрицательные – в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые *индуцированными зарядами* (рис. 18). Перераспределение зарядов происходит до тех пор, пока не установится *равновесное распределение зарядов* (рис. 19), при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль:

$$\vec{E} = 0. \quad (2.15)$$

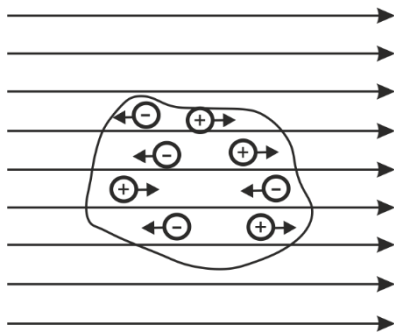


Рис. 18

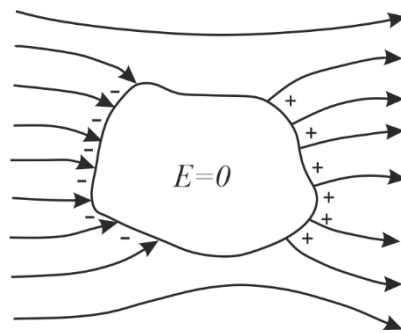


Рис. 19

Отсутствие поля внутри проводника означает, согласно (1.31), что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен ($\varphi = \text{const}$), т. е. поверхность проводника в электростатическом поле является *эквипотенциальной* [*эквипотенциальные поверхности* – поверхности, во всех точках которых потенциал φ имеет одно

и тоже значение]. Отсюда следует, \vec{E} на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности [если бы это было не так, то заряды двигались бы без затрат энергии, что противоречит закону сохранения энергии].

Если проводнику сообщить некоторый заряд q , то нескомпенсированные заряды располагаются только на поверхности проводника. Это следует непосредственно из теоремы Гаусса (2.4), согласно которой заряд q , находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью,

$$q = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = 0,$$

так как во всех точках внутри поверхности $D = 0$.

[При решении задач с неизвестным распределением заряда помогает **принцип единственности**, который можно сформулировать следующим образом: *существует единственное распределение зарядов по поверхности проводников и единственное поле $\vec{E}(r)$ в пространстве между ними, при котором напряженность поля внутри проводников равна нулю, а потенциалы или заряды проводников имеют заданные значения*. Если удастся угадать такое распределение зарядов или такую конфигурацию поля, при котором эти условия выполняются, то это решение и будет правильным].

Под **уединенным проводником** подразумевается проводник, от которого удалены другие проводники, тела и заряды на значительные расстояния. Из опыта следует, что потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду:

$$\varphi = \frac{1}{C} q.$$

Величину

$$C = \frac{q}{\varphi} \tag{2.16}$$

называют **электрической емкостью** (электроемкостью) уединенного проводника. [Электроемкость C проводника зависит от его размеров, формы и диэлектрической проницаемости среды ϵ , но не зависит от материала проводника, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри него. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются

по внешней поверхности проводника. Электроемкость не зависит также ни от заряда проводника q , ни от его потенциала φ].

Единица электроемкости C – *фарад* [Ф]; 1 Ф – электроемкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. На практике пользуются единицами, равными долям фарада: миллифарадом (мФ), микрофарадом (мкФ), нанофарадом (нФ) и пикофарадом (пФ).

Согласно (1.25), потенциал уединенного шара радиусом R , погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью ε , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Тогда из формулы (2.16) следует, *электроемкость уединенного шара*

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \quad (2.17)$$

[Из формулы (2.17) следует, что емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус $9 \cdot 10^9$ м, т. е. радиуса, в 1500 раз большего радиуса Земли (электроемкость Земли $C \approx 0,7$ мФ)].

Из формулы (2.17) вытекает, что единица электрической постоянной ε_0 – *фарад на метр* [Ф/м].

2.5. Конденсаторы

Понятие электрической емкости применимо к системе проводников. **Конденсатором** называется система из двух изолированных друг от друга проводников, один из которых заряжен зарядом $+q$, другой – зарядом $-q$. Проводники называют *обкладками конденсатора*, заряд q – *зарядом конденсатора*, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между положительной и отрицательной обкладками – *напряжением на конденсаторе* (U). Напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду:

$$U = \frac{1}{C} q, \quad (2.18)$$

где C – электроемкость (емкость) конденсатора.

Емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} \quad (2.19)$$

– физическая величина, равная отношению заряда q , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ [или к напряжению U] между его обкладками.

В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на **плоские**, **цилиндрические** и **сферические**.

1. Емкость плоского конденсатора. Если площадь обкладки S , а заряд на ней q , то напряженность поля между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \quad (2.20)$$

[см. формулы (1.40) и (1.37); ε – диэлектрическая проницаемость].

В соответствии с (1.30) разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \quad (2.21)$$

где d – расстояние (зазор) между обкладками конденсатора. [Если d мало по сравнению с линейными размерами обкладок конденсатора, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками можно считать однородным].

Тогда из формулы (2.19), с учетом (2.21), получим выражение для *емкости плоского конденсатора*:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (2.22)$$

2. Емкость цилиндрического конденсатора. Цилиндрический конденсатор состоит из двух полых коаксиальных цилиндров длиной l и радиусами r_1 и r_2 , вставленных один в другой и разделенных слоем диэлектрика (ε). [Пренебрегая краевыми эффектами, считаем поле радиально-симметричным и сосредоточенным между обкладками].

При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов, с учетом формул (1.49) и (1.47), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.23)$$

Подставив (2.23) в (2.19), получим выражение для *емкости цилиндрического конденсатора*:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.24)$$

3. Емкость сферического конденсатора. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических металлических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика (ε). Согласно формуле (1.43), разность потенциалов между обкладками сферического конденсатора при наличии диэлектрика между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.25)$$

где r_1 и r_2 – радиусы концентрических сфер.

Подставив (2.25) в (2.19), получим выражение для *емкости сферического конденсатора*:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (2.26)$$

Конденсаторы характеризуются **пробивным напряжением** – разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит **пробой** – *электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе*.

[**Батарея конденсаторов** – это группа единичных конденсаторов, соединенных между собой электрически; при этом используются их *параллельное* и *последовательное соединения*].

1. Параллельное соединение. Все обкладки соединены между собой и образуют обкладки составного конденсатора (*батареи*) (рис. 20).

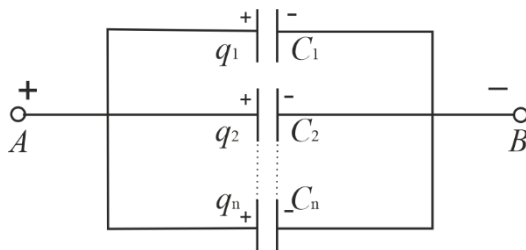


Рис. 20

В этом случае имеем

$$U = U_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (2.27)$$

т. е., напряжение U на обкладках конденсаторов одинаково U_i ; заряд q батареи конденсаторов равен сумме зарядов q_i отдельных конденсаторов; полная емкость C батареи равна сумме емкостей C_i отдельных конденсаторов.

2. Последовательное соединение. Обкладками составного конденсатора (батареи) служат обкладки крайних конденсаторов (рис. 21).

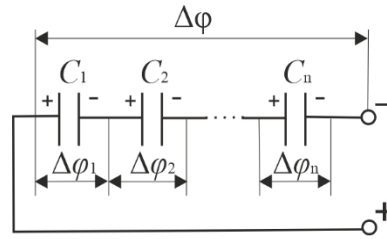


Рис. 21

Имеем

$$q = q_i, \quad U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (2.28)$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов полная (результатирующая) емкость C всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

2.6. Энергия электростатического поля

1. Энергия системы зарядов. Энергия взаимодействия системы неподвижных точечных зарядов определяется как работа внешних сил, необходимая для создания этой системы, или как работа, совершаемая силами поля при ее уничтожении. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, равна энергии одного заряда в поле, создаваемом другим зарядом [см. (1.23) и (1.25)]:

$$W_1 = q_1 \varphi_{12} = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}, \quad W_2 = q_2 \varphi_{21} = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r},$$

поэтому $W_1 = W_2 = W$ и

$$W = q_1\varphi_{12} = q_2\varphi_{21} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}). \quad (2.29)$$

Энергия взаимодействия системы n неподвижных точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (2.30)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в той точке, где находится заряд q_i , кроме i -го.

2. Энергия заряженного уединенного проводника. Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому все заряды на проводнике находятся при одинаковом потенциале, равном потенциалу φ проводника. Из формулы (2.30) имеем

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n q_i = \frac{q\varphi}{2},$$

где $q = \sum q_i$ – заряд проводника.

Учитывая соотношение (2.16), выражение для энергии W можно написать

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.31)$$

[Выражение (2.31) получается и прямым расчетом работы электрического поля при постепенном удалении всего заряда на бесконечность:

$$W = \int \varphi(q) dq = C \int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2.$$

Например, энергия удаленной проводящей сферы равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды вокруг сферы].

3. Энергия заряженного конденсатора. Электростатическая энергия, запасенная в конденсаторе, согласно выражению (2.31) равна

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad (2.32)$$

где q – заряд конденсатора; C – его емкость; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Поле конденсатора можно уничтожить, перенося заряд малыми порциями с одной обкладки на другую:

$$W = \int U(q) dq = C \int_0^U U dU = \frac{1}{2} CU^2.$$

Например, *энергия электростатического поля* плоского конденсатора равна

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon SU^2}{2d}, \quad (2.33)$$

где S – площадь обкладки конденсатора; U – разность потенциалов между обкладками; $V = Sd$ – объем конденсатора. [Формула (2.33) связывает энергию W конденсатора с основной характеристикой электростатического поля – напряженностью \vec{E}].

Используя выражение (2.32), можно найти *механическую (пондеромоторную) силу*, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга:

$$|F| = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}, \quad (2.34)$$

где q – заряд конденсатора; σ – поверхностная плотность заряда; S – площадь пластин конденсатора; E – напряженность электростатического поля; ε_0 – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость.

Если поле *однородно* (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью w , равной энергии W поля, деленной на занимаемый полем объем V . Из формулы (2.33) следует, что *объемная плотность* энергии электростатического поля (*энергия единицы объема*)

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}, \quad (2.35)$$

где D – электрическое смещение.

[Выражение (2.35) справедливо только для *изотропного диэлектрика* (в изотропном диэлектрике направления \vec{E} и \vec{D} совпадают), для которого выполняется соотношение (2.2): $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$].

Примеры решения задач

2.1. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,8 кВ, зажата стеклянная пластинка ($\varepsilon = 7$) толщиной 3 мм. Найдите поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Дано: $U = 1,8 \cdot 10^3$ В; $\varepsilon = 7$; $d = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти: σ' .

Решение. Векторы \vec{D} , \vec{E} и \vec{P} связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1)$$

где \vec{D} и \vec{E} – соответственно векторы электрического смещения и напряженности плоского конденсатора; \vec{P} – вектор поляризованности диэлектрика. Так как векторы \vec{D} и \vec{E} нормальны к поверхности диэлектрика, то $D_n = D$ и $E_n = E$. Тогда можем записать [см. формулу (1)]

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad (2)$$

где $P = \sigma'$, т. е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $P_n = P$). Таким образом,

$$\sigma' = D - \varepsilon_0 E. \quad (3)$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ и $E = U/d$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{U}{d}. \quad (4)$$

Ответ: $\sigma' = 31,86$ мкКл/м².

2.2. При некоторых условиях поляризованность бесконечной незаряженной пластины из диэлектрика имеет вид: $\vec{P} = \vec{P}_0 (1 - x^2/d^2)$, где \vec{P}_0 – вектор перпендикулярный к пластине; x – расстояние от середины пластины; d – ее полутолщина. Найдите напряженность \vec{E} электрического поля внутри пластины и разность потенциалов U между ее поверхностями.

Дано: $\vec{P} = \vec{P}_0 (1 - x^2/d^2)$.

Найти: \vec{E} ; U .

Решение. Поскольку пластина не заряжена, электрическая индукция \vec{D} в ней равна нулю ($\vec{D} = 0$). Поэтому

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \vec{P}_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) \quad (1)$$

[учли формулу $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$].

Разность потенциалов U найдем при помощи интегрирования:

$$U = \int_{-d}^d E dx, \quad (2)$$

откуда

$$U = \frac{4P_0 d}{3\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Ответ: $\vec{E} = -\vec{P}_0(1 - x^2/d^2)/\varepsilon_0$; $U = 4P_0 d/3\varepsilon_0$.

2.3. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 0,7 кВ, зажата текстолитовая пластинка ($\varepsilon = 7,5$). Площадь обкладок 15 см², напряженность поля в зазоре между ними 0,25 МВ/м. Найдите поверхностную плотность σ заряда на обкладках, емкость C , энергию W и объемную плотность w энергии поля конденсатора.

Дано: $\varepsilon = 7,5$; $U = 700$ В; $S = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м²; $E = 2,5 \cdot 10^5$ В/м; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти: σ ; C ; W ; w .

Решение. Напряженность E поля в зазоре между обкладками конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (1)$$

откуда

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E. \quad (2)$$

Разность потенциалов U между обкладками конденсатора

$$U = Ed, \quad (3)$$

откуда

$$d = \frac{U}{E}. \quad (4)$$

Емкость C плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon SE}{U}. \quad (5)$$

Энергия W заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (6)$$

Объемная плотность w энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = \frac{WE}{SU}. \quad (7)$$

Ответ: $\sigma = 16,6$ мкКл/м²; $C = 35,56$ пФ; $W = 8,71$ мкДж; $w = 2,07$ Дж/м³.

2.4. Расстояние между обкладками плоского конденсатора 3 мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов 1,8 кВ между обкладками вставили стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$). Найдите: 1) диэлектрическую восприимчивость

ϵ стекла; 2) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на стеклянной пластинке.

Дано: $d = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $U = 1,8 \cdot 10^3$ В; $\epsilon = 7$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти: ϵ ; σ' .

Решение. Связь диэлектрической проницаемости ϵ и диэлектрической восприимчивости ϵ

$$\epsilon = 1 + \epsilon, \quad (1)$$

откуда искомая диэлектрическая восприимчивость стекла

$$\epsilon = \epsilon - 1. \quad (2)$$

Напряженность поля внутри конденсатора после его зарядки

$$E_0 = \frac{U}{d}, \quad (3)$$

а после того как в конденсатор вставили диэлектрик,

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{U}{\epsilon d} \quad (4)$$

[учли формулу (3)].

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности:

$$\sigma' = P. \quad (5)$$

Связь между поляризованностью P диэлектрика и напряженностью E электрического поля

$$P = \epsilon \epsilon_0 E. \quad (6)$$

Тогда искомая поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P = \epsilon \epsilon_0 E = \frac{\epsilon \epsilon_0 U}{\epsilon d}. \quad (7)$$

Ответ: $\epsilon = 6$; $\sigma' = 4,55$ мкКл/м².

2.5. Конденсатор емкости C_1 , заряженный до разности потенциалов U , подключили к концам системы из двух последовательно соединенных незаряженных конденсаторов, емкости которых C_2 и C_3 . Найдите, какой заряд протечет при этом по соединительным проводам?

Дано: C_1 ; U .

Найти: Δq .

Решение. Вначале заряд первого конденсатора был равен $q = C_1 U$. После подключения этот заряд перераспределился между конденсаторами таким образом, чтобы напряжения на первом конденсаторе и подключенной батарее были бы одинаковыми. Имеем:

$$q_1 + q_2 = q, \quad (1)$$

или

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2(C_2 + C_3)}{C_2 C_3}, \quad (2)$$

где q_1 – заряд на первом конденсаторе после подключения; q_2 – заряд на подключенной батарее.

Решая уравнения (1) и (2), найдем q_1 и протекающий заряд $\Delta q = q - q_1$:

$$\Delta q = \frac{U}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}. \quad (3)$$

Ответ: $\Delta q = U/(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)$.

2.6. Сферическую оболочку радиуса R_1 , равномерно заряженную зарядом q , расширили до радиуса R_2 . Найдите работу, совершенную при этом электрическими силами.

Дано: R_1 ; q ; R_2 .

Найти: A .

Решение. При расширении оболочки внутри сферического слоя с радиусами R_1 и R_2 исчезает электрическое поле

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

Очевидно, работа электрических сил равна энергии, исчезнувшей в этом слое:

$$A = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} E^2(r) 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Ответ: $A = (q^2/8\pi\epsilon_0)(1/R_1 - 1/R_2)$.

2.7. Пространство между обкладками плоского конденсатора площадью обкладок $S = 80 \text{ см}^2$ заполнено фарфором ($\epsilon = 4$). Найдите поверхностную плотность σ' связанных зарядов на фарфоре, если обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 8 \text{ мН}$.

Дано: $S = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$; $\epsilon = 4$; $F = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$.

Найти: σ' .

Решение. Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности P : $\sigma' = P$. Поляризованность диэлектрика P и напряженность E электрического поля связаны соотношением

$$P = \epsilon\epsilon_0 E, \quad (1)$$

где ϵ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика; $\epsilon = \epsilon - 1$ (ϵ – диэлектрическая проницаемость). Учитывая формулу (1), получим

$$\sigma' = P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \quad (2)$$

Напряженность электрического поля

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (3)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора.

Сила притяжения между обкладками конденсатора:

$$|F| = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} \quad (4)$$

[учли формулу $q = \sigma S$ – заряд на обкладках конденсатора], откуда

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon|F|}{S}}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получим

$$E = \sqrt{\frac{2|F|}{\varepsilon_0\varepsilon S}}. \quad (6)$$

Подставив выражение (6) в формулу (2), найдем искомую плотность связанных зарядов на фарфоре:

$$\sigma' = (\varepsilon - 1) \sqrt{\frac{2\varepsilon_0|F|}{\varepsilon S}}. \quad (7)$$

Ответ: $\sigma' = 6,31 \text{ мкКл/м}^2$.

Задачи

13. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится стеклянная пластинка ($\varepsilon = 7$), заряжен до разности потенциалов $U = 400 \text{ В}$. Напряженность поля в нем $E = 7 \text{ МВ/м}$. Площадь пластин $S = 8 \text{ см}^2$. Найдите емкость C конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на обкладках.

Ответ: $0,867 \text{ нФ}$; $433,65 \text{ мкКл/м}^2$

14. Как нужно соединить конденсаторы, емкости которых $C_1 = 4 \text{ мкФ}$, $C_2 = 6 \text{ мкФ}$ и $C_3 = 10 \text{ мкФ}$, чтобы получить батарею конденсаторов с емкостью $C = 5 \text{ мкФ}$?

Ответ: соединенные параллельно конденсаторы 1 и 2 соединить последовательно с конденсатором 3.

15. Конденсатор емкостью $C_1 = 0,25 \text{ мкФ}$ заряжен до напряжения 120 В . После того, как параллельно с ним соединили другой конденсатор, заряженный до напряжения 50 В , напряжение стало равным $U = 75 \text{ В}$. Найдите емкость C_2 второго конденсатора.

Ответ: $0,45 \text{ мкФ}$

16. Имеются два конденсатора с круглыми пластинами, первый из них – воздушный, а второй – заполнен диэлектриком. Радиус первого конденсатора в 3 раза больше, чем у второго ($R_1 = 3R_2$), а расстояние между пластинами у второго в 3 раза меньше, чем у первого ($d_2 = d_1/3$). Найдите диэлектрическую проницаемость ε этого диэлектрика, если емкости конденсаторов одинаковы.

Ответ: 3

17. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится парафиновый диэлектрик ($\varepsilon = 2,3$), заряжен до разности потенциалов $U = 500$ В. Площадь пластин $S = 10$ см², напряженность поля в зазоре между ними $E = 0,4$ МВ/м. Найдите поверхностную плотность σ заряда на пластинах, емкость C и энергию конденсатора W .

Ответ: 8,14 мкКл/м²; 16,28 пФ; 2,04 мкДж

18. В некоторой точке изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε электрическое смещение имеет значение \vec{D} . Найдите поляризованность \vec{P} в этой точке.

Ответ: $\vec{P} = (1 - 1/\varepsilon)\vec{D}$

19. Пластину из диэлектрика ($\varepsilon = 5$) поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 5 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям индукции поля. Найдите поверхностную плотность σ' связанных зарядов на пластине.

Ответ: 354 нКл/м²

20. Найдите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика, если величина поляризованности в диэлектрике составляет $P = 35,4$ нКл/м², а напряженность электрического поля в нем равна $E = 1,5$ кВ/м.

Ответ: 3

21. Найдите диэлектрическую восприимчивость ε диэлектрика, если величина поляризованности в диэлектрике в 1,4 раза меньше величины модуля электрического смещения ($D = 1,4P$).

Ответ: 2,5

22. Найдите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика, если известно, что модуль электрического смещения D в диэлектрике в 2 раза больше модуля поляризованности P .

Ответ: 2

Лекция 3. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.1. Электрический ток и его основные характеристики

Электрическим током называется упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. **Конвекционным током** называют движение зарядов, связанное с перемещением в пространстве заряженного тела. **Ток проводимости** в веществе осуществляется свободными зарядами (носителями тока) – электронами в металлах, электронами и дырками в полупроводниках, ионами в электролитах. Ток возникает при условии, что внутри тела существует электрическое поле (\vec{E}). За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

Количественной характеристикой электрического тока служит **сила тока** I – скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Если ток создается носителями обоих знаков, причем за время dt через данную поверхность положительные носители переносят заряд dq^+ в одном направлении, а отрицательные – заряд dq^- в противоположном, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}. \quad (3.2)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется **постоянным**. Для постоянного тока справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t}, \quad (3.3)$$

где q – электрический заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника. Единица силы тока I – *ампер* [А].

Более детально ток можно охарактеризовать с помощью **вектора плотности тока** \vec{j} . Плотность тока j – физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (3.4)$$

Единица плотности тока j – ампер на метр в квадрате [А/м²].

Если концентрация носителей тока равна n и каждый носитель имеет элементарный заряд e , то за время dt через поперечное сечение S проводника переносится заряд $dq = ne\langle v \rangle S dt$, где $\langle v \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов. Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = ne\langle v \rangle S. \quad (3.5)$$

Плотность тока – вектор, направление которого совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов:

$$\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle. \quad (3.6)$$

Зная вектор плотности тока \vec{j} в каждой точке пространства, можно найти силу тока I через любую поверхность S :

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (3.7)$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$ [\vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS , составляющей с вектором \vec{j} угол α].

Из (3.7) следует, что сила тока есть поток вектора плотности тока через поверхность.

3.2. Электродвижущая сила и напряжение

Для поддержания постоянного тока в проводнике необходим поток энергии от внешнего источника, способного поддерживать постоянную разность потенциалов на концах проводника и, следовательно, стационарное электрическое поле. Такое поле в проводнике не может быть обеспечено электростатическими

силами, поскольку эти силы перемещают положительные заряды по проводнику в сторону убывания потенциала, а отрицательные – в обратном направлении, что ведет в конечном счете к выравниванию потенциала вдоль проводника, исчезновению электрического поля и тока. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил *неэлектростатического происхождения*, направленных против кулоновских сил. Подобные силы называются **сторонними силами**, а устройства, обеспечивающие стационарное электрическое поле в проводнике, – **источниками тока**.

Природа сторонних сил в различных источниках тока может быть разной – это химические реакции в гальванических элементах и аккумуляторах, индукционные явления в генераторах, тепловые процессы в термоэлементах и др.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда q_0 , называется **электродвижущей силой** (ЭДС) \mathcal{E} источника тока

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q_0}. \quad (3.8)$$

Из сопоставления формул (3.8) и (1.28) вытекает, что единицей ЭДС \mathcal{E} является также *вольт* – [В].

[Стороннюю силу $\vec{F}_{\text{ст}}$, действующую на заряд q_0 , можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{ст}} = q_0 \vec{E}_{\text{ст}},$$

где $\vec{E}_{\text{ст}}$ – напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил над зарядом q_0 на замкнутом участке цепи

$$A = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q_0 \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (3.9)$$

Разделив эту работу на q_0 , получим выражение для ЭДС, действующей в замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}, \quad (3.10)$$

т. е. ЭДС может быть определена как циркуляция $\vec{E}_{\text{ст}}$.

ЭДС, действующая на участке $1 - 2$, равна

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (3.11)$$

На заряд q_0 , помимо сторонних сил, действуют также силы электростатического поля $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$. Таким образом, результирующая сила, действующая в цепи на заряд q_0 , равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_e = q_0 (\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}). \quad (3.12)$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом q_0 на участке $1 - 2$, равна

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (3.13)$$

Используя выражения (3.11) и (1.30), получим

$$A_{12} = q_0 \mathcal{E}_{12} + q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.14)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, поэтому в данном случае $A_{12} = q_0 \mathcal{E}_{12}$.

Напряжение или (*падение напряжения*) U на участке $1-2$ – физическая величина, равная работе, совершаемой электростатическими (кулоновскими) и сторонними силами [*результирующей силой* A_{12} (см. формулу (3.14))] при перемещении единичного положительного заряда q_0 на данном участке цепи:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_0}. \quad (3.15)$$

В соответствии с формулой (3.14), получим

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (3.16)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Участок, на котором на заряды действуют сторонние силы, называется **неоднородным**. Для однородного участка цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.17)$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка.

3.3. Закон Ома. Сопротивление проводников

Немецкий физик Георг Ом экспериментально установил закон (1826 г.), согласно которому *сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению U на концах проводника:*

$$I = \frac{U}{R}, \quad (3.18)$$

где R – электрическое сопротивление проводника. В случае однородного проводника напряжение U совпадает с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ [см. формулу (3.17)].

Формула (3.18) представляет *закон Ома для однородного участка цепи*. Единица сопротивления R – *ом* [Ом]; 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В сила постоянного тока равна 1 А.

Величина

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.19)$$

называется *электрической проводимостью* проводника. Единица проводимости G – *сименс* [См]; 1 См – проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Величина сопротивления R зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.20)$$

где l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения; ρ – коэффициент пропорциональности, характеризующий материал проводника, называемый *удельным электрическим сопротивлением* (или *удельным сопротивлением*).

Единица удельного сопротивления ρ – *ом-метр* [Ом · м].

Величина, обратная удельному сопротивлению,

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (3.21)$$

называется **удельной электрической проводимостью** материала проводника.

Единица удельной проводимостью σ – *сименс на метр* [См/м].

Подставив выражение (3.20) в формулу (3.18), получим

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}. \quad (3.22)$$

Учитывая, что $U/l = E$ – напряженность электрического поля в проводнике, $I/S = j$ – плотность тока, формулу (3.22) можно записать в виде

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E. \quad (3.23)$$

Воспользовавшись тем, что в изотропном проводнике векторы \vec{j} и \vec{E} имеют одинаковое направление [*в изотропном проводнике упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении \vec{E}*], формулу (3.23) можно записать

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (3.24)$$

Формула (3.24) выражает **закон Ома в дифференциальной форме**. Соотношение (3.24) справедливо и для *переменных полей*.

Опытным путем было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления ρ , а значит и сопротивления R , с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t), \quad (3.25)$$

где ρ и ρ_0 , R и R_0 – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при t и 0 °С; α – **температурный коэффициент сопротивления**, для чистых металлов (при не очень низкой температуре) близкий к $1/273$ К⁻¹.

Температурная зависимость удельного сопротивления ρ и сопротивления R может быть представлена в виде

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad R = R_0 \alpha T, \quad (3.26)$$

где T – термодинамическая температура.

При очень низких температурах наблюдается отступление от закономерности (3.26). У большой группы металлов и сплавов при температурах T_K , назы-

ваемых *критическими*, порядка нескольких кельвинов (0,14 – 20 К) сопротивление скачком обращается в нуль, т. е. металл становится абсолютным проводником (рис. 22). Впервые это явление, названное *сверхпроводимостью*, было обнаружено в 1911 г. Х. Камерлинг-Оннесом при охлаждении ртути ниже 4,2 К.

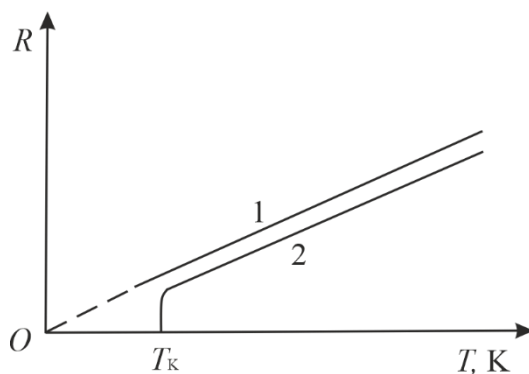


Рис. 22

[В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца (Pb), олова (Sn), цинка (Zn), алюминия (Al) и других металлов, а также у ряда сплавов (известны несколько сотен соединений, чистых элементов, сплавов и керамик). Теоретическое объяснение сверхпроводимости на основе квантовой теории было дано акад. Н.Н. Боголюбовым и независимо от него Дж. Бардином, Л. Купером и Дж. Шриффером (1957 г.).

Зависимость электрического сопротивления от температуры положена в основу *термометров сопротивления* [например, металлическая проволока (обычно платиновая), намотанная на фарфоровый или слюдяной каркас], которые позволяют по градуированной взаимосвязи сопротивления от температуры измерять температуру с точностью до 0,001 К, как низкие, так и высокие температуры. В настоящее время все большее применение находят термометры сопротивления из полупроводников, называемые *термисторами*, которые позволяют измерять температуру с точностью до миллионных долей кельвин].

3.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

При прохождении электрического тока по произвольному участку цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение U , силы электростатического поля и сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов [см. (1.27)]:

$$dA = Udq = IUdt, \quad (3.27)$$

где $dq = Idt$ – заряд переносимый через сечение проводника за время dt ; I – сила тока в проводнике.

Используя закон Ома (3.18), получим

$$dA = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt, \quad (3.28)$$

где R – сопротивление проводника.

Из (3.27) и (3.28) следует, что мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (3.29)$$

В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не совершается, работа тока (3.27) затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, т. е. на нагревание проводника. По закону сохранения энергии

$$dA = dQ. \quad (3.30)$$

Используя выражения (3.30), (3.27) и (3.28), получим

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (3.31)$$

Соотношение (3.31) было установлено экспериментально Дж. Джоулем и независимо от него Э.Х. Ленцем и носит название *закона Джоуля – Ленца*.

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты Q , выделяющееся за время t , вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (3.32)$$

Выделим в проводнике элементарный объем в виде цилиндра $dV = dS dl$ (ось цилиндра совпадает с направлением тока), сопротивление которого $R = \rho dl/dS$ (рис. 23).

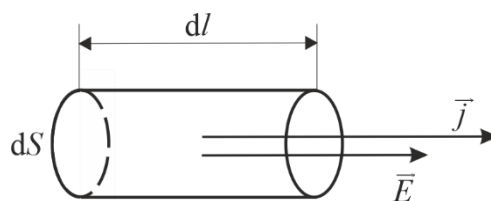


Рис. 23

Согласно закону Джоуля – Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \frac{\rho dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt. \quad (3.33)$$

Разделив выражение (3.33) на $dV dt$, найдем **удельную тепловую мощность** – количество теплоты, выделяющееся в единице объема в единицу времени:

$$w = \rho j^2. \quad (3.34)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома [см. (3.23)], получим

$$w = jE = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho}. \quad (3.35)$$

Формулы (3.34) и (3.35) представляют собой **закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**, пригодный для любого проводника.

3.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Если на участке цепи содержится источник ЭДС, то такой участок цепи называется **неоднородным участком** (рис. 24). На неоднородном участке цепи действуют как электростатические, так и сторонние силы.

Дифференциальный закон Ома (3.24) принимает вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}}), \quad (3.36)$$

а закон Ома для участка цепи записывается так:

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l} \Rightarrow IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12} \quad (3.37)$$

[выражение $\rho dl/S$ представляет собой сопротивление участка контура dl , а интеграл от этого выражения – сопротивление R участка цепи; первый интеграл в правой части дает $\varphi_1 - \varphi_2$, а второй интеграл – ЭДС \mathcal{E}_{12} , действующая на участке].

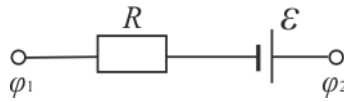


Рис. 24

Запишем (3.37) в виде

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}, \quad (3.38)$$

где \mathcal{E}_{12} – действующая на участке $1 - 2$ ЭДС; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов, приложенная на концах участка цепи.

Формула (3.37) или (3.38) представляет собой **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме**, который является **обобщенным законом Ома**.

[На участке цепи выбирается определенное направление (в данном случае $1 - 2$). Если ток течет в выбранном направлении, то он положителен. ЭДС также положительна ($\mathcal{E}_{12} > 0$), если направление действия сторонних сил (*внутри источника от «минуса» к «плюсу»*) совпадает с выбранным направлением. Если направление сторонних сил противоположно, то $\mathcal{E}_{12} < 0$].

Если на данном участке цепи *источник тока отсутствует* ($\mathcal{E}_{12} = 0$), то из (3.38) приходим к **закону Ома для однородного участка цепи** (3.18)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Положив $\varphi_1 = \varphi_2$ [электрическая цепь замкнута, выбранные точки 1 и 2 совпадают], получаем выражение **закона Ома для замкнутой цепи**:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (3.39)$$

где \mathcal{E} – ЭДС, действующая в цепи; R – суммарное сопротивление всей цепи.

3.6. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Густавом Кирхгофом (1847 г.). **Узлом** в цепи называется точка соединения трех и более проводников (рис.25). Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, – отрицательным.

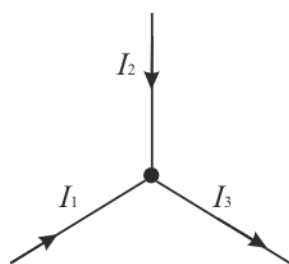


Рис.25

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (3.40)$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения электрического заряда. [Для рис. 25 первое правило Кирхгофа запишется так: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$].

Второе правило Кирхгофа относится к любому замкнутому контуру (рис. 26), выделенному в сложной цепи и является обобщением закона Ома для разветвленных цепей. Направление обхода по часовой стрелке примем за положительное (выбор этого направления совершенно произволен) и напишем к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома [см. (3.37)]:

$$I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1, \quad -I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \mathcal{E}_2, \quad I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \mathcal{E}_3.$$

Складывая почленно эти уравнения и сокращая все потенциалы, получим

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

или

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (3.41)$$

Равенство (3.41) выражает **второе правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма произведений сил токов I_i в отдельных участках замкнутого контура на их сопротивления R_i равна алгебраической сумме ЭДС \mathcal{E}_k , действующих в этом контуре.

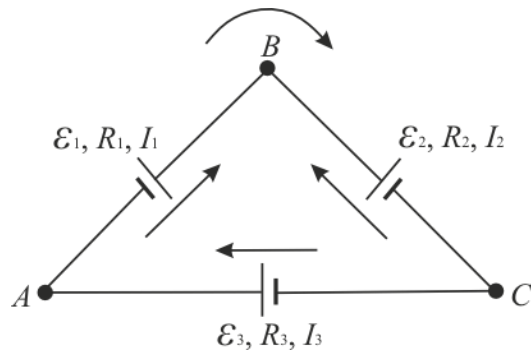


Рис. 26

При расчете цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа следует придерживаться следующего порядка:

1. Произвольно указать на схеме направления токов на всех участках цепи.
2. Сначала следует составить уравнения для узлов. Если в цепи содержится n узлов, то следует составить уравнения для $n - 1$ узлов, ибо n -е уравнение не будет линейно-независимым относительно остальных уравнений.

3. Если в задаче необходимо найти m неизвестных, то остальные $m - (n - 1)$ уравнений составить на контуры. Число уравнений должно быть равно числу неизвестных. Для этого выделить контуры и условиться о направлении обхода контура. Токи, текущие в направлении обхода контура считать положительными, против направления обхода – отрицательными. Так же соблюдать ранее сформулированное правило знаков для ЭДС [ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными].

4. Если в цепи можно выделить несколько контуров, то независимые уравнения можно составить только для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных контуров.

Если в результате расчета некоторые токи имеют отрицательный знак, то это значит, что эти токи текут против ранее указанного направления.

[Участки, состоящие из *последовательно соединенных сопротивлений*, можно заменить одним сопротивлением:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k,$$

а на участках с *параллельным соединением сопротивлений* общее сопротивление определяется из условия

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}.$$

При *последовательном соединении* источников тока полная ЭДС, действующая на участке, равна алгебраической сумме ЭДС соединяемых источников. При *параллельном соединении* источников тока с одинаковой ЭДС полная ЭДС равна ЭДС каждого из источников (источники тока с разной ЭДС параллельно не соединяют, так как при таком соединении ток в источниках проходил бы, как следует из правил Кирхгофа, в противоположном направлении)].

Примеры решения задач

3.1. Найдите напряжение на концах фехралевого ($\rho = 12 \cdot 10^{-7}$ Ом · м) проводника длиной 12 м, если плотность тока в проводнике $j = 15$ МА/м².

Дано: $\rho = 1,2 \cdot 10^{-6}$ Ом · м; $l = 12$ м; $j = 15$ МА/м² = $1,5 \cdot 10^7$ А/м².

Найти: U .

Решение. Согласно закону Ома в дифференциальной форме, плотность тока j в проводнике пропорциональна напряженности E электрического поля внутри однородного проводника:

$$j = \sigma E, \quad (1)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электрическая проводимость проводника; $E = U/l$ – напряженность электрического поля.

Тогда

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho l}, \quad (2)$$

откуда

$$U = j\rho l. \quad (3)$$

Ответ: $U = 216$ В.

3.2. Напряжение на концах хромалевого ($\rho = 13,5 \cdot 10^{-7}$ Ом · м) проводника длиной 20 м и диаметром 2 мм за время 2 с равномерно возрастает от 0 до 36 В. Найдите заряд q , прошедший по проводнику за это время.

Дано: $\rho = 13,5 \cdot 10^{-7}$ Ом · м; $l = 20$ м; $d = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $U_1 = 0$; $U_2 = 36$ В; $\tau = 2$ с.

Найти: q .

Решение. Заряд dq , проходящий через сечение проводника за время dt ,

$$dq = Idt, \quad (1)$$

где $I = U(t)/R$ – сила тока в проводнике; $R = \rho l/S$ – сопротивление проводника; ρ , l и S – соответственно удельное сопротивление, длина и площадь поперечного сечения проводника; $U(t)$ – напряжение на концах проводника.

По условию задачи напряжение U растет равномерно, т.е. $U(t) = kt$, где коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\Delta U}{\tau} = \frac{U_2 - U_1}{\tau} = \text{const}, \quad \left[k = \frac{(36 - 0)\text{В}}{2 \text{ с}} = 18 \text{ В/с} \right].$$

Тогда можно записать

$$dq = \frac{kt}{R} dt = \frac{kSt}{\rho l} dt. \quad (2)$$

Проинтегрировав выражение (2), найдем искомый заряд, прошедший по проводнику:

$$q = \int_0^{\tau} dq = \int_0^{\tau} \frac{kSt}{\rho l} dt = \frac{kS\tau^2}{2\rho l} = \frac{k\pi d^2 \tau^2}{8\rho l}. \quad (3)$$

Ответ: $q = 4,19$ Кл.

3.3. Количество теплоты, выделившееся в проводнике сопротивлением 36 Ом за время 20 с, равно 960 Дж (сила тока возрастает при этом линейно). Найдите заряд q , прошедший за это время по проводнику, если в начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

Дано: $R = 36$ Ом; $\tau = 20$ с; $Q = 960$ Дж; $I_0 = 0$.

Найти: q .

Решение. По закону Джоуля – Ленца для бесконечно малого промежутка времени dt :

$$dQ = I^2 R dt. \quad (1)$$

Из условия равномерности возрастания тока следует, что $I = kt$, где k – коэффициент пропорциональности.

Учитывая, что $I = dq/dt$, можно записать:

$$dq = I dt = kt dt. \quad (2)$$

Проинтегрировав выражение (2), найдем заряд, прошедший по проводнику

$$q = \int_0^{\tau} kt dt = \frac{k\tau^2}{2}. \quad (3)$$

Количество теплоты Q , выделившееся в проводнике за время τ ,

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = \int_0^{\tau} k^2 t^2 R dt = \frac{1}{3} k^2 R \tau^3, \quad (4)$$

откуда найдем коэффициент пропорциональности k :

$$k = \sqrt{\frac{3Q}{R\tau^3}}. \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в формулу (3), получим искомый заряд, прошедший по проводнику,

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3Q\tau}{R}}. \quad (6)$$

Ответ: $q = 20$ Кл.

3.4. Найдите внутреннее сопротивление r аккумуляторной батареи, если известно, что при подключении к ней попеременно резисторов сопротивлением 1,5 Ом и 6 Ом, в обоих случаях за одно и то же время t на резисторах выделяется одинаковое количество теплоты Q .

Дано: $R_1 = 1,5$ Ом; $R_2 = 6$ Ом.

Найти: r .

Решение. По закону Джоуля – Ленца за время t в резисторе сопротивлением R выделяется количество теплоты

$$Q = I^2 R t. \quad (1)$$

Согласно закону Ома, для замкнутой (полной) цепи, сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (2)$$

где \mathcal{E} и r – соответственно ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2 R t}{(R + r)^2}. \quad (3)$$

Таким образом, для сопротивлений R_1 и R_2 имеем:

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2} \text{ и } Q_2 = \frac{\mathcal{E}^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2}.$$

Согласно условию задачи, $Q_1 = Q_2$, т. е., приравняв последние выражения, получаем:

$$\frac{\mathcal{E}^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2} \text{ или } \frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2},$$

откуда искомое внутреннее сопротивление

$$r = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (4)$$

Ответ: $r = 3$ Ом.

3.5. Найдите напряженность поля E , плотность тока j и силу тока I в алюминиевом ($\rho = 2,6 \cdot 10^{-8}$ Ом \cdot м) проводнике сечением $3,14$ мм² и длиной 4 м, если за время $0,25$ мин в проводнике под током выделяется 20 Дж теплоты.

Дано: $\rho = 2,6 \cdot 10^{-8}$ Ом \cdot м; $S = 3,14 \cdot 10^{-6}$ м²; $t = 15$ с; $l = 4$ м; $Q = 20$ Дж.

Найти: E, j, I .

Решение. Согласно закону Джоуля – Ленца, количество теплоты, выделившееся в проводнике,

$$Q = I^2 R t, \quad (1)$$

где сопротивление проводника R равно:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2)$$

Силу тока I находим с учетом записанных уравнений (1) и (2):

$$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \sqrt{\frac{QS}{\rho l t}}. \quad (3)$$

По определению плотность тока j в проводнике

$$j = \frac{I}{S}. \quad (4)$$

Напряженность поля в проводнике определим из закона Ома в дифференциальной форме:

$$j = \frac{1}{\rho} E, \quad (5)$$

откуда

$$E = j \rho. \quad (6)$$

Ответ: $E = 5,25 \cdot 10^{-2}$ В/м; $j = 2,02 \cdot 10^6$ А/м²; $I = 6,35$ А.

3.6. ЭДС аккумулятора 24 В. При силе тока 4 А его коэффициент полезного действия равен $0,8$. Определите внутренне сопротивление r аккумулятора.

Дано: $\mathcal{E} = 24$ В; $I = 4$ А; $\eta = 0,8$.

Найти: r .

Решение. Коэффициент полезного действия аккумулятора

$$\eta = \frac{R}{R + r}, \quad (1)$$

откуда

$$R = \frac{\eta r}{1 - \eta}. \quad (2)$$

Из закона Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (3)$$

выразим ЭДС аккумулятора:

$$\mathcal{E} = I(R + r) = I\left(\frac{\eta r}{1 - \eta} + r\right) = \frac{Ir}{1 - \eta}, \quad (4)$$

откуда искомого внутреннее сопротивление

$$r = \frac{\mathcal{E}(1 - \eta)}{I}. \quad (5)$$

Ответ: $r = 1,2 \text{ Ом}$.

Задачи

23. Найдите плотность тока в фехрелевом ($\rho = 12 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$) проводнике длиной 2 м, если на концах его поддерживается разность потенциалов 120 В.

Ответ: $0,5 \text{ МА/м}^2$

24. Напряжение на концах никелинового ($\rho = 0,42 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$) проводника длиной 30 м и диаметром 2 мм за 3 с равномерно возрастает от 0 до 18 В. Найдите заряд q , прошедший по проводнику за это время.

Ответ: $6,75 \text{ Кл}$

25. Источник тока замкнут на сопротивление 11 Ом, и в цепи течет ток 2 А. Если этот же источник замкнуть на сопротивление 5 Ом, то сила тока в цепи будет 4 А. Найдите ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r этого источника тока.

Ответ: 24 В и 1 Ом

26. Четыре одинаковых источника тока с ЭДС по $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ и внутренними сопротивлениями по $r = 1 \text{ Ом}$ соединены *параллельно* и замкнуты на внешнее сопротивление, по которому течет ток $I = 2 \text{ А}$. Найдите величину этого внешнего сопротивления R .

Ответ: $5,75 \text{ Ом}$

27. Четыре одинаковых источника тока с ЭДС по $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ и внутренними сопротивлениями по $r = 1 \text{ Ом}$ соединены *последовательно* и замкнуты на внешнее сопротивление, по которому течет ток $I = 2 \text{ А}$. Найдите величину этого внешнего сопротивления R .

Ответ: 20 Ом

28. Найдите, во сколько раз быстрее нагреет воду до кипения нагреватель, состоящий из двух *последовательно* соединенных спиралей, чем нагреватель, состоящий из двух таких же спиралей, но соединенных *параллельно*.

Ответ: 4

29. Найдите удельную тепловую мощность w в фехрелевом проводнике ($\rho = 12 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$) длины $l = 1 \text{ м}$, если на его концах поддерживается разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 120 \text{ В}$.

Ответ: $1,2 \cdot 10^{10} \text{ Дж/м}^3 \cdot \text{с}$

30. Количество теплоты, выделившееся в проводнике сопротивлением 18 Ом за время 6 с, равно 900 Дж (сила тока возрастает при этом линейно). Найдите заряд q , прошедший за это время по проводнику, если в начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

Ответ: 15 Кл

31. При силе тока $I = 3$ А КПД аккумулятора, с внутренним сопротивлением $r = 0,8$ Ом, равен $\eta = 80$ %. Найдите ЭДС \mathcal{E} аккумулятора. Ответ: 12 В

32. Найдите ЭДС \mathcal{E} аккумуляторной батареи, ток короткого замыкания в которой 10 А, если при подключении к ней резистора сопротивлением 13,8 Ом сила тока в цепи равна 0,8 А. Ответ: 12 В

33. Батарея состоит из четырех одинаковых аккумуляторов с ЭДС по $\mathcal{E} = 12$ В каждый, соединенных последовательно. Найдите максимальную мощность P_{\max} , которая может выделяться во внешней цепи, подсоединенной к батарее, если ток короткого замыкания батареи равен 12 А. Ответ: 144 Вт

Лекция 4. МАГНИТОСТАТИКА

4.1. Магнитное поле и его характеристики

Магнитное поле – одно из двух составляющих электромагнитного поля. Источниками магнитного поля являются движущиеся заряженные частицы, токи, магнитные моменты и переменные электрические поля. Магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы, токи и магнитные моменты [электрическое поле создается и действует как на неподвижные, так и движущиеся заряды].

Впервые магнитное поле движущихся зарядов было обнаружено в опытах датского физика Г.Х. Эрстеда (1820 г.). Помещая магнитную стрелку, вращающуюся на игле, вблизи проводника с током, Эрстед наблюдал ее отклонение, которое зависело от величины и направления тока в проводнике [изменение направления тока заставляло стрелку повернуться в противоположную сторону]. Из опытов Эрстеда следовало, что в окружающем ток пространстве существует обусловленное этим током силовое поле, получившее название *магнитного*; магнитное поле имеет *направленный характер* и должно характеризоваться векторной величиной, получившей название *магнитной индукции* \vec{B} .

В 1820 г. А.М. Ампер установил **закон взаимодействия токов**, согласно которому *два параллельных проводника, по которым текут токи, притягиваются, если токи в них одинакового направления (рис. 27, а), и отталкиваются, если направления токов противоположны (рис. 27, б).*

Действие магнитного поля на проводник с током зависит не только от величины самого магнитного поля и величины тока, но и от формы проводника и от расположения его в магнитном поле.

Для исследования магнитного поля используется замкнутый *плоский контур с током (рамка с током)*, линейные размеры которого незначительны по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали \vec{n} к контуру.

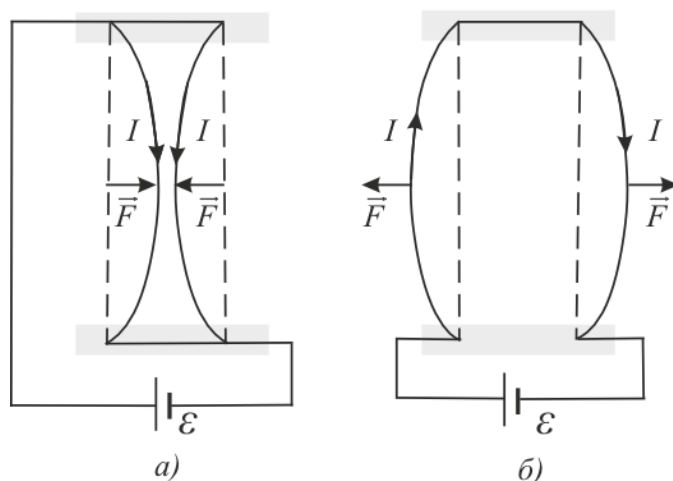


Рис. 27

Направление нормали задается **правилом правого винта** (правого буравчика): за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 28).

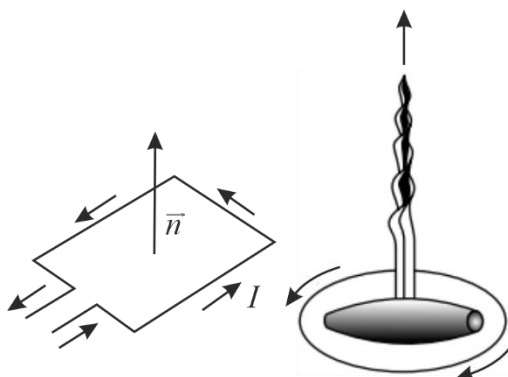


Рис. 28

Вращающий момент сил \vec{M} , действующих на рамку с током I в магнитном поле, пропорционален вектору \vec{B} индукции магнитного поля и определяется по формуле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (4.1)$$

где \vec{p}_m – вектор магнитного момента рамки (контура) с током; \vec{B} – вектор магнитной индукции. $[\vec{M}]$ зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств контура; распределение вектора магнитной индукции \vec{B} изучается, устанавливая рамку в различных точках поля].

Модуль механического момента (вращающего момента сил)

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (4.2)$$

где α – угол между нормалью \vec{n} к плоскости контура и вектором \vec{B} .

Для плоского контура с током I

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (4.3)$$

где S – площадь контура (рамки) с током; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности контура [направление \vec{p}_m совпадает с направлением положительной нормали \vec{n}].

Модуль вектора магнитного момента

$$p_m = IS. \quad (4.4)$$

На пробные контуры, различающиеся значением \vec{p}_m , действуют в данной точке разные по модулю вращающие моменты M , однако отношение M_{\max}/p_m для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля, называемой *магнитной индукцией*:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} \quad (4.5)$$

Магнитная индукция в данной точке *однородного магнитного поля* определяется максимальным вращающим моментом M_{\max} , действующим на рамку с магнитным моментом p_m , равным единице, когда нормаль \vec{n} к рамке перпендикулярна направлению поля ($\vec{n} \perp \vec{B}$). [Следует отметить, что магнитная индукция \vec{B} может быть определена также из закона Ампера и из выражения для силы Лоренца (см. п. 4.3)].

Единица магнитной индукции B – *тесла* [Тл]); 1 Тл – магнитная индукция однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющий магнитный момент $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, действует максимальный вращающий момент, равный $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$:

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Магнитные поля, как и электрические, изображают графически с помощью *силовых линий* (или *линий магнитной индукции*) – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{B} . Их направление задается *правилом правого винта*: *головка винта, ввинчиваемого по направлению*

тока, вращается в направлении линий магнитной индукции (рис. 29). В отличие от силовых линий электростатического поля *магнитные силовые линии всегда замкнуты* – это кривые, охватывающие электрические токи или движущиеся заряды. [Силовые линии электростатического поля разомкнуты: они начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных – такое поле называется *потенциальным*]. **Поле** с замкнутыми линиями индукции называют **вихревым**. Таким образом, *магнитное поле является вихревым* [магнитные силовые линии не имеют ни начала, ни конца, – это значит, что *магнитных зарядов не существует*].

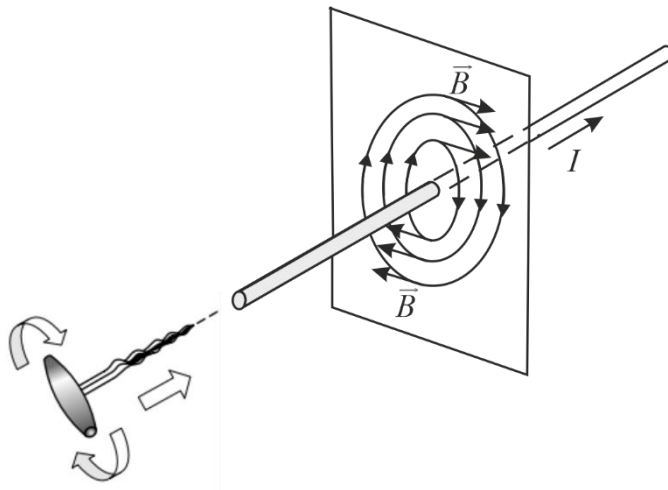


Рис. 29

Для магнитного поля, как и для электрического [см. п. 1.3], справедлив **принцип суперпозиции**: вектор магнитной индукции \vec{B} результирующего поля, порождаемого несколькими движущимися зарядами (токами), равен векторной сумме магнитных индукций \vec{B}_i складываемых полей, порождаемых каждым движущимся зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (4.6)$$

Магнитное поле макротоков характеризует **вектор напряженности \vec{H}** . Для однородной изотропной среды вектор \vec{B} связан с вектором \vec{H} соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (4.7)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная [*генри* – единица индуктивности (см. п. 5.5.2)]; μ – магнитная проницаемость среды [показывает,

во сколько раз магнитное поле макротоков H усиливается за счет поля микро-
токов; μ – безразмерная величина].

Единица напряженности магнитного поля H – *ампер на метр* [А/м]; 1А/м – напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м [следует из формулы (4.7)].

Вектор напряженности \vec{H} магнитного поля является аналогом вектора электрического смещения \vec{D} ; аналогом магнитной индукции \vec{B} для электрического поля является напряженность \vec{E} .

4.2. Закон Био – Савара – Лапласа

Французские ученые Ж.-Б. Био и Ф. Савар изучали магнитное поле постоянных токов, текущих по тонким проводам различной формы. Результаты их опытов проанализировал французский математик и физик П. Лаплас, и установил зависимость, которая получила название *закона Био – Савара – Лапласа*. Согласно этому закону *магнитное поле любого тока, в любой точке пространства в вакууме, может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока:*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (4.8)$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемая элементом длиной $d\vec{l}$ проводника с током I ; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от $d\vec{l}$ к точке А (рис. 30), в которой определяется магнитная индукция; r – модуль радиуса-вектора \vec{r} ($r = |\vec{r}|$).

Модуль выражения (4.8) определяется формулой

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.9)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

Направление вектора $d\vec{B}$, перпендикулярного плоскости, содержащей элемент проводника $d\vec{l}$ и радиус-вектор \vec{r} , и совпадающего с касательной к линии

магнитной индукции в точке A , определяется по **правилу правого винта** (буравчика): направление вращения головки винта дает направление $d\vec{B}$, если поступательное движение винта соответствует направлению тока I в элементе $d\vec{l}$ (см. рис. 30).

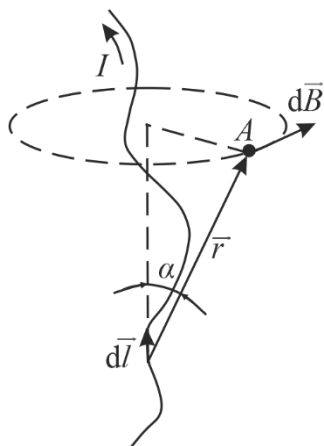


Рис. 30

Согласно закону Био – Савара – Лапласа [см. (4.8)], напряженность поля $d\vec{H}$, создаваемая элементом $d\vec{l}$ проводника с током I в некоторой точке пространства в вакууме на расстоянии r от $d\vec{l}$, равна

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.10)$$

Модуль выражения (4.10) определяется формулой

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.11)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

1. Магнитная индукция поля прямого тока – тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины в вакууме, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}, \quad (4.12)$$

где R – расстояние от оси проводника до рассматриваемой точки поля; I – сила тока в проводнике.

[Все векторы в данной точке A имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (рис. 31), – в нашем случае – «к нам»). Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$

можно заменить сложением их модулей. В качестве постоянной интегрирования выберем угол α (угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от 0 до π).

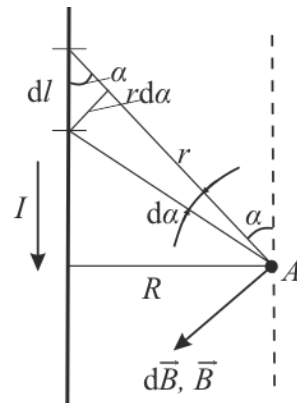


Рис. 31

Из рис. 31 имеем

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставив эти выражения в (4.9), получим, что магнитная индукция, создаваемая одним элементом проводника, равна

$$dB = \frac{\mu_0 IRd\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha. \quad (*)$$

Согласно (4.6) и (*), получим

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока в вакууме

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R}.$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод concentрических окружностей (рис. 32).

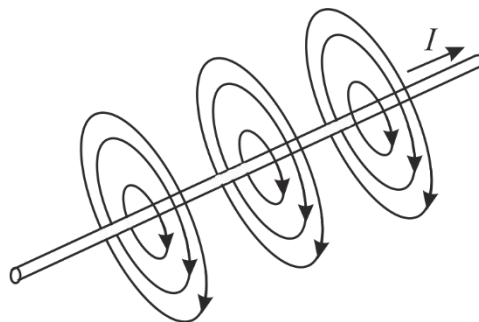


Рис. 32

2. Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

определяется формулой

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}, \quad (4.13)$$

где R – радиус проводника; I – сила тока в проводнике.

[В этом случае (рис. 33) расстояние всех элементов dl проводника до центра круга одинаково и равно радиусу круга R , а $\sin \alpha = 1$.

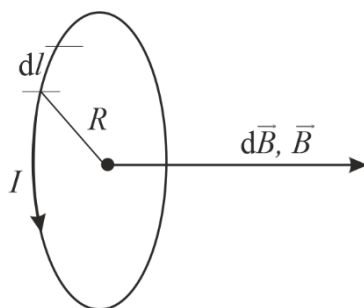


Рис. 33

Согласно формуле (4.9),

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl. \quad (**)$$

Согласно (4.6) и (**), получим

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током в вакууме

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

(учли, что I и R – постоянные величины, а все элементы проводника с током создают поле одинакового направления (перпендикулярное плоскости витка), – сложение векторов $d\vec{B}$ заменили сложением их модулей dB).

4.3. Действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды

1. Закон Ампера. Исследуя влияние магнитного поля на различные проводники с током, А. Ампер установил, что сила $d\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\vec{l}$ с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (4.14)$$

где $d\vec{l}$ – вектор по модулю равный dl и совпадающий по направлению с током; \vec{B} – вектор магнитной индукции.

Выражение (4.14) называют *законом Ампера*, а силу, действующую со стороны магнитного поля на ток, – *силой Ампера (амперовой силой)*.

Модуль силы Ампера [см. (4.14)] вычисляется по формуле

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (4.15)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Сила $d\vec{F}$ направлена перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $d\vec{l}$ и \vec{B} . Ее направление может быть определено по *правилу левой руки*: если расположить левую руку так, чтобы вектор магнитной индукции \vec{B} входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль тока в проводнике, то отогнутый большой палец укажет направление амперовой силы (рис. 34).

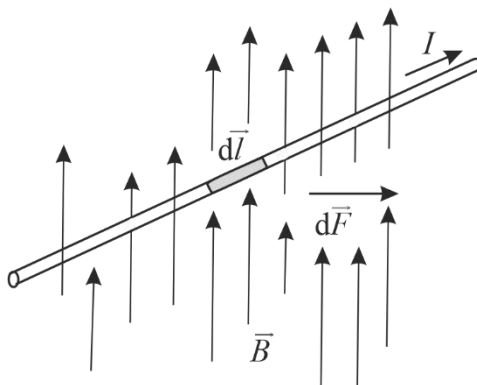


Рис. 34

2. Взаимодействие параллельных токов. Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 в вакууме (рис. 35) вычисляется по формуле

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} dl, \quad (4.16)$$

где b – расстояние между проводниками; dl – отрезок (элемент) проводника.

Проводники с токами одинакового направления притягиваются, с токами противоположного направления – отталкиваются.

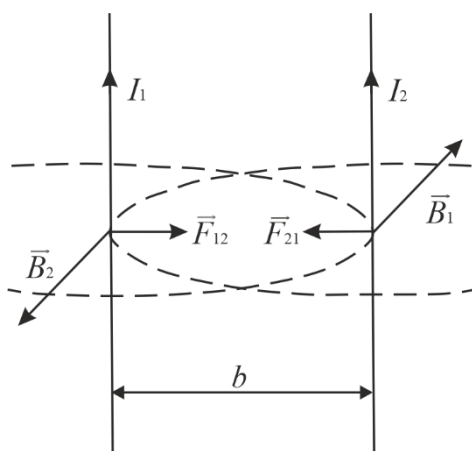


Рис. 35

[Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных проводников с токами I_1 и I_2 . Если расстояние между проводниками b (рис. 35), то каждый элемент dl тока I_2 будет находиться в магнитном поле, индукция которого равна

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b} \quad (*)$$

[учли формулу (4.12)].

Следовательно, согласно (4.15) на элемент dl тока I_2 действует сила

$$dF_2 = I_2 B_1 dl \sin 90^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} dl. \quad (**)$$

Для силы dF_1 , действующей на элемент dl тока I_1 , получается аналогичное выражение:

$$dF_1 = I_1 B_2 dl \sin 90^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} dl = dF_2 = dF].$$

3. Сила Лоренца. Сила, действующая на электрический заряд q , движущийся в магнитном поле со скоростью \vec{v} , называется **силой Лоренца** и выражается формулой

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (4.17)$$

где \vec{B} – индукция магнитного поля, в котором заряд q движется.

Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = qvB \sin \alpha, \quad (4.18)$$

где α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} . Из (4.18) вытекает, что заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля ($\alpha = 0$), не испытывает действия силы Лоренца, как и в случае, когда заряд покоится ($v = 0$); если направления \vec{v} и \vec{B} взаимно перпендикулярны ($\vec{v} \perp \vec{B}$), сила F_L максимальна.

Сила Лоренца \vec{F}_L направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{B} (рис. 36). В случае движения положительного заряда [за направление тока принято направление положительного заряда] направление \vec{F}_L определяется по **правилу левой руки**: если расположить левую руку так, чтобы вектор магнитной индукции \vec{B} входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль вектора \vec{v} , то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на положительный заряд. [На отрицательный заряд сила Лоренца действует в противоположном направлении (если он движется с такой же скоростью и в таком же магнитном поле)].

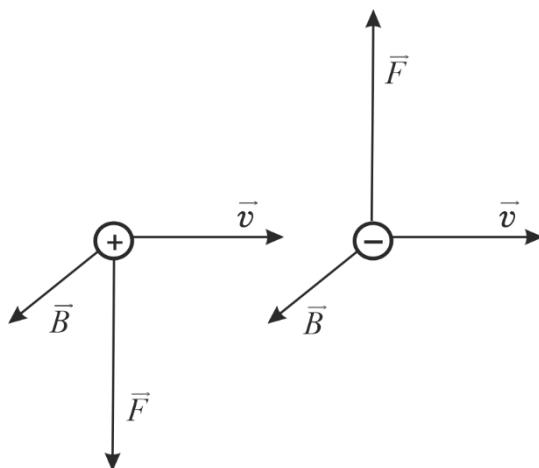


Рис. 36

В общем случае, когда на движущийся заряд кроме магнитного поля индукцией \vec{B} действует и электрическое поле напряженностью \vec{E} , результирующая сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (4.19)$$

Формула (4.19) для результирующей силы \vec{F} , полученная голландским физиком Х. Лоренцем (1892 г.) путем обобщения экспериментальных данных, называется **формулой Лоренца**.

[Под действием силы Лоренца заряженные частицы движутся в магнитном поле по криволинейным траекториям.

1. Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле со скоростью \vec{v} вдоль линий магнитной индукции \vec{B} ($\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$ или $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$); (рис. 37, а), то угол α между векторами \vec{v} и \vec{B} равен: $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Тогда, согласно формуле (4.18), сила $F_L = 0$, т. е. частица продолжает двигаться *равномерно и прямолинейно*.

2. Если направление скорости \vec{v} движения частицы перпендикулярно направлению индукции \vec{B} однородного магнитного поля ($\vec{v} \perp \vec{B}$, $\alpha = 90^\circ$); (рис. 37, б), то, согласно (4.18),

$$F_L = qvB, \quad (4.20)$$

т. е. сила Лоренца постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы (траекторией движения заряженной частицы является *окружность* (или *дуга окружности*, если частица покидает поле)).

Радиус r окружности найдем из условия равенства силы Лоренца F_L центростремительной силе $F_{цс}$, сообщаемой частице массой m центростремительное ускорение a_n

$$qvB = \frac{mv^2}{r},$$

откуда

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (4.21)$$

Период вращения частицы

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}, \quad (4.22)$$

т. е. время, за которое частица совершает один полный оборот. Как видно из формулы (4.22), период вращения T частицы в однородном магнитном поле не зависит от ее скорости v , а определяется только величиной, обратной удельному заряду q/m частицы, и магнитной индукцией B поля.

3. Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле со скорости \vec{v} под углом α к вектору магнитной индукции \vec{B} , причем $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \pi$, то траектория движения частицы представляет собой винтовую линию (рис. 37, в). При этом радиус r винтовой линии зависит от модуля составляющей скорости \vec{v}_\perp , перпендикулярной индукции магнитного поля \vec{B} , а шаг винтовой линии h – от модуля составляющей скорости \vec{v}_\parallel , параллельной магнитной индукции \vec{B} . Таким образом, траектория движения заряженной частицы как бы навивается на линии магнитной индукции, ось которой совпадает с вектором магнитной индукции \vec{B} .

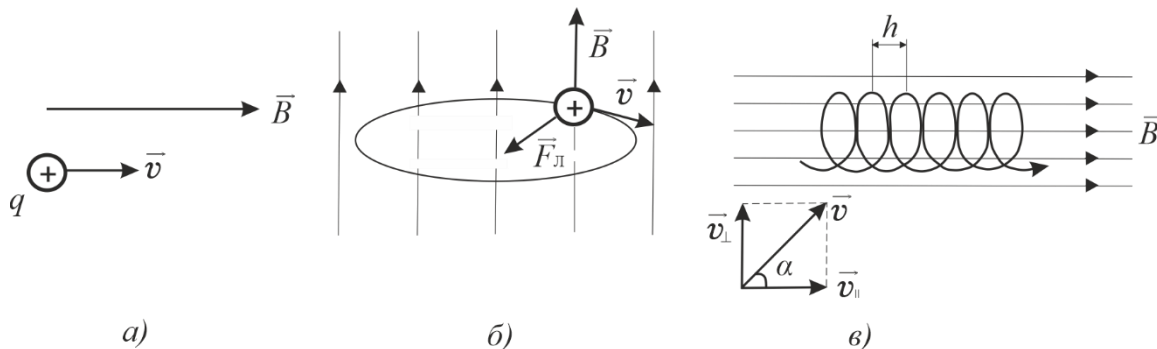


Рис. 37

Радиус витков выражается формулой

$$r = \frac{m \vec{v}_\perp}{q B} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \quad (4.23)$$

где $\vec{v}_\perp = mv \sin \alpha$ – составляющая вектора скорости \vec{v} .

Шаг (расстояние между соседними витками движения) винтовой линии

$$h = \vec{v}_\parallel T = vT \cos \alpha. \quad (4.24)$$

Подставив в уравнение (4.24) выражение (4.22), получим

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{Bq}. \quad (4.25)$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы].

4.4. Магнитное поле движущегося заряда

Магнитная индукция \vec{B} поля точечного заряда q , свободно движущегося с нерелятивистской скоростью \vec{v} [$v \ll c$] в вакууме (рис. 38) определяется по формуле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (4.26)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке, в которой определяется индукция.

Модуль вектора \vec{B}

$$B = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (4.27)$$

где α – угол между векторами \vec{v} и \vec{r} .

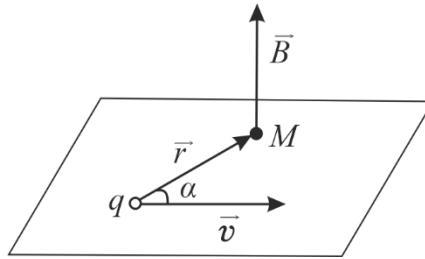


Рис. 38

[Любой движущийся в вакууме (или среде) заряд создает вокруг себя магнитное поле. Под *свободным движением заряда* понимается его движение с постоянной скоростью. Из формулы закона Био – Савара – Лапласа [см. (4.8)] можно получить выражение для магнитной индукции \vec{B} поля, создаваемого точечным зарядом q , свободно движущимся с нерелятивистской скоростью \vec{v} .

Сила тока, согласно (3.5), равна

$$I = \frac{dq}{dt} = nevS, \quad (*)$$

где v – скорость упорядоченного движения носителей тока; n – концентрация носителей тока; S – площадь поперечного сечения проводника.

Подставив выражение (*) в формулу (4.8), получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 nevS}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (**)$$

или

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 nevSdl}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad (***)$$

[учли, что векторы $e\vec{v}$ и $d\vec{l}$ совпадают по направлению; $evd\vec{l}$ заменили на $e\vec{v}dl$ (скалярные множители можно вносить и выносить из-под знака произведения)].

Разделив выражение (***) на $nSdl$, т. е. на число носителей тока в объеме Sdl , найдем магнитную индукцию \vec{B} поля, создаваемого зарядом e , движущимся со скоростью \vec{v} . Заменив e на q , получим

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3},$$

или

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin \alpha].$$

4.5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме

Циркуляцией вектора \vec{B} по замкнутому контуру называется интеграл

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (4.28)$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B \cos \alpha$ – составляющая вектора \vec{B} в направлении касательной к контуру L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α – угол между векторами \vec{B} и $d\vec{l}$.

Теорема о циркуляции вектора \vec{B} в вакууме (закон полного тока для магнитного поля в вакууме): циркуляция вектора \vec{B} в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (4.29)$$

где n – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы. [Теорема (4.29) справедлива только для поля в вакууме, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи. Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему; ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для системы токов, изображенных на рис. 39,

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + 2I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4.$$

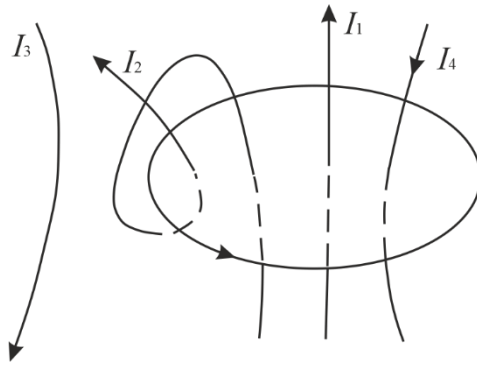


Рис. 39

Пример. Рассчитаем магнитное поле прямого тока I , перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 40).

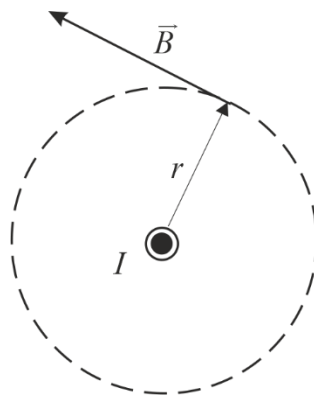


Рис. 40

Замкнутый контур представим в виде окружности радиуса r . В каждой точке этой окружности вектор \vec{B} одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности. Циркуляция вектора \vec{B} равна

$$\oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

[учли теорему (4.29)].

Таким образом, *магнитная индукция прямого тока*

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (*)$$

(формула (*) совпадает с (4.12), полученной из закона Био – Савара – Лапласа)].

Теорема о циркуляции вектора \vec{H} в вакууме: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \sum_{k=1}^n I_k \quad (4.30)$$

$[d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $H_l = H \cos \alpha$ – составляющая вектора \vec{H} в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α – угол между векторами \vec{H} и $d\vec{l}$; n – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы].

Напряженность магнитного поля \vec{H} является аналогом электрического смещения \vec{D} [см. п. 2.3]. [Сравнивая выражения (1.20) и (4.29) для циркуляции векторов \vec{E} и \vec{B} ,

$$\left[\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0 \quad (1.20) \right],$$

$$\left[\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k \quad (4.29) \right]$$

видим, что между ними существует принципиальное различие. Циркуляция вектора \vec{E} электростатического поля всегда равна нулю, т. е. *электростатическое поле является потенциальным*. Циркуляция вектора \vec{B} магнитного поля нулю не равна – *магнитное поле называется вихревым*].

4.6. Поток вектора магнитной индукции.

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

Для характеристики магнитного поля вводится понятие *потока вектора магнитной индукции (магнитный поток)* сквозь площадку dS :

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS \quad (4.31)$$

– скалярная физическая величина, где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью \vec{n} к площадке; $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление нормали \vec{n} к площадке dS ; α – угол между векторами \vec{n} и \vec{B} (рис. 41).

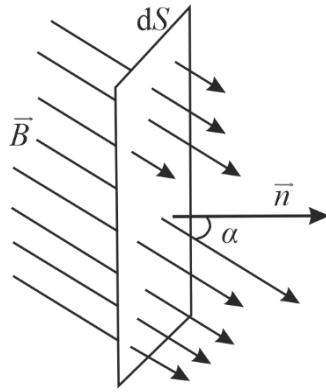


Рис. 41

В случае произвольной поверхности S поток вектора магнитной индукции Φ_B сквозь эту поверхность равен

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS, \quad (4.32)$$

а если поверхность плоская, поле однородно и направление вектора \vec{B} перпендикулярно поверхности [$B_n = B = \text{const}$], поток

$$\Phi_B = BS. \quad (4.33)$$

Единица магнитного потока Φ_B – *вебер* [Вб]); 1 Вб – магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

[Поток вектора магнитной индукции Φ_B может быть как положительным ($\Phi_B > 0$), так и отрицательным ($\Phi_B < 0$) в зависимости от знака $\cos \alpha$ (определяется выбором положительного направления нормали \vec{n})].

Теорема Гаусса для поля \vec{B} : поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (4.34)$$

Итак, для потоков векторов \vec{B} и \vec{E} сквозь замкнутую поверхность *в вихревом* и *потенциальном полях* получаются различные выражения [см. (4.34) и (1.35)].

Теорема (4.34) отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего *линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми*.

4.7. Магнитное поле соленоида и тороида

Соленоидом называется длинная цилиндрическая катушка из тонкого плотно намотанного провода. Соленоид характеризуется количеством витков n , намотанных на единицу длины, числом витков N , длиной l , причем $l \gg d$ [d – диаметр витков соленоида; $n = N/l$]. Линии магнитного поля соленоида выглядят примерно так, как показано на рис. 42. Из теоремы о циркуляции и теоремы Гаусса следует, что внутри бесконечно длинного соленоида магнитное поле однородно $\vec{B} = \text{const}$, а вне соленоида очень слабое и неоднородное и его можно не учитывать.

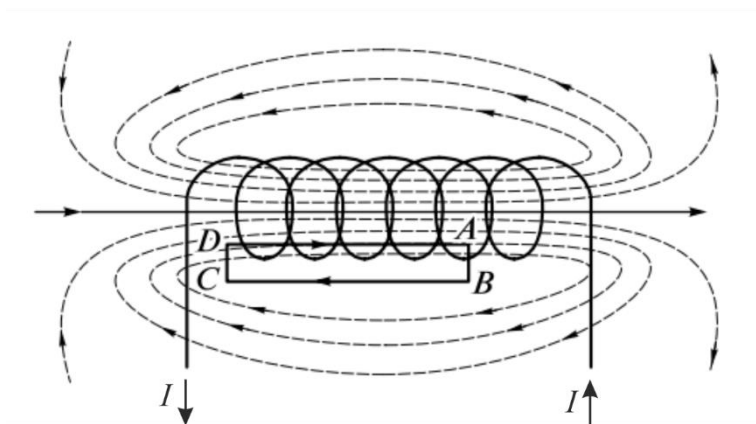


Рис. 42

Чтобы найти величину B , надо применить теорему о циркуляции вектора \vec{B} [см. (4.29)] к прямоугольному контуру $ABCD$, охватывающему все N витков, одна сторона которого проходит вдоль образующей внутри цилиндра, а другая – вне (рис. 42):

$$\oint_{ABCD} B_l dl = Bl = \mu_0 NI, \quad (4.35)$$

откуда следует, что **магнитная индукция внутри соленоида (в вакууме)**

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}, \quad (4.36)$$

т. е. B зависит от числа витков N соленоида, его длины l , а также от силы тока I , протекающего по соленоиду. [Интеграл по $ABCD$ можно представить в виде суммы четырех интегралов: по AB , BC , CD и DA . На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$; вне соленоида $B = 0$. На участке DA циркуляция вектора \vec{B} равна Bl (участок контура совпадает с линией магнитной индукции)].

Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью S равен

$$\Phi_1 = BS,$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида, называемый **потокосцеплением** Ψ ,

$$\Psi = N\Phi_1 = NBS = \mu_0 \frac{N^2 IS}{l}. \quad (4.36')$$

Для поля соленоида можно показать, что

$$B = \mu_0 \mu n I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I = \mu_0 \mu \frac{N}{2\pi r} I, \quad (4.36'')$$

где μ – магнитная проницаемость вещества; r – радиус витков соленоида.

Магнитный момент \vec{p}_m соленоида равен геометрической сумме магнитных моментов всех его $N = nl$ витков:

$$\vec{p}_m = NIS\vec{n} = nIlS\vec{n}, \quad (4.37)$$

где $S = \pi r^2$ – площадь витка с током; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности витка, направленный по оси соленоида в ту же сторону, что и вектор \vec{B} .

Модуль магнитного момента соленоида

$$p_m = nIlS = nIV, \quad (4.38)$$

где $V = lS$ – объем соленоида.

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 43). Магнитное поле тороида целиком локализовано внутри его объема, оно однородно $\vec{B} = \text{const}$; вне тороида поле отсутствует. Возьмем контур в виде окружности радиуса r , центр которой совпадает с центром тороида.

Следовательно, по теореме о циркуляции вектора \vec{B} [см. (4.29)],

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI, \quad (4.39)$$

откуда следует, что *магнитная индукция внутри тороида (в вакууме)*

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad (4.40)$$

где N – число витков тороида; l – длина средней линии тороида.

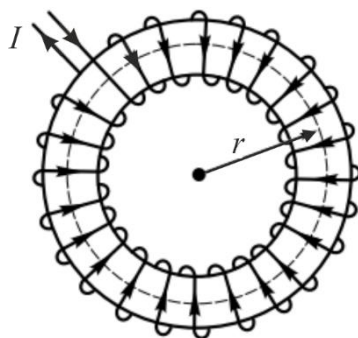


Рис. 43

[Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него $B \cdot 2\pi r = 0$. Это означает, что поле вне тороида отсутствует (что показывает и опыт)].

4.8. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Контур с током, образованный неподвижным проводником и скользящей по нему подвижной перемычкой длиной l , помещен во внешнее однородное магнитное поле \vec{B} , перпендикулярное плоскости контура (рис. 44). На проводник с током (перемычку) в магнитном поле действует сила Ампера, подчиняющаяся закону (4.14). Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

Модуль силы Ампера равен

$$F = IBl$$

[направление силы Ампера \vec{F} определяется по правилу левой руки (см. п. 4.3)].

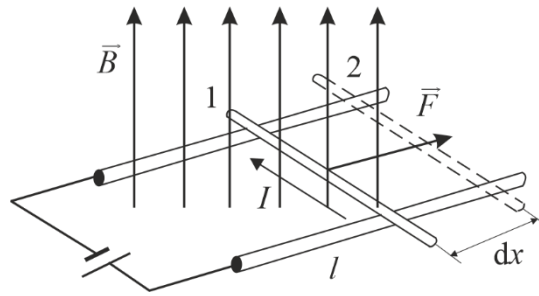


Рис. 44

Под действием силы \vec{F} перемычка переместится параллельно самой себе на расстояние dx из положения 1 в положение 2. Элементарная работа dA , совершаемая силой Ампера F , равна

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi_B, \text{ т. е. } dA = Id\Phi_B, \quad (4.41)$$

где $dS = ldx$ – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле; $d\Phi_B = BdS$ – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь [см. п. 4.5]. Формула (4.41) справедлива и для произвольного направления вектора \vec{B} . [Если вектора \vec{B} направлен иначе, то его можно разложить на нормальную \vec{B}_n и касательную \vec{B}_τ к плоскости составляющие. В совершении работы участвует только нормальная \vec{B}_n составляющая вектора \vec{B}].

Проинтегрировав выражение (4.41), найдем работу *по перемещению в магнитном поле замкнутого контура с постоянным током* из начального положения 1 в конечное положение 2

$$A = \int_1^2 Id\Phi_B = I(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}) = I\Delta\Phi_B, \quad (4.42)$$

где $d\Phi_B$ – приращение магнитного потока через весь контур; $\Delta\Phi_B$ – изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

Таким образом, работа A силы Ампера при перемещении в постоянном магнитном поле замкнутого контура, электрический ток в котором поддерживается постоянным ($I = \text{const}$), равна произведению силы тока I в контуре на изменение магнитного потока $\Delta\Phi_B$, сцепленного с контуром.

Формула (4.42) справедлива для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

Примеры решения задач

4.1. Квадратная рамка со стороной 10 см, состоящая из 25 витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией 0,3 Тл. Нормаль \vec{n} к рамке составляет с направлением вектора \vec{B} магнитной индукции угол $\alpha = \pi/4$. Найдите вращающий момент сил M , действующих на рамку, если по ней течет ток 1,5 А.

Дано: $a = 0,1$ м; $N = 25$; $B = 0,3$ Тл; $\alpha = \pi/4$; $I = 1,5$ А.

Найти: M .

Решение. На рамку с током, помещенную в однородное магнитное поле, действует вращающий момент:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (1)$$

где \vec{p}_m – магнитный момент рамки с током.

Модуль механического (вращающего) момента

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (2)$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

Поскольку рамка состоит из N витков, то

$$M = N p_m B \sin \alpha, \quad (3)$$

где магнитный момент рамки с током

$$p_m = IS = I a^2. \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (3), найдем искомый вращающий момент сил

$$M = NIB a^2 \sin \alpha. \quad (5)$$

Ответ: $M = 0,08$ Н · м.

4.2. По двум параллельным прямым проводникам длиной 1,2 м каждый, расстояние между которыми 12 см друг от друга, в одном направлении текут токи 40 А и 80 А. Найдите силу взаимодействия токов.

Дано: $l = 1,2$ м; $d = 0,12$ м; $I_1 = 40$ А и $I_2 = 80$ А.

Найти: F .

Решение. Сила взаимодействия двух параллельных прямолинейных проводников в вакууме, приходящаяся на отрезок dl проводника,

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление силы $d\vec{F}_1$ (или $d\vec{F}_2$), с которой поле \vec{B}_1 действует на участок $d\vec{l}$ второго тока, определяется по правилу левой руки.

Проинтегрировав выражение (1), найдем искомую силу взаимодействия (притяжения) токов:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l. \quad (2)$$

Ответ: $F = 6,4$ мН.

4.3. Найдите угловую скорость и период вращения электрона по окружности, которую он описывает в однородном магнитном поле с индукцией 5 мТл.

Дано: $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Найти: ω ; T .

Решение. Сила Лоренца, действующая на электрический заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} ,

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1)$$

Модуль силы Лоренца

$$F_L = qvB \sin \alpha, \quad (2)$$

где $\sin 90^\circ = 1$ (по условию задачи $\vec{v} \perp \vec{B}$).

Угловая скорость вращения электрона

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3)$$

где период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad (4)$$

[v – скорость электрона; R – радиус окружности].

Вектор силы Лоренца \vec{F}_L перпендикулярен вектору скорости \vec{v} ($\vec{F}_L \perp \vec{v}$) и, следовательно, сообщает электрону нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (5)$$

По второму закону Ньютона $F_L = m_e a_n$, где $F_L = qvB$.

Тогда

$$\frac{m_e v^2}{R} = qvB, \quad (6)$$

откуда скорость электрона

$$v = \frac{qvR}{m_e}. \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в формулу (4), найдем период вращения электрона

$$T = \frac{2\pi m_e}{qB}. \quad (8)$$

Угловая скорость электрона

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m_e}. \quad (9)$$

Ответ: $\omega = 8,78 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$; $T = 7,15 \text{ нс}$.

4.4. Протон ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$) движется в однородном магнитном поле с напряженностью 15 кА/м перпендикулярно линиям индукции магнитного поля и имеет момент импульса $5,8 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Найдите кинетическую энергию W_k , радиус траектории R и угловую скорость ω вращения протона. **Дано:** $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$; $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; $H = 1,5 \cdot 10^4 \text{ А/м}$; $L = 5,8 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$; $\mu = 1$.

Найти: W_k ; ω ; R .

Решение. Протон движется в однородном магнитном поле по окружности радиуса R под действием силы Лоренца

$$F_L = qvB, \quad (1)$$

которая численно равна центростремительной силе:

$$F_{\text{ц}} = \frac{m_p v^2}{R}, \quad F_L = F_{\text{ц}}, \quad \frac{m_p v^2}{R} = qvB \quad (2)$$

[$B = \mu_0 \mu H$ – индукция магнитного поля].

Кинетическая энергия протона равна:

$$W_k = \frac{m_p v^2}{2}. \quad (3)$$

Преобразовав выражение (2), получим

$$\frac{m_p v^2}{2} = \frac{qvBR}{2} = W_k. \quad (4)$$

Из уравнения для момента импульса

$$L = m_p vR \quad (5)$$

выразим

$$vR = \frac{L}{m_p}. \quad (6)$$

Подставив полученное выражение (6) в уравнение (4), получим:

$$W_k = \frac{qBL}{2m_p} = \frac{q\mu_0\mu HL}{2m_p} \quad (7)$$

[учли, что $B = \mu_0 \mu H$].

Угловая скорость ω вращения протона [см. решение пр. 4.4, формулу (9)]

$$\omega = \frac{qB}{m_p} = \frac{q\mu_0\mu H}{m_p}. \quad (8)$$

Из формулы (5) найдем радиус траектории R протона

$$R = \sqrt{\frac{L}{m_p \omega}} \quad (9)$$

[учли, что $v = \omega R$].

Ответ: $W_k = 327,16$ эВ; $\omega = 1,81 \cdot 10^6$ с⁻¹; $R = 0,14$ м.

4.5. Найдите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора \vec{B} , силу тока в обмотке тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 50$ см, внутренний – $d_2 = 25$ см), содержащего 180 витков. Магнитная индукция на оси тороида равна 0,23 мТл.

Дано: $B = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Тл; $d_1 = 0,5$ м; $d_2 = 0,25$ м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $N = 180$.

Найти: I .

Решение. По теореме о циркуляции вектора \vec{B} [закон полного тока для магнитного поля в вакууме]: циркуляция вектора \vec{B} по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k. \quad (1)$$

Магнитное поле сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует. В качестве контура выберем окружность радиуса r , центр которой лежит на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора \vec{B} во всех точках линии магнитной индукции одинаков.

Тогда, согласно теореме о циркуляции (1), можно записать:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint_L dl = 2\pi r B = \mu_0 N I. \quad (2)$$

Для средней линии тороида

$$r = \frac{d_1 + d_2}{4}. \quad (3)$$

Подставив (3) в формулу (2) и преобразовав ее, получим искомую силу тока:

$$I = \frac{\pi(d_1 + d_2)B}{2\mu_0 N}.$$

Ответ: $I = 1,2$ А.

Задачи

34. Квадратная рамка со стороной $a = 7$ см, состоящая из $N = 30$ витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,4$ Тл. Нормаль \vec{n} к рамке составляет с направлением вектора \vec{B} магнитной индукции угол $\alpha = \pi/3$. Найдите вращающий момент сил M , действующих на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А. Ответ: $0,051$ Н · м

35. Из двух кусков провода одинаковой длины делали квадрат и круговой виток. Найдите, во сколько раз магнитный момент p_m у кругового витка больше, чем у квадратного, если по ним протекают одинаковые токи. Ответ: $1,27$

36. По длинному проводу, согнутому под прямым углом, течет ток, с силой $I = 8$ А. Найдите индукцию B магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе прямого угла, на расстоянии $l = 32$ см от вершины. Ответ: $14,14$ мкТл

37. Длинный провод с током $I = 12$ А изогнут под прямым углом. Найдите индукцию B магнитного поля в точке, находящейся на перпендикуляре к плоскости, в которой находится провод, на расстоянии $l = 24$ см от точки изгиба. Ответ: $7,07$ мкТл

38. Два длинных прямых параллельных провода находятся на расстоянии $r = 35$ см друг от друга. По проводам текут *одинаково направленные* токи. Сила тока в одном из проводов в четыре раза больше, чем в другом ($I_2 = 4I_1$). Найдите, на каком расстоянии r_1 от провода с меньшим током индукция B магнитного поля будет равна нулю. Ответ: $0,07$ м

39. Коаксиальный кабель представляет собой металлическую тонкостенную трубку диаметра $d = 3$ см, вдоль оси которой расположен тонкий провод. Силы тока в трубке и проводе равны $I = 4$ А и *направлены противоположно*. Найдите магнитную индукцию B в точках, находящихся на расстояниях $2,5$ см и 1 см от оси кабеля. Ответ: 0 и 80 мкТл

40. Найдите силу F , которая действует на свободный электрон в прямом проводнике длины $l = 0,4$ м, перемещающийся в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции, если на концах проводника возникает разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 40$ В. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Ответ: $1,6 \cdot 10^{-17}$ Н

41. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле и движутся по окружностям. Найдите, во сколько раз радиус окружности протона больше радиуса окружности электрона ($m_p = 1836m_e$; $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Ответ: $42,85$

42. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов 60 кВ и влетела в однородное магнитное поле с индукцией $62,8$ мТл со скоростью $1,7$ Мм/с. Найдите период T и угловую скорость ω вращения α -частицы в магнитном поле.

Ответ: 4,15 мкс; $15,12 \cdot 10^5$ рад/с

43. Ион, имеющий массу $3,3 \cdot 10^{-26}$ кг, ускоренный разностью потенциалов 5 кВ, влетел в однородное магнитное поле и стал двигаться по дуге окружности, имея момент импульса $L = 9,89 \cdot 10^{-21}$ кг·м²/с. Найдите индукцию B магнитного поля.

Ответ: 333,67 мТл

44. Виток радиуса $R = 0,15$ м с током силы $I = 12$ А помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,5$ Тл так, что нормаль \vec{n} к нему составляет угол $\alpha_1 = 30^\circ$ с линиями индукции \vec{B} . Найдите работу A , которую нужно совершить, чтобы нормаль \vec{n} к витку составила угол $\alpha_2 = 90^\circ$ с линиями поля.

Ответ: 1,1 Дж

Лекция 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

5.1. Магнитные моменты электронов и атомов

Магнитное поле, созданное в какой-либо среде, отличается от магнитного поля в вакууме. Это объясняется намагничиванием среды в магнитном поле. Согласно представлениям классической физики, электроны в атоме движутся по круговым орбитам, образуя систему замкнутых орбитальных токов. Если электрон движется со скоростью v по круговой орбите радиуса r , то сила орбитального (кругового) тока

$$I = ev = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{e\omega}{2\pi}, \quad (5.1)$$

где e – элементарный заряд; ν и ω – соответственно частота и круговая (циклическая) частота обращения электрона по орбите.

Орбитальному току I соответствует *орбитальный магнитный момент электрона* [см. (4.3)] $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, модуль которого

$$p_m = IS = evS = ev\pi r^2 = \frac{1}{2}evr, \quad (5.2)$$

где $S = \pi r^2$ – площадь орбиты. Направление вектора \vec{p}_m образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 45).

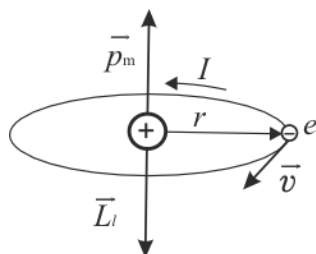


Рис. 45

Движущийся по орбите электрон обладает *механическим моментом импульса* \vec{L}_l , модуль которого равен

$$L_l = mvr = 2m\nu S, \quad (5.3)$$

где m – масса электрона; $v = 2\pi vr$ – его скорость. Вектор \vec{L}_l (рис. 45) называется **орбитальным механическим моментом электрона**.

Вектор \vec{L}_l противоположен по направлению вектору \vec{p}_m . Учитывая выражения (5.2) и (5.3), получим

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = g\vec{L}_l, \quad (5.4)$$

где величина

$$g = -\frac{e}{2m} \quad (5.5)$$

называется **гиромагнитным (магнитомеханическим) отношением орбитальных моментов электрона**; знак « $-$ » указывает на то, что направления моментов \vec{p}_m и \vec{L}_l противоположны.

Кроме орбитальных моментов \vec{p}_m и \vec{L}_l электрон обладает **собственным механическим моментом импульса \vec{L}_{ls}** , называемым **спином** и **собственным (спиновым) магнитным моментом \vec{p}_{ms}** . Вектор \vec{L}_{ls} противоположен по направлению вектору \vec{p}_{ms} :

$$\vec{p}_{ms} = g_s\vec{L}_{ls}, \quad (5.6)$$

где величина

$$g_s = -\frac{e}{m} \quad (5.7)$$

называется **гиромагнитным отношением спиновых моментов электрона**; знак « $-$ » указывает на то, что направления моментов \vec{p}_{ms} и \vec{L}_{ls} противоположны.

В соответствии с (5.6) и (5.7) **собственный (спиновый) магнитный момент электрона** равен

$$p_{ms} = -\frac{e}{m}L_{ls} = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (5.8)$$

Величину

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad (5.9)$$

называют **магнетон Бора** – является единицей магнитного момента p_{ms} электрона [$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл]; $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Планка.

Проекция \vec{p}_{ms} на направление вектора \vec{B} может принимать только одно из следующих двух значений:

$$p_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm\mu_B, \quad (5.10)$$

следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора. В общем случае магнитный момент электрона \vec{p}_3 складывается из орбитального \vec{p}_m и спинового магнитных моментов \vec{p}_{ms} :

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_m + \vec{p}_{ms}. \quad (5.11)$$

Магнитный момент атома (молекулы) \vec{p}_a является суммой орбитальных \vec{p}_m и спиновых магнитных моментов \vec{p}_{ms} его электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms} \quad (5.12)$$

[магнитные моменты ядер (обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра *протонов* и *нейтронов*) примерно в тысячу раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими можно пренебречь].

Магнитные моменты атомов и молекул \vec{p}_a , заключенных в некотором объеме ΔV , складываясь, создают магнитный момент вещества в этом объеме.

5.2. Намагниченность магнетика. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в веществе

Всякое вещество является **магнетиком**, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент – **намагничиваться**, т. е. создавать собственное магнитное поле \vec{B}' [*создаваемого молекулярными токами*], накладывающееся на внешнее поле $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ [*создаваемого токами проводимости*]. *Результирующее поле в магнетике* характеризуется вектором магнитной индукции:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0(\vec{H} + \vec{H}'), \quad (5.13)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; \vec{H} – напряженность внешнего магнитного поля; \vec{H}' – собственная напряженность поля магнетика.

В однородной изотропной среде вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (5.14)$$

где μ – **магнитная проницаемость вещества (среды)** [безразмерная величина, показывающая, во сколько раз, сила действующая со стороны магнитного поля на проводники с током или движущиеся заряды в данной среде, больше, чем в вакууме].

Для объяснения явления намагниченности Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют молекулярные токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. *Каждый молекулярный ток* создает собственное магнитное поле, и результирующее магнитное поле всех входящих в вещество атомов определяет магнитные свойства вещества.

Степень намагниченности вещества (магнетика) принято характеризовать **вектором намагничения** или **намагниченностью**, определяемой магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}, \quad (5.15)$$

где $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_a$ – **магнитный момент магнетика**, равный векторной сумме магнитных моментов \vec{p}_a отдельных атомов или молекул в объеме V .

Выражение для циркуляции [см. (4.28)] поля (5.13):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint_L \vec{B}' d\vec{l}. \quad (5.16)$$

Согласно формуле (4.29), из (5.16) получим **теорему о циркуляции вектора \vec{B} в веществе (закон полного тока для магнитного поля в веществе)**:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 (I + I'), \quad (5.17)$$

т. е. **циркуляция вектора магнитной индукции \vec{B} по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости (макротоков) I и молекулярных токов (микротоков) I' , охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную μ_0** . [Согласно формуле (4.29), для поля макротоков (токов проводимости)]

$$\oint_L \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (5.17')$$

для поля *микротоков* (молекулярных токов)

$$\oint_L \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 I' \quad (5.17'')$$

где I и I' – соответственно алгебраические суммы *макротоков* (токов проводимости) и *микротоков* (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром L].

5.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

Вектор намагничения \vec{J} характеризует напряженность \vec{H}' поля внутри намагниченного вещества, являясь мерой его намагниченности:

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{H}'. \quad (5.18)$$

Способность же вещества к намагничиванию характеризует безразмерная величина, называемая *магнитной восприимчивостью вещества* χ , определяемая отношением намагниченности \vec{J} к напряженности \vec{H} поля, вызывающего намагничивание:

$$\chi = \frac{\vec{J}}{\mu_0 \vec{H}}. \quad (5.19)$$

Из теории известно, что циркуляция намагниченности \vec{J} по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме *молекулярных токов* (*микротоков*) I' , охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'. \quad (5.20)$$

Тогда теорему о циркуляции вектора \vec{B} в веществе (5.13) можно записать также в виде

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I, \quad (5.21)$$

где I алгебраическая сумма токов проводимости (*макροтоков*).

Выражение, стоящее в скобках в (5.21), есть **вектор напряженности магнитного поля**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (5.22)$$

[см. п. 5.2].

Подставив формулу (5.22) в выражение (5.21), получим **теорему о циркуляции вектора \vec{H}** :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (5.23)$$

т. е. *циркуляция вектора \vec{H} по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости I , охватываемых этим контуром.*

Аналогом вектора электрического смещения \vec{D} [см. п. 2.3] является вектор напряженности \vec{H} магнитного поля.

В случае вакуума $\vec{J} = 0$, поэтому

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5.24)$$

[следует из формулы (5.22)].

Из формул (5.19) и (5.22) видно, что намагниченность \vec{J} магнетика пропорциональна напряженности \vec{H} магнитного поля, вызывающего намагничение:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (5.25)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества [безразмерная величина].

Сопоставив формулы (5.13) и (5.18), получим соотношение, связывающее магнитную индукцию \vec{B} , напряженность \vec{H} магнитного поля и намагниченность \vec{J} магнетика:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}, \quad (5.26)$$

или с учетом (5.19)

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}. \quad (5.27)$$

Из сравнения (5.14) и (5.27) видно, что величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (5.28)$$

является *магнитной проницаемостью вещества* [см. (5.14); μ безразмерная величина, показывающая во сколько раз магнитное поле макротокков I усиливается за счет микротокков I' среды].

Из выражений (5.27) и (5.28) получаем, что

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (5.28')$$

[см. формулу (5.14)].

5.4. Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики

По своим магнитным свойствам [по значению магнитной проницаемости] магнетики делятся на три основные группы: *диамагнетики* ($\mu < 1$), *парамагнетики* ($\mu > 1$) и *ферромагнетики* ($\mu \gg 1$).

Диамагнетики – вещества, молекулы которых не обладают магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля (\vec{B}) в электронных оболочках атомов диамагнетика возникают индуцированные элементарные круговые токи, магнитное поле которых будет противодействовать изменению внешнего поля [т. е. диамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, направленное против внешнего поля и ослабляющее его]. Вследствие уменьшения магнитного момента каждого электрона \vec{p}_e , магнитный момент атома \vec{p}_a становится отрицательным, а магнетик в целом приобретает магнитный момент \vec{P}_m , направленный противоположно вектору магнитной индукции \vec{B} . Для диамагнетиков магнитная восприимчивость χ [см. (5.25)] невелика, но отрицательна [$\chi \approx 10^{-5} - 10^{-6}$].

Диамагнетиками являются инертные газы, молекулярные водород (H_2) и азот (N_2), бериллий (Be), висмут (Bi), цинк (Zn), медь (Cu), золото (Au), серебро (Ag), углерод (C), кремний (Si), германий (Ge), вода (жидкая), ацетон, глицерин, нафталин и многие органические и неорганические соединения. Наиболее сильным диамагнетиком является висмут (Bi).

Парамагнетики – вещества, собственные магнитные моменты атомов и молекул которых в отсутствие внешнего магнитного поля отличны от нуля, но дезориентирующее действие теплового движения приводит к тому, что магнитный момент вещества равен нулю. При наличии внешнего магнитного поля (\vec{B}) становятся преобладающими те направления магнитных моментов атомов или молекул (\vec{p}_a), которые приближаются к направлению поля, в результате чего вещество намагничивается по полю [т. е. парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его]. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается. Для парамагнетиков магнитная восприимчивость χ невелика, но положительна. Намагничивание парамагнетиков [магнитная восприимчивость χ] зависит от температуры T :

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_a}{3kT}, \quad (5.29)$$

где n – число парамагнитных частиц в единице объема; p_a – магнитный момент атома; k – постоянная Больцмана. Выражение (5.29) называется **формулой Ланжевена**.

К парамагнетикам относятся многие металлы, а также сплавы этих металлов, кислород (H_2), оксид азота (NO), оксид марганца (MnO), хлорное железо ($FeCl_2$), платина (Pt), алюминий (Al) и др. [Атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком; если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком].

Ферромагнетики – твердые вещества, обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних факторов – магнитного поля, изменения температуры, деформации.

Ферромагнетики в отличие от *слабوماгнитных* диа- и парамагнетиков являются *сильномагнитными веществами*: внутреннее магнитное поле в них может в сотни и тысячи раз превосходит внешнее поле. Для диа- и парамагнетиков

зависимость намагниченности J от напряженности H линейна [см. (5.25)], для ферромагнетиков эта зависимость сложная: вначале с возрастанием H намагниченность J растет сначала быстро, затем медленнее, достигая магнитного насыщения $J_{\text{нас}}$ (рис. 46).

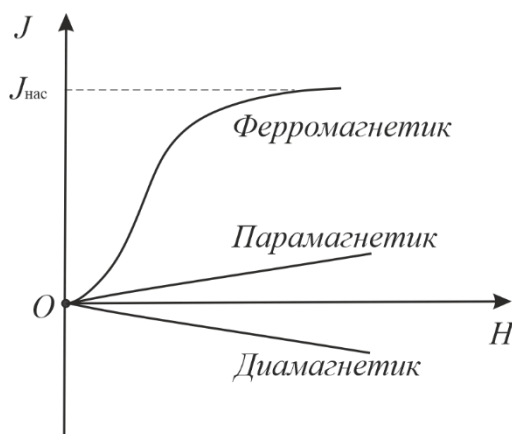


Рис. 46

[Такой характер намагничивания объясняется тем, что первоначально увеличивающаяся под действием возрастающего поля \vec{H} ориентация магнитных моментов по полю постепенно замедляется по мере того, как все меньше и остается неориентированных **доменов** — областей самопроизвольной намагниченности, линейные размеры которых $\sim 10^{-4} - 10^{-6}$ м; магнитное насыщение наступает тогда, когда направление магнитных доменов совпадает с направлением внешнего поля].

К ферромагнетикам относятся кристаллы переходных металлов [железо (Fe), кобальт (Co), никель (Ni)], некоторые редкоземельные элементы [гадолиний (Gd)] и их сплавы и соединения, ферриты, а также некоторые металлические стекла. Для ферромагнетиков $\mu \gg 1$ [например, для стали $\mu \sim 8\,000$, супермаллоя (сплав, состоящий из 79 % никеля, 5 % молибдена и 16 % железа) — 800000].

Зависимость вектора магнитной индукции \vec{B} в ферромагнетике от намагничивающего поля \vec{H} также нелинейна, но в той области, где наблюдается насыщение \vec{J} , согласно (5.26) [$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$] магнитная индукция \vec{B} продолжает увеличиваться за счет роста напряженности поля \vec{H} . Кроме того, у ферромагнетиков проявляется остаточный магнетизм — они могут сохранить состояние намагни-

ченности и при отсутствии намагничивающего поля. Остаточный магнетизм является результатом магнитного *гистерезиса*, который наблюдается при перемагничивании ферромагнетика, причем изменение индукции поля отстает от изменения напряженности поля.

Основная кривая намагничения на диаграмме $B-H$ приведена на рис. 47 (кривая $0-1$).

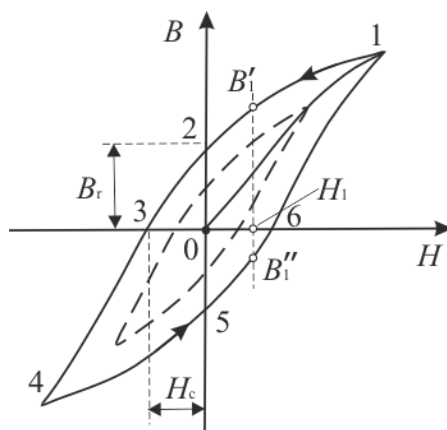


Рис. 47

[Если довести намагничение до насыщения (точка 1) и затем уменьшить напряженность H магнитного поля, то индукция B следует не по первоначальной кривой $0-1$, а изменяется в соответствии с кривой $1-2$, лежащей выше кривой $0-1$. При значении напряженности поля $H = 0$ (точка 2), намагничение не исчезает ($B \neq 0$) и характеризуется величиной B_r , называемой *остаточной индукцией* (образец представляет собой *постоянный магнит*). Намагниченность имеет при этом значение J_r , называемое *остаточной намагниченностью*. Полное размагничивание ($B = 0$) образца наступит при достижении значения H_c , приложенного в направлении, противоположном к первоначальному (точка 3). Напряженность H_c называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении обратного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая $3-4$), и при $H = -H_c$ достигает насыщения (точка 4). Затем ферромагнетик можно опять размагнитить (кривая $4-5-6$) и вновь перемагнитить до насыщения (кр. $6-1$).

Таким образом, при действии на ферромагнетик *переменного магнитного поля* индукция B изменяется в соответствии кривой $1-2-3-4-5-1$ (рис. 47), которая называется *петлей гистерезиса* [аналогичная петля получается и на диаграмм $J-H$]. Величины H_c , B_r (или J_r), μ_{\max} являются основными характеристиками ферромагнетиков. Ферромагнетики с *малой коэрцитивной силой* H_c

$[H_C \sim 0,8 \div 8 \text{ А/м}]$ и *очень малыми потерями энергии* при перемагничивании имеют узкую петлю гистерезиса и называются **магнитно-мягкими материалами** (используются для изготовления сердечников трансформаторов, электрических машин и т. п.); ферромагнетики характеризующиеся *высокими значениями коэрцитивной силы* $[H_C \sim 10^4 \div 10^5 \text{ А/м}]$ и *остаточной индукции* $[B_r \geq 1 \text{ Тл}]$ имеют широкую петлю гистерезиса и называются **магнитно-жесткими материалами** (применяются при изготовлении постоянных магнитов). Остаточную намагниченность можно нарушить в результате ударов или нагреванием ферромагнетиков.

При намагничивании ферромагнетика происходит изменение его линейных размеров (формы) и объема. Это явление называется **магнитострикцией** [открыто Д. Джоулем, 1842 г.]. Величина и знак этого эффекта зависят от напряженности \vec{H} магнитного поля, от природы ферромагнетика и от угла между направлением магнитного поля и кристаллографической осью (в случае монокристаллов). Наблюдается и обратное явление – изменение намагниченности ферромагнетика при его механической деформации – **эффект Виллари** [открыто Э. Виллари, 1865 г.].

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура T_C , называемая **точкой Кюри** [для Fe $\sim 768 \text{ }^\circ\text{C}$, для Ni $\sim 365 \text{ }^\circ\text{C}$, для Co $\sim 1130 \text{ }^\circ\text{C}$, для гадолиния (Gd) $\sim 17 \text{ }^\circ\text{C}$], при которой он теряет ферромагнитные свойства. При температуре T выше точки Кюри ($T > T_C$) ферромагнетик становится парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется **закону Кюри – Вейса**

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad (5.30)$$

где C – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества.

Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное не сопровождается выделением или поглощением тепла и представляет собой фазовый переход второго рода.

5.5. Электромагнитная индукция

5.5.1. Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца

Явление электромагнитной индукции, открытое в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, состоит в возникновении *электродвижущей силы* (ЭДС) *индукции* \mathcal{E}_i в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока Φ_B , пронизывающего этот контур. Величина \mathcal{E}_i не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока Φ_B , и определяется лишь скоростью изменения потока Φ_B вектора магнитной индукции, т. е. $d\Phi_B/dt$. При изменении знака $d\Phi_B/dt$ направление \mathcal{E}_i также меняется.

Классические опыты Фарадея.

Опыт 1. При движении постоянного магнита относительно катушки (соленоида), подключенной к гальванометру, в ней возникает ток (стрелка гальванометра отклоняется), направление которого изменяется при изменении направления движения магнита (рис. 48, а). Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Такое же явление наблюдалось, если магнит был неподвижен, а двигалась катушка.

Опыт 2. В катушке, подключенной к гальванометру, возникает электрический ток, если относительно нее двигалась другая катушка, подключенная к источнику постоянного тока (рис. 48, б). Ток в катушке возникает также при изменении тока в другой, т. е. в моменты включения или выключения тока (при замыкании ключа K), в моменты его увеличения или уменьшения (при перемещении ползунка реостата).

Во всех рассмотренных случаях ток в цепи гальванометра возникал только при изменении магнитного потока Φ_B , который пронизывал витки катушки, подключенной к гальванометру. При этом направление индукционного тока, вызванного возрастанием магнитного потока ($\Phi_B > 0$), было противоположно направлению тока, вызванного его уменьшением.

Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея): ЭДС электромагнитной индукции \mathcal{E}_i в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока Φ_B сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (5.31)$$

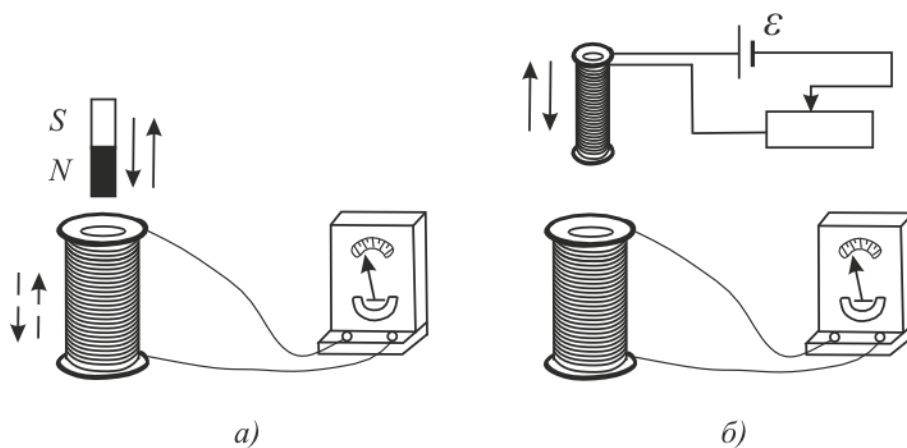


Рис. 48

Возникающий в контуре *индукционный ток* имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле стремится компенсировать изменение магнитного потока, пронизывающего контур [т. е. *индукционный ток* имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует как нарастанию магнитного поля сквозь контур (при увеличении магнитного потока Φ_B сквозь контур), так и его уменьшению (при уменьшении магнитного потока Φ_B сквозь контур)]. Это правило определения *направления индукционного тока*, установленное в 1834 г. профессором Петербургского университета Э.Х. Ленцем, математически отражается в законе Фарадея (5.31) знаком « \leftarrow »].

Правило Ленца: *индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему этот индукционный ток.*

[Закон Фарадея (5.31) может быть непосредственно получен из закона сохранения энергии, как это впервые сделал Г. Гельмгольц. Рассмотрим проводник с током I , который помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться (см. рис. 44, п. 4.8). Под действием силы Ампера \vec{F} , направление которой показано на рисунке, проводник перемещается на отрезок dx . Сила Ампера совершает работу $dA = Id\Phi_B$, где $d\Phi_B$ – пересеченный проводником магнитный поток [см. (4.41)].

Если сопротивление контура R , то согласно закону сохранения энергии, *работа источника тока* за время dt ($\mathcal{E}Idt$) расходуется на *джоулеву теплоту* (I^2Rdt) и *работу по перемещению проводника в магнитном поле* ($Id\Phi_B$):

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi_B,$$

откуда

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt}}{R},$$

где $-d\Phi_B/dt = \mathcal{E}_i$, есть не что иное, как закон Фарадея (см. (5.31)).

Закон Фарадея можно сформулировать еще таким образом: ЭДС \mathcal{E}_i электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Закон Фарадея – универсальный закон: \mathcal{E}_i не зависит от способа изменения магнитного потока Φ_B , а определяется только скоростью $d\Phi_B/dt$ его изменения.

Единица ЭДС электромагнитной индукции \mathcal{E}_i – вольт [В]:

$$\left[\frac{d\Phi_B}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

На основании (5.31) можно выразить единицу магнитного потока Φ_B – вебер [Вб]: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$.

Открытие явления электромагнитной индукции имело исключительно важное научное и практическое значение, так как было доказано возможность получения электрического тока с помощью магнитного поля. На базе этого явления в последующие годы были созданы электрические двигатели, генераторы и трансформаторы.

5.5.2. Явление самоиндукции

Всякое изменение электрического тока в замкнутом контуре порождает вокруг себя магнитное поле, индукция B которого, по закону Био – Савара – Лапласа [см. (4.9)], пропорциональна току I . Отсюда вытекает, что ток I в контуре и создаваемый им магнитный поток Φ_B через контур пропорциональны друг другу:

$$\Phi_B = LI, \quad (5.32)$$

где L – **индуктивность контура** – коэффициент пропорциональности между Φ_B и I , зависящий от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств среды, окружающей контур; [(5.32) записана для *неферромагнитной среды*].

Явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется *самоиндукцией*.

Единица *индуктивности* L – *генри* [Гн]; 1 Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при силе тока в 1 А равен 1 Вб:

$$1 \text{ Гн} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}.$$

Выразим ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s через индуктивность L контура и силу тока I в нем:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

[учли закон Фарадея (5.31)].

Если контур *не деформируется* и среда, заполняющая магнитное поле контура, *неферромагнитна* [т. е. магнитная проницаемость среды $\mu = \text{const}$], то его индуктивность остается постоянной $L = \text{const}$ и

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}, \quad (5.33)$$

где знак « \rightarrow » обусловлен правилом Ленца, согласно которому наличие индуктивности в контуре противодействует изменению тока в нем, т. е. замедляет его возрастание или убывание.

Таким образом, индуктивность L контура, является мерой его электрической инертности по отношению к изменению силы тока I , т. е. любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

В качестве примера вычислим *индуктивность бесконечно длинного соленоида*, внутри которого возбуждается однородное магнитное поле. Согласно (4.36'), полный магнитный поток Φ_B сквозь соленоид (*потокосцепление* Ψ)

$$\Phi_B = \Psi = NBS = \mu_0\mu\frac{N^2IS}{l}.$$

Подставив выражение для Φ_B в (5.32), найдем формулу для индуктивности L соленоида:

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l} = \mu_0\mu\frac{N^2V}{l^2}, \quad (5.34)$$

т. е. индуктивность L соленоида зависит от числа N витков соленоида, его длины l , площади S , объема V и магнитной проницаемости μ вещества, из которого изготовлен сердечник соленоида.

5.5.3. Токи при размыкании и замыкании цепи

С явлением самоиндукции связаны так называемые экстратоки замыкания и размыкания [*экстратоки самоиндукции*]. По правилу Ленца [см. п. 5.5.1] *дополнительные токи*, возникающие вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы препятствовать изменению тока в цепи, т. е. направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении источника тока экстратоки имеют такое же направление, что и ослабевающий ток. Следовательно, наличие индуктивности L в цепи приводит к замедлению исчезновения или установления тока в цепи.

Закон изменения силы тока в цепи, содержащей источник тока с ЭДС \mathcal{E} , резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 49) [внутренним сопротивлением r источника тока пренебрегаем], *при ее размыкании и замыкании*:

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (5.35)$$

где $I_0 = \mathcal{E}/R$ – начальный ток; $\tau = L/R$ – *время релаксации* [τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз].

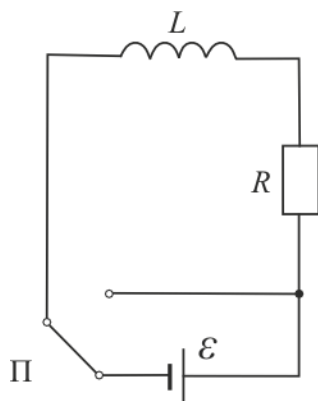


Рис. 49

1. При выключении (размыкании) источника ЭДС $\mathcal{E} = 0$ и формула (5.35) имеет вид

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.36)$$

Сила тока в цепи постепенно уменьшается по экспоненциальному закону (5.36) от начального значения I_0 до нуля (рис. 50, кривая 1), причем тем быстрее, чем меньше постоянная времени τ , т. е. чем больше сопротивление R цепи и чем меньше ее индуктивность L .

2. При включении (замыкании) в цепь источника ЭДС начальный ток $I_0 = 0$ и формула (5.35) имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (5.37)$$

Сила тока возрастает от нуля ($I = 0$) и асимптотически стремится до значения $I_0 = \mathcal{E}/R$, соответствующего силе постоянного тока (рис. 50, кривая 2), причем тем быстрее, чем больше постоянная времени τ , т. е. чем меньше индуктивность L цепи и больше ее сопротивление R .

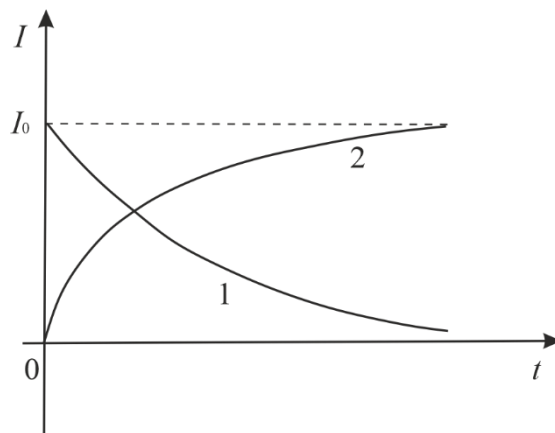


Рис. 50

[1. Размыкание цепи. Под действием внешней ЭДС в цепи течет постоянный ток (начальный ток)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (5.35')$$

(внутренним сопротивлением r источника тока пренебрегаем).

В момент времени $t = 0$ отключим источник тока, замкнув одновременно цепь коротко переключателем П. Ток в катушке индуктивностью L (экстраток размыкания) начнет убывать, что приведет к возникновению ЭДС самоиндукции [см. (5.33)], противодействующей

этому убыванию. Экстраток размыкания направлен в ту же сторону, что и основной ток, поэтому сила тока в контуре убывает постепенно. По закону Ома для замкнутой цепи с общим сопротивлением R , сила тока в цепи

$$IR = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (5.35'')$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \quad (5.35''')$$

Разделив в (5.35''') переменные, получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

Интегрируя это уравнение по I (от I_0 до I) и t (от 0 до t), получим

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt, \quad \text{или} \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t,$$

откуда

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (5.36)$$

где $\tau = L/R$ – *время релаксации*; τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз.

2. Замыкании цепи. В цепи кроме внешней ЭДС \mathcal{E} , будет действовать ЭДС самоиндукции (5.33), препятствующая, согласно правилу Ленца, возрастанию тока. По закону Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad \text{или} \quad \frac{dI}{I - I_0} = -\frac{R}{L}dt \quad (5.37')$$

[учли $I_0 = \mathcal{E}/R$]. Введя переменную $u = I - I_0$, откуда $du = dI$, преобразуем уравнение (5.37') к виду

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}.$$

В момент замыкания ($t = 0$) сила тока $I = 0$ и $u_0 = -I_0$; в момент времени t сила тока I , переменная $u = I - I_0$. Следовательно, интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau}, \quad \text{или} \quad \ln \frac{I - I_0}{-I_0} = -\frac{t}{\tau}, \quad \frac{I - I_0}{-I_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I - I_0 = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

[$\tau = L/R$ – время релаксации] откуда

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (5.37'')$$

5.5.4. Взаимная индукция

Взаимной индукцией двух контуров называется возникновение ЭДС индукции в одном из контуров при изменении силы тока в другом. Причиной проявления индукционного тока в замкнутом контуре является переменный электрический ток, протекающий в близко расположенных проводниках.

Явление взаимной индукции удобно рассмотреть на примере двух неподвижных контуров 1 и 2, расположенных близко друг к другу (рис. 51). Если в контуре 1 течет ток I_1 , то он создает через контур 2 магнитный поток Φ_{21} , пропорциональный I_1 [см. (5.32)]

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1 \quad (5.38)$$

[поле, создающее поток Φ_{21} , изображено на рис. 51 сплошными линиями].

Аналогично при протекании в контуре 2 тока силы I_2 возникает сцепленный с контуром 1 магнитный поток

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2 \quad (5.39)$$

[поле, создающее поток Φ_{12} , изображено на рис. 51 штриховыми линиями].

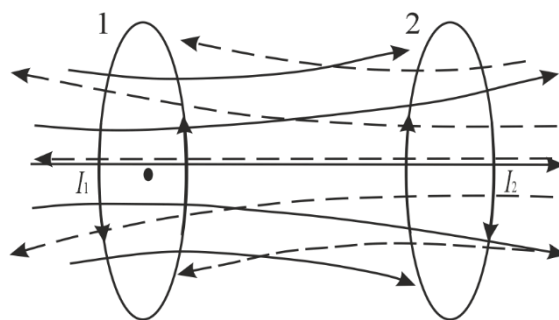


Рис. 51

Изменение силы тока в одном из контуров приведет к появлению ЭДС индукции в другом. Согласно закону Фарадея [см. (5.31)], соответственно ЭДС, индуцируемые в первом и втором контурах,

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (5.40)$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (5.41)$$

Коэффициенты пропорциональности L_{21} и L_{12} , зависящие от геометрии контуров, размеров, их взаимного расположения и магнитной проницаемости окружающей контуры среды, называются **взаимной индуктивностью контуров**.

В отсутствие ферромагнитных сред эти коэффициенты равны между собой:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (5.42)$$

Единица *взаимной индуктивности* L_{12} – *генри* [Гн].

Пример. Найдем взаимную индуктивность двух катушек, состоящих из N_1 и N_2 витков провода, намотанных на общий тороидальный сердечник (рис. 52).

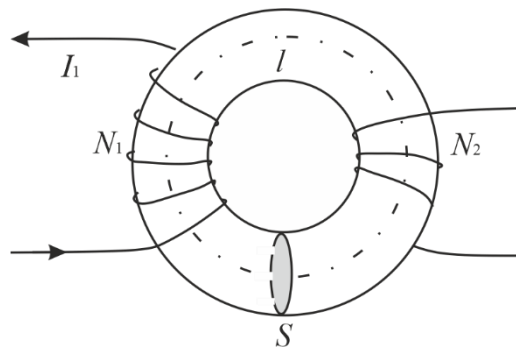


Рис. 52

Линии магнитной индукции сосредоточены внутри сердечника (см. п. 4.7) и однородны. Если по первой катушке течет ток I_1 , то магнитная индукцию B_1 поля этого тока, согласно формуле (4.40):

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_1}{l}, \quad (5.43)$$

где l – длина сердечника по средней линии; μ – магнитная проницаемость сердечника. Потокосцепление взаимной индукции *второй обмотки* (катушки)

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 S = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S I_1}{l}, \quad (5.44)$$

где S – площадь витков, равная площади поперечного сечения сердечника. Сопоставление выражения (5.44) с формулой (5.38) дает

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (5.45)$$

Если сердечник сделан из диа- или парамагнетика, то μ не зависит от силы тока I_1 и $L_{21} = \text{const}$. Для L_{12} получим аналогичное выражение в соответствии с формулой (5.45). Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (5.46)$$

[Если сердечник изготовлен из ферромагнетика ($\mu \gg 1$), то формула (5.46) несправедлива, поскольку магнитная проницаемость μ зависит от напряженности H магнитного поля (см. п. 5.4)].

Явление взаимной индукции используют в *трансформаторах* – устройствах, предназначенных для повышения или понижения напряжения переменного тока (при неизменной частоте) и для передачи электрической энергии на расстояние.

В простейшем варианте трансформатор представляет собой две катушки (обмотки) с различным количеством витков (N_1 и N_2), намотанных на общий ферромагнитный сердечник (рис. 53). Так как концы первичной обмотки присоединены к источнику переменного напряжения с ЭДС \mathcal{E}_1 , то в ней возникает переменный ток I_1 , создающий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток Φ_B . Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной – ЭДС самоиндукции. Величина индуцированной ЭДС (\mathcal{E}_1 или \mathcal{E}_2) в катушках пропорциональна числу витков (N_1 или N_2) в них, поэтому трансформатором можно повышать или понижать напряжение в широких пределах, выбирая соответствующее отношение числа витков в катушках:

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (5.47)$$

$$\mathcal{E}_2 = N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.48)$$

[учли закон Ома (для тока I_1 первичной обмотки: $\mathcal{E}_1 - d(N\Phi_B)/dt = I_1 R_1$); падение напряжения $I_1 R_1$ на сопротивление R_1 при быстропеременных полях мало по сравнению с каждой из двух ЭДС; R_1 – сопротивление первичной обмотки].

Из выражений (5.47) и (5.48), получим

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1}\mathcal{E}_1 = -k\mathcal{E}_1, \quad (5.49)$$

где знак «−» показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе; $k = N_2/N_1$ – называется **коэффициентом трансформации** [показывает, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной обмотке].

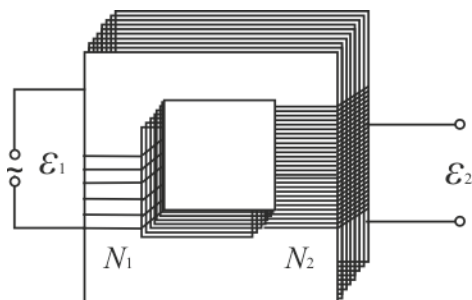


Рис. 53

Коэффициент полезного действия [это отношение мощности на зажимах вторичной обмотки к мощности, потребляемой первичной обмоткой] современных трансформаторов составляет $\eta = 95 \div 99 \%$, поэтому применяя закон сохранения энергии, можем записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\mathcal{E}_2 I_2 \approx \mathcal{E}_1 I_1,$$

откуда, учитывая формулу (5.49), получим

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = k, \quad (5.50)$$

т. е. токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

[Если $k > 1$ – **повышающий трансформатор** – увеличивает переменную ЭДС и понижает ток (применяются для передачи электроэнергии на большие расстояния); если $k < 1$ – **понижающий трансформатор** – уменьшает ЭДС и повышает ток (применяются, например, при электросварке, так как для нее требуется большой ток при низком напряжении). Потери энергии, которые в современных трансформаторах не превышают 2 %, в первую очередь, связаны с выделением в обмотках джоулевой теплоты, появлением вихревых токов (токов Фуко) и переманчиванием ферромагнетика].

5.5.5. Токи Фуко. Скин-эффект

Если индукционные токи возбуждаются в массивных сплошных проводниках, то они могут достигать больших значений и вызывать сильный нагрев проводника. Впервые явление нагрева массивных проводников в переменном магнитном поле наблюдал французский физик Ж. Фуко в 1855 г. Индукционные токи, возникающие в массивных сплошных проводниках, находящихся в переменном магнитном поле называют *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Линии такого тока, как и силовые линии вихревого электрического поля, этот ток индуцирующего, замкнуты. Согласно правилу Ленца, токи Фуко направлены так, чтобы своим действием противодействовать причине, которая их вызвала. Поэтому проводники, движущиеся в сильном магнитном поле, тормозятся в результате взаимодействия вихревых токов и магнитного поля. Это используется в демпферных приспособлениях для успокоения гальванометров, сейсмографов и рамок иных измерительных приборов.

Вихревые токи вызывают сильный нагрев проводника, что позволяет использовать их для плавления металлов в вакууме, получая особо чистые материалы. Индукционные печи, которые используются при этом, представляют собой катушки, по которым проходит большой высокочастотный ток. При помещении внутрь катушки проводящего тела в нем возникают вихревые токи, вызывающие его сильный нагрев. Таким способом осуществляется прогрев металлических частей вакуумных установок.

В некоторых случаях токи Фуко вредны. Они вызывают сильный нагрев сердечников трансформаторов и поэтому их изготавливают из тонких пластин, разделенных слоем диэлектрика. Токами Фуко обусловлен и так называемый *скин-эффект* (от англ. skin – кожа) или *поверхностный эффект*. При прохождении переменного тока по проводнику внутри проводника магнитное поле изменяется. Изменяющееся во времени магнитное поле порождает в проводнике вихревые токи самоиндукции. Плоскости вихревых токов в случае цилиндрического проводника проходят через ось проводника. Вихревые токи препятствуют

изменению основного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Следовательно, для переменного тока сопротивление внутри проводника больше сопротивления на поверхности ($R_{\text{вн}} > R_{\text{пов}}$). По этой причине плотность переменного тока неодинакова по сечению: j_{max} на поверхности, j_{min} внутри на оси.

Следствием скин-эффекта является то, что ВЧ-токи текут по тонкому поверхностному слою, поэтому проводники для ВЧ-токов делают полыми, а часть внешней поверхности покрывают серебром. На этом основан метод поверхностной закалки металлов, у которых при нагреве токами высокой частоты, происходит разогрев только поверхностного слоя. Это позволяет получить изделия с высокой стойкостью к истиранию поверхности, но не обладающие хрупкостью, как при обычной закалке.

5.5.6. Энергия магнитного поля

При возрастании электрического тока в замкнутом контуре возникает ЭДС самоиндукции, противодействующая увеличению тока [причем магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока]. Для увеличения силы тока необходимо, чтобы источник сторонних ЭДС совершил работу против ЭДС самоиндукции:

$$dA = -\varepsilon_s I dt = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI \quad (5.51)$$

[предполагается, что индуктивность L соленоида не зависит от I ($L = \text{const}$)].

Если ток в контуре изменяется от нуля до некоторого значения I , источник тока должен совершить работу A , которая пойдет на создание магнитного поля, обладающего энергией

$$W_M = \int_0^I dA = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (5.52)$$

В качестве примера рассмотрим однородное *магнитное поле внутри длинного соленоида*. Заменяя в формуле (5.52) величины L и I их значениями из формул (5.34) и (4.36) соответственно, получим

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \mu \frac{N^2 V}{l^2} \cdot \left(\frac{Bl}{\mu_0 \mu N} \right)^2 = \frac{B^2 V}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2} V = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V, \quad (5.53)$$

где $V = Sl$ – объем соленоида; $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ [см. (5.14)].

Поскольку поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, его энергия W_M распределена равномерно по всему объему V поля с *постоянной объемной плотностью [магнитного поля]*

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (5.54)$$

Выражение (5.54) справедливо только для сред, для которых B от H линейная, т. е. оно относится только к пара- и диамагнетикам.

Зная плотность энергии w_M поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в объеме V

$$W_M = \int_V w_M dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (5.55)$$

Если в пространстве одновременно присутствуют связанные между собой электрические и магнитные поля, то такое общее поле характеризуется объемной плотностью энергии

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (5.56)$$

Примеры решения задач

5.1. Соленоид длиной $l = 16$ см, площадью поперечного сечения $S = 12$ см² и общим числом витков $N = 300$ находится в диамагнитной среде. Найдите силу тока в обмотке соленоида, если его индуктивность $L = 0,8$ мГн и намагниченность J внутри соленоида равна 18 А/м.

Дано: $l = 0,16$ м; $S = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м²; $N = 300$; $L = 8 \cdot 10^{-4}$ Гн; $J = 18$ А/м.

Найти: I .

Решение. Намагниченность внутри соленоида

$$J = \chi H, \quad (1)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества; H – напряженность магнитного поля.

Так как магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$, то

$$J = (\mu - 1)H. \quad (2)$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl = \sum_k I_k, \quad (3)$$

т. е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.

Для соленоида $Hl = NI$, откуда

$$H = \frac{NI}{l}. \quad (4)$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \quad (5)$$

откуда

$$\mu = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S}. \quad (6)$$

Подставив выражения (4) и (6) в формулу (2), получим

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1 \right) \frac{NI}{l}, \quad (7)$$

откуда

$$I = \frac{Jl}{N \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1 \right)}. \quad (8)$$

Ответ: $I = 0,17$ А [учли, что для диамагнетиков $\chi < 0$].

5.2. Найдите объемную плотность энергии w_M , энергию W_M и потокосцепление Ψ соленоида без сердечника с параметрами: число витков 1500, длина 0,8 м, диаметр 5 см, если по обмотке соленоида течет ток 0,4 А.

Дано: $N = 1500$; $l = 0,8$ м; $D = 0,05$ м; $I = 0,4$ А; $\mu = 1$.

Найти: w_M ; W_M ; Ψ .

Решение. Напряженность магнитного поля соленоида

$$H = \frac{IN}{l}, \quad (1)$$

его индукция

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu \frac{IN}{l}. \quad (2)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{W_M}{Sl}, \quad (3)$$

через характеристики поля,

$$w_M = \frac{BH}{2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu I^2 N^2}{l^2} \quad (4)$$

[учли формулы (1) и (2)].

Из формулы (3) найдем энергию магнитного поля

$$W_M = w_M Sl = w_M \frac{\pi D^2}{4} l, \quad (5)$$

где $S = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения соленоида.

Потокосцепление Ψ соленоида

$$\Psi = BSN = B \frac{\pi D^2}{4} N = \mu_0 \mu I \frac{N \pi D^2}{4} N = \mu_0 \mu I \frac{\pi D^2}{4l} N^2 \quad (6)$$

[учли формулу (2)].

Ответ: $w_M = 0,353$ Дж/м³; $W_M = 554,21$ мкДж; $\Psi = 2,77$ мВб

5.3. Найдите ЭДС индукции \mathcal{E}_i , возникающей в круговом проволочном витке с радиусом 40 см в момент времени $t = 12$ с, если магнитное поле изменяется по закону $B = B_0 \cos \omega t$ ($B_0 = 3$ мТл, $\omega = 6$ рад/с), и нормаль \vec{n} к витку образует с направлением вектора магнитной индукции \vec{B} угол 60° .

Дано: $B = B_0 \cos \omega t$; $R = 0,4$ м; $t = 12$ с; $B_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл; $\omega = 6$ рад/с; $\alpha = 60^\circ$.

Найти: \mathcal{E}_i .

Решение. Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где магнитный поток, сцепленный с круговым витком при произвольном его расположении относительно магнитного поля,

$$\Phi = BS \cos \alpha. \quad (2)$$

По условию задачи $B = B_0 \cos \omega t$, а площадь кругового витка $S = \pi R^2$, поэтому

$$\Phi = \pi R^2 B_0 \cos \omega t \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (1), получим

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} (\pi R^2 B_0 \cos \omega t \cos \alpha) = \pi R^2 B_0 \omega \cos \alpha \sin \omega t. \quad (4)$$

Ответ: $\mathcal{E}_i = 1,5$ мВ.

5.4. Соленоид без сердечника длиной 15 см и диаметром 3 см имеет плотную однослойную намотку алюминиевым проводом диаметром 0,2 мм. За время 0,25 с сила тока в нем равномерно убывает с 4 А до 0. Найдите ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s в соленоиде.

Дано: $l = 0,15$ м; $D = 3 \cdot 10^{-2}$ м; $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $t = 0,25$ с; $I_1 = 4$ А; $I_2 = 0$; $\mu = 1$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Найти: \mathcal{E}_s .

Решение. При изменении силы тока в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где $L = \mu_0 \mu n^2 l S$ – индуктивность соленоида [μ_0 – магнитная постоянная; n – число витков на единице длины соленоида (при плотной намотке $n = 1/d$); l – длина соленоида; $S = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения соленоида; D – диаметр соленоида; μ – магнитная проницаемость вещества].

Таким образом, ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = \left| -\mu_0 \mu \frac{\pi D^2 l}{4 d^2} \frac{dI}{dt} \right| = \mu_0 \mu \frac{\pi D^2 l}{4 d^2} \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (2)$$

Ответ: $\mathcal{E}_s = 53,24$ мВ.

5.5. Найдите энергию и объемную плотность энергии магнитного поля соленоида без сердечника, имеющего плотную однослойную намотку проводом диаметром 0,3 мм, если по соленоиду течет ток силой 0,25 А. Длина и диаметр соленоида соответственно равны 25 см и 7 см.

Дано: $d = 3 \cdot 10^{-4}$ м; $I = 0,25$ А; $l = 0,25$ м; $D = 7 \cdot 10^{-2}$ м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu = 1$.

Найти: W_M ; w_M .

Решение. Энергия магнитного поля внутри соленоида равна:

$$W_M = \frac{LI^2}{2}, \quad (1)$$

где $L = \mu_0 \mu n^2 l S$ – индуктивность соленоида [μ_0 – магнитная постоянная; l – длина соленоида; n – число витков на единице длины соленоида (при плотной намотке $n = 1/d$); $S = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения соленоида; D – диаметр соленоида; μ – магнитная проницаемость вещества].

Подставив выражения для индуктивности $L = \mu_0 \mu n^2 l S$ в (1), найдем:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu \pi D^2 l I^2}{8 d^2}. \quad (2)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия единицы объема)

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{W_M}{Sl} = \frac{4W_M}{\pi D^2 l}. \quad (3)$$

Ответ: $W_M = 0,42$ мДж; $w_M = 0,44$ Дж/м³.

Задачи

45. Найдите намагниченность J и объемную плотность энергии w_m магнитного поля соленоида с железным сердечником (длина соленоида $l = 0,5$ м, число витков $N = 250$), если индукция магнитного поля в соленоиде $B = 1,5$ Тл и по нему течет ток силой $I = 4$ А. Ответ: 1,192 МА/м; 1,5 кДж/м³

46. Найдите потокосцепление Ψ , энергию W_m , объемную плотность энергии w_m соленоида без сердечника с параметрами: число витков $N = 1500$, длина $l = 0,8$ м, диаметр $D = 5$ см, если по обмотке соленоида течет ток $I = 0,4$ А.

Ответ: 0,353 Дж/м³; 554,21 мкДж; 2,77 мВб

47. Катушка радиуса 7 см, состоящая из 450 витков проволоки, находится в однородном магнитном поле, индукция которого равномерно увеличивается на 0,15 Тл за каждые 0,1 с. Ось катушки составляет с линиями поля угол 30°. Найдите величину ЭДС индукции \mathcal{E}_i , возникающей в рамке. Ответ: 9 В

48. Квадратная рамка со стороной $a = 12$ см из алюминиевой проволоки находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл. Линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. Форму рамки, не изменяя ее ориентации по отношению к полю, из квадратной превращают в круглую за время 3 с. Найдите среднюю величину ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей при этом в рамке.

Ответ: 2,63 мВ

49. Квадратная рамка площадью $S = 25$ см² вращается с частотой $\nu = 30$ Гц в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,25$ Тл. Ось вращения находится в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Найдите величину максимальной ЭДС индукции \mathcal{E}_{im} , возникающей в рамке. Ответ: 0,12 В

50. Соленоид без сердечника длиной $l = 30$ см и диаметром $D = 5$ см имеет плотную однослойную намотку медным проводом диаметром $d = 0,1$ мм. За время $t = 0,2$ с сила тока в нем равномерно убывает с $I_1 = 7$ А до $I_2 = 0$. Найдите ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s в соленоиде. Ответ: 2,59 В

51. Источник ЭДС замыкают на катушку сопротивлением 15 Ом и индуктивностью 0,3 Гн. Найдите время t , за которое сила тока замыкания достигнет 0,75 предельного значения силы тока ($I = 0,75I_0$). Ответ: 27,73 мс

52. 48. При равномерном возрастании силы тока от $I_1 = 0$ до $I_2 = 5$ А за время $t = 0,5$ мин в соленоиде накапливается энергия $W = 30$ Дж. Найдите ЭДС индукции \mathcal{E}_i , возникающей в соленоиде за это время. Ответ: -0,4 В

53. Найдите объемную плотность энергии w_m магнитного поля в центре тонкого кольца радиуса $R = 5$ см, равномерно заряженного зарядом $q = 0,5$ мкКл, если кольцо вращается вокруг своей оси с частотой $\nu = 80$ Гц. Ответ: 0,1 пДж/м³

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. Электрический заряд и его единица. Дискретность заряда. Элементарный электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. Проводники (проводники первого рода; проводники второго рода), диэлектрики и полупроводники.
2. Точечный электрический заряд. Закон Кулона в векторном и скалярном виде. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона в СИ. Электрическая постоянная ϵ_0 .
3. Электростатическое поле. Пробный точечный положительный заряд. Напряженность электростатического поля. Единицы напряженности. Линии напряженности электростатического поля. Графическое изображение электростатического поля с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Выражение для напряженности электростатического поля точечного заряда в векторном и скалярном виде.
4. Электрическое поле в вакууме и в веществе. Диэлектрическая проницаемость ϵ . Поток вектора напряженности электростатического поля Φ_E . Единица потока вектора напряженности электростатического поля.
5. Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей. Электрический диполь. Плечо диполя. Электрический момент диполя (дипольный момент) \vec{p} . Напряженность поля на продолжении оси диполя. Напряженность поля на перпендикуляре, восстановленном к оси из его середины.
6. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Объемная плотность заряда ρ . Выражение для теоремы Гаусса через объемную плотность заряда.
7. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме: поле равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ бесконечной плоскости. Выразите напряженность поля с использованием единичного вектора оси x . Нарисуйте график для $E(x)$ по обе стороны плоскости.
8. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме: поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей (плоскости заряжены равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$). Нарисуйте график $E(x)$ между плоскостями и вне их.
9. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме: поле равномерно заряженной сферической поверхности радиусом R с общим зарядом q (сфера заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$). Нарисуйте график $E(r)$ внутри и вне сферы.
10. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме: поле объемно заряженного шара радиусом R с общим зарядом q (шар заряжен

равномерно с объемной плотностью заряда ρ). Нарисуйте график $E(r)$ внутри и вне шара.

11. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей в вакууме: поле бесконечного цилиндра (нити) радиусом R , заряженного равномерно с линейной плотностью заряда τ . Нарисуйте график $E(r)$ вне цилиндра.

12. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциальный характер электростатического поля. Покажите, что вектор напряженности всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

13. Потенциал – энергетическая характеристика электростатического поля. Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q_0 . Разность потенциалов. Работа по переносу заряда в электростатическом поле. Единица потенциала и разности потенциалов.

14. Общее выражение, связывающее потенциал с напряженностью (напряженность как градиент потенциала). Эквипотенциальные поверхности. Получите выражение для потенциала поля точечного заряда, исходя из выражения для напряженности этого поля.

15. Принцип суперпозиции как фундаментальное свойство полей. Общие выражения для напряженности и потенциала поля, создаваемого в точке с радиус-вектором \vec{r} системой точечных зарядов q_i , находящихся в точках с координатами \vec{r}_i .

16. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ бесконечной плоскости. Нарисуйте график $\varphi(r)$.

17. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля между двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями, с поверхностной плотностью заряда σ , расстояние между которыми равно d . Нарисуйте график $\varphi(r)$.

18. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля равномерной заряженной сферической поверхности радиусом R , с общим зарядом q , между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы. Нарисуйте график $\varphi(r)$ внутри и вне сферы.

19. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля объемно заряженного шара радиусом R , с общим зарядом q , между двумя точками, лежащими внутри шара на расстояниях r'_1 и r'_2 от его центра. Нарисуйте график $\varphi(r)$.

20. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиусом R , с линейной плотностью заряда τ . Нарисуйте график $\varphi(r)$.

21. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков. Электронная, ориентационная и ионная поляризация диэлектриков.
22. Поляризованность \vec{P} диэлектрика (вектор поляризации). Диэлектрическая восприимчивость ϵ вещества. Связанные электрические заряды. Связь поверхностной плотности связанных зарядов с напряженностью электрического поля. Напряженность поля в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость ϵ среды.
23. Вектор электрического смещения \vec{D} . Единица электрического смещения. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
24. Электроемкость уединенного проводника. Единица электроемкости. Выражение для электроемкости уединенного шара радиуса R , находящегося в однородной диэлектрической среде.
25. Конденсаторы. Виды конденсаторов. Электроемкость конденсатора. Пробивное напряжение. Выражение для электроемкости плоского конденсатора.
26. Электроемкость конденсатора. Получите выражение для электроемкости цилиндрического конденсатора длины l с радиусами обкладок r_1 и r_2 .
27. Электроемкость конденсатора. Получите выражение для электроемкости сферического конденсатора с радиусами обкладок r_1 и r_2 .
28. Получите выражение для электроемкости при параллельном соединении конденсаторов.
29. Получите выражение для электроемкости при последовательном соединении конденсаторов.
30. Энергия электрического взаимодействия системы неподвижных точечных зарядов.
31. Энергия заряженного уединенного проводника.
32. Энергия заряженного конденсатора.
33. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии электростатического поля (энергия единицы объема).
34. Определение электрического тока. Ток проводимости. Конвекционный ток. Постоянный электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Единицы силы тока и плотности тока. Получите выражение для плотности тока через среднюю скорость упорядоченного движения зарядов и их концентрацию.
35. Источники электрического тока. Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС).
36. Напряжение. Закон Ома для участка цепи. Электрическое сопротивление. Единица сопротивления. Электрическая проводимость. Единица проводимости. Удельное электрическое сопротивление. Единица удельного электрического сопротивления. Удельная электрическая проводимость. Единица удельной электрической проводимости.

37. Закон Ома в дифференциальной форме. Зависимость сопротивления R и удельного сопротивления ρ от температуры. Графики зависимости R и ρ от температуры. Температурный коэффициент сопротивления α . Критическая температура. Сверхпроводимость. Термометры сопротивления. Термисторы.
38. Работа и мощность тока. Единицы работы и мощности электрического тока. Закон Джоуля – Ленца. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Удельная тепловая мощность тока.
39. Закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме (обобщенный закон Ома). Закон Ома для замкнутой цепи.
40. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.
41. Элементарная классическая теория электропроводности металлов.
42. Вывод основных законов электрического тока в классической теории проводимости металлов: закон Ома в локальной (дифференциальной) форме.
43. Вывод основных законов электрического тока в классической теории проводимости металлов: закон Джоуля – Ленца в локальной (дифференциальной) форме.
44. Зависимость удельного сопротивления проводников от температуры. Опытные законы и затруднения классической теории электропроводности металлов.
45. Работа выхода электронов из металла. Поверхностный скачок потенциала. Единица работы выхода – электрон-вольт (эВ).
46. Электрическое сопротивление при параллельном и последовательном соединении проводников.
47. Магнитное поле и его характеристики. опыты Эрстеда. Рамка с током и правило правого винта. Вектор магнитного момента рамки с током \vec{p}_m и его единица. Вектор магнитной индукции \vec{B} . Единица магнитной индукции.
48. Графическое изображение магнитных полей с помощью линий магнитной индукции. Вихревой характер магнитного поля.
49. Вектор напряженности \vec{H} . Единица напряженности магнитного поля. Магнитная постоянная μ_0 и магнитная проницаемость среды (вещества) μ . Связь между \vec{B} и \vec{H} для однородной изотропной среды.
50. Закон Био – Савара – Лапласа в векторной и скалярной формах для магнитной индукции поля элемента тока. Сделайте соответствующий чертеж. Принцип суперпозиции для магнитного поля.
51. Получите на основе закона Био – Савара – Лапласа выражение для нахождения индукции магнитного поля прямого проводника с током бесконечной длины.
52. Получите на основе закона Био – Савара – Лапласа выражение для нахождения индукции магнитного поля в центре кругового проводника с током. Магнитный момент витка с током.

53. Закон Ампера. Действие магнитного поля на ток. Сила, действующая на элемент проводника с током в векторной и скалярной формах (сила Ампера). Правило левой руки.
54. Действие магнитного поля на ток. Сила, действующая на прямолинейный проводник с током (закон Ампера).
55. Сила взаимодействия (на единицу длины) между двумя прямыми параллельными проводниками с токами одинаковой и противоположной направленности I_1 и I_2 .
56. Получите выражение для силы взаимодействия (на элемент $d\vec{l}$ проводника) между двумя прямыми длинными параллельными проводниками с токами.
57. Индукция магнитного поля точечного заряда q , свободно движущегося с нерелятивистской скоростью v , в векторной и скалярной формах. Направление вектора \vec{B} (покажите на рисунке).
58. Действие магнитного поля на движущийся заряд (сила Лоренца в векторной и скалярной формах). Определение направления силы Лоренца с помощью правила левой руки. Формула Лоренца.
59. Движение заряженных частиц в магнитном поле (радиус кривизны и шаг винтовой траектории движения; скорость, период и частота вращения частицы).
60. Циркуляция вектора \vec{B} магнитного поля в вакууме. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока для магнитного поля в вакууме).
61. Получите с помощью теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции выражение для нахождения индукции магнитного поля бесконечно длинного проводника с током.
62. Магнитное поле соленоида. Выражение для индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида.
63. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Получите с помощью этой теоремы выражение для нахождения магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида.
64. Магнитное поле тороида. Получите с помощью теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля выражение для индукции магнитного поля внутри тороида.
65. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) Φ_B . Единица магнитного потока.
66. Теорема Гаусса для поля \vec{B} (поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность). Вихревой характер магнитного поля.
67. Расчет потока вектора \vec{B} сквозь соленоид с помощью теоремы Гаусса. Потокосцепление.

68. Получите выражение для вращающего момента, действующего на контур с током в однородном магнитном поле.
69. Работа по перемещению проводника и контура с током во внешнем однородном магнитном поле.
70. Поведение витка с током во внешнем однородном магнитном поле. Устойчивое и неустойчивое положение витка.
71. Энергия витка с током во внешнем однородном магнитном поле. Работа при повороте витка вокруг неподвижной оси.
72. Явление электромагнитной индукции. Классические опыты Фарадея.
73. Закон Фарадея для электромагнитной индукции. Электродвижущая сила электромагнитной индукции. Правило Ленца. Получите единицу для ЭДС электромагнитной индукции (В) через единицу магнитного потока (Вб).
74. Получите закон Фарадея для электромагнитной индукции на основе закона сохранения энергии.
75. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей в проводнике, движущемся в магнитном поле.
76. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей в однородном магнитном поле при равномерном вращении рамки (переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_m \sin \omega t$).
77. Индуктивность L контура с током. Единица индуктивности. Явление самоиндукции. Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея, получите формулу для ЭДС самоиндукции.
78. Получите выражение для индуктивности бесконечного длинного соленоида.
79. Экстратоки самоиндукции. Токи при размыкании и замыкании цепи. Время релаксации. Графики зависимости силы тока от времени $I(t)$.
80. Явление взаимной индукции. Коэффициенты взаимной индуктивности контуров. Получите выражение для взаимной индуктивности двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник.
81. Трансформаторы. Коэффициент трансформации. Повышающие и понижающие трансформаторы.
82. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Часть 2. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция 6 – 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

6.1. Вихревое электрическое поле

Максвелл высказал гипотезу, что *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле \vec{E}_B* , которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Контур лишь обнаруживает это поле. ЭДС индукции \mathcal{E}_i равна циркуляции вектора напряженности \vec{E}_B по данному *неподвижному контуру* [согласно Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле \vec{E}_B]:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bl} dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (6.1)$$

где E_{Bl} – проекция вектора \vec{E}_B на направление $d\vec{l}$.

Учитывая формулу (4.32),

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS,$$

получим

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Поскольку контур и поверхность неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (6.2)$$

где символ частной производной по времени подчеркивает тот факт, что интеграл $\int \vec{B} d\vec{S}$ является функцией только от времени.

Циркуляция вектора напряженности *электростатического поля* \vec{E}_q вдоль любого замкнутого контура L равна нулю [см. (1.20)]:

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = \oint_L E_{ql} dl = 0, \quad (6.3)$$

Сравнивая выражения (6.2) и (6.3), видим, что между полями (\vec{E}_B и \vec{E}_q) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора \vec{E}_B в отличие от циркуляции вектора \vec{E}_q не равна нулю. Следовательно, *электрическое поле* \vec{E}_B , возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле (см. п. 4.5), *является вихревым*.

6.2. Ток смещения

Из явления электромагнитной индукции следует, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле \vec{E}_B . Анализируя различные электромагнитные процессы, Максвелл пришел к заключению, что должно существовать и обратное явление: *всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля*. Это утверждение выражает свойство электромагнитного поля (*второе основное положение теории Максвелла*). Для количественной характеристики между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел понятие *тока смещения*.

По теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (2.4), поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность S

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q,$$

где q – алгебраическая сумма *свободных электрических зарядов*, охватываемых этой поверхностью.

Продифференцировав это выражение по времени, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \oint_L \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (6.4)$$

[символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл $\oint \vec{D} d\vec{S}$ является только функцией времени]. Правая часть (6.4) имеет размерность силы тока. Из сравнения (6.4) с формулой (3.7), следует, что $\partial \vec{D} / \partial t$ имеет размерность плотности тока. Максвелл предложил назвать $\partial \vec{D} / \partial t$ *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.5)$$

– плотность тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрического смещения \vec{D} в этой точке.

Током смещения $I_{\text{см}}$ сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (6.6)$$

[На рис. 54 изображены векторы плотностей токов смещения и линии магнитной индукции их полей: *а) при зарядке конденсатора* (усиление электрического поля: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$; вектор $\vec{j}_{\text{см}}$ направлен в ту же сторону, что и \vec{D} , т. е. направления \vec{j} и $\vec{j}_{\text{см}}$ совпадают (рис. 54, *а*)); *б) при разрядке конденсатора* (ослабление электрического поля: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$; вектор $\vec{j}_{\text{см}}$ направлен противоположно вектору \vec{D} ; однако вектор $\partial \vec{D} / \partial t$ опять-таки направлен, как и вектор \vec{j} (рис. 54, *б*)). Из рассмотренных примеров следует, что направление вектора \vec{j} , а следовательно, и вектора $\vec{j}_{\text{см}}$, совпадает с направлением вектора $\partial \vec{D} / \partial t$, как это и следует из формулы (6.5).

Согласно Максвеллу, *ток смещения, подобно обычным токам проводимости, является источником вихревого магнитного поля*, т. е. такого поля, циркуляция напряженности \vec{H} которого по замкнутому контуру не равна нулю].

В диэлектрике вектор электрического смещения \vec{D} , согласно формуле (2.9): $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где \vec{E} – напряженность электростатического поля; \vec{P} – поляризованность (см. п. 2.2).

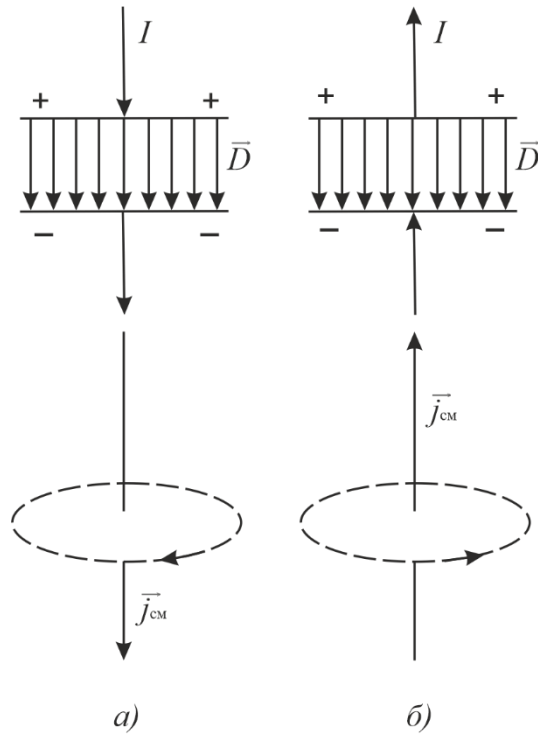


Рис. 54

Тогда плотность тока смещения в диэлектрике, согласно (6.5):

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

где $\varepsilon_0 \cdot \partial \vec{E} / \partial t$ – *плотность тока смещения в вакууме*; $\partial \vec{P} / \partial t$ – *плотность тока поляризации* – тока, обусловленного упорядоченным перемещением связанных зарядов в диэлектрике при изменении его поляризации. [Ток смещения, в отличие от тока проводимости, не сопровождается выделением джоулевой теплоты. Правда, в случае изменения поляризации полярных диэлектриков, т. е. при возникновении в них поляризованного тока, происходит поглощение или выделение теплоты. Однако закономерности этих тепловых эффектов не подчиняются закону Джоуля – Ленца].

Максвелл ввел понятие *полного тока*, равного сумме токов проводимости (а также конвекционных токов) и смещения. *Плотность полного тока*

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Таким образом, в общем случае меняющихся токов магнитное поле определяется не током проводимости, а полным током. Если мы имеем разомкнутый контур, то на концах образовывается лишь ток проводимости. В диэлектрике

же между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости. Поэтому, если под электрическим током понимать полный ток, определяемый формулой (6.8), то оказывается, что в природе все электрические токи замкнуты. Этот важный вывод тоже был получен Максвеллом. Следует отметить, что название «ток смещения» является условным, а точнее исторически сложившимся, так как ток смещения по своей сути – это изменяющееся со временем электрическое поле.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора \vec{H} (закон полного тока), добавив в правую часть уравнения (5.23) полный ток $I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}$ сквозь поверхность \vec{S} , натянутую на замкнутый контур L :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (6.9)$$

Равенство (6.9) представляет собой **обобщенную теорему о циркуляции вектора \vec{H}** : *циркуляция вектора напряженности \vec{H} магнитного поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости и тока смещения, охватываемых этим контуром*. Выражение (6.9) справедливо всегда, свидетельством чего является полное соответствие теории и опыта.

6.3. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теории электрических и магнитных явлений. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании **электромагнитных волн** – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

В основе теории Максвелла лежат четыре уравнения.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (6.10) \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \quad (6.12)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (6.11) \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (6.13)$$

Уравнения (6.10) – (6.13) представляют собой *полную систему уравнений Максвелла в интегральной форме*.

1. Уравнение (6.10) – *циркуляция вектора напряженности \vec{E} суммарного электрического поля* – показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля [см. п. 6.1, формулу (6.2)].

2. Уравнение (6.11) – *обобщенная теорема о циркуляции вектора \vec{H}* – показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями [см. п. 6.2, формулу (6.9)].

3. Уравнение (6.12) – *теорема Гаусса для поля \vec{D}* [см. п. 2.3, формулы (2.11) и (2.12)], которая, как предположил Максвелл, справедлива для любого электрического поля, как стационарного, так и переменного; $\rho dV = q$ – алгебраическая сумма заключенных внутри поверхности свободных электрических зарядов; ρ – объемная плотность свободных зарядов.

4. Уравнение (6.13) – *теорема Гаусса для поля \vec{B}* – теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми [см. п. 4.5, формулу (4.34)].

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического

и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но отсутствуют магнитные.

Для *стационарных полей* ($\vec{E} = \text{const}$ и $\vec{B} = \text{const}$) уравнения Максвелла (6.10) – (6.13) примут вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad (6.10') \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad (6.12')$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad (6.11') \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (6.13')$$

т. е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, а источниками магнитного – только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно постоянные электрическое и магнитное поля.

Полную систему уравнений Максвелла (6.10) – (6.13) необходимо дополнить *материальными уравнениями*, характеризующими электрические и магнитные свойства среды [\vec{E} , \vec{D} , \vec{H} и \vec{B}]; в случае изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных сред и макротокков, подчиняющихся закону Ома, эти уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (6.14)$$

где σ – удельная проводимость вещества.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (6.15) \quad \text{div } \vec{D} = \rho; \quad (6.17)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (6.16) \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (6.18)$$

[Дифференциальные уравнения (6.15) – (6.18) Максвелла получаются из интегральных с помощью двух теорем векторного анализа:

а) теорема Стокса: зная ротор вектора \vec{A} в каждой точке некоторой поверхности S , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру L , ограничивающему S

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}; \quad (6.19)$$

б) теорема Гаусса: зная дивергенцию вектора \vec{A} в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через произвольную замкнутую поверхность S конечных размеров

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV. \quad (6.20).$$

Уравнения Максвелла (6.15) – (6.18) в дифференциальной форме показывают, как связаны между собой характеристики электромагнитного поля и плотности электрических зарядов и токов в каждой точке поля.

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла [(6.10) – (6.13) и (6.15) – (6.18)] эквивалентны. Однако если имеются *поверхности разрыва* – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то *интегральная форма уравнений является более общей*.

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое *электромагнитное поле*. Уравнения Максвелла являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, т. е. их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

6.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

6.4.1. Колебания и их основные характеристики

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемостью во времени. Свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны, переменный электрический ток, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. д.

В зависимости от физической природы колебательного процесса различают колебания *механические, электромагнитные, электромеханические* и др.

Система, совершающая колебания, называется *колебательной*.

Свободными (или *собственными*) **колебаниями** называются колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему. Примером может служить груз, подвешенный на нити и выведенный из положения равновесия, а затем предоставленный самому себе.

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия. Примером могут служить колебания силы тока в электрической цепи, вызываемые ЭДС; колебания маятника, вызываемые переменной внешней силой.

Автоколебания – это незатухающие колебания в системах, поддерживающиеся за счет внешнего источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (периодичностью). Примером могут служить часы, духовые инструменты, сердечно-сосудистая система, паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т. д.

При **параметрических колебаниях** за счет внешнего воздействия происходит изменение какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Простейшими являются *гармонические колебания* – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Их рассмотрение важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто близки к гармоническим; 2) периодические процессы иной формы могут быть представлены как наложение гармонических колебаний.

Если материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат, то зависимость координаты x точки от времени t (рис. 55) определяется выражением

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.21)$$

где $A = |x|_{\max}$ – *амплитуда колебания* [максимальная величина смещения]; ω_0 – *круговая (циклическая) частота*; $(\omega_0 t + \varphi)$ – *фаза колебания* [определяет значение колеблющейся величины от времени t , прошедшего от начала текущего периода колебания]; φ – начальная фаза колебания [определяет значение колеблющейся величины в начальный момент времени (при $t = 0$ $x_0 = A \cos \varphi$)].

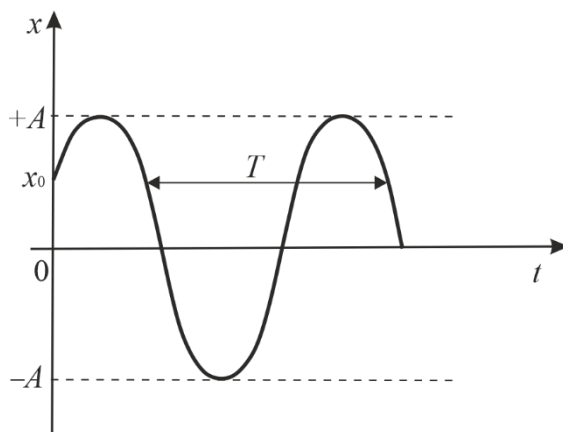


Рис. 55

Период колебаний T – время одного полного колебания [наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение] (см. рис. 55). Период T может быть определен из условия (фаза колебания получает приращение 2π): $\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.22)$$

Число полных колебаний, совершающихся в единицу времени, называется *частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (6.23)$$

Единица частоты ν – герц [Гц]; 1 Гц – частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Из формулы (6.22), получим

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (6.24)$$

6.4.2. Механические гармонические колебания

Если материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат, то зависимость координаты x точки от времени t задается уравнением (6.21).

Скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \quad (6.25)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (6.26)$$

где $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$ – соответственно амплитуды скорости и ускорения. Из соотношений (6.25) и (6.26) видно, что скорость v и ускорение a также изменяются по гармоническому закону.

Пример. Если известны начальные (при $t = 0$) значения величин x : $x(0) = x_0$ и ее производной: $\dot{x}(0) = v_0$, то можно определить амплитуду и начальную фазу колебаний. Из уравнений $x_0 = A \cos \varphi$ и $v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi$ находим $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$ и $\text{tg} \varphi = -v_0/(\omega_0 x_0)$.

Формулу (6.26) можно записать в виде

$$a = -\omega_0^2 x, \quad (6.27)$$

т. е. при гармонических колебаниях вдоль оси x ускорение a пропорционально смещению x тела от положения равновесия.

Как следует из (6.21), (6.25) и (6.26), скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, а ускорение – на π (рис. 56). Ускорение и смещение находятся в противофазе, т. е. в момент времени, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение – наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот.

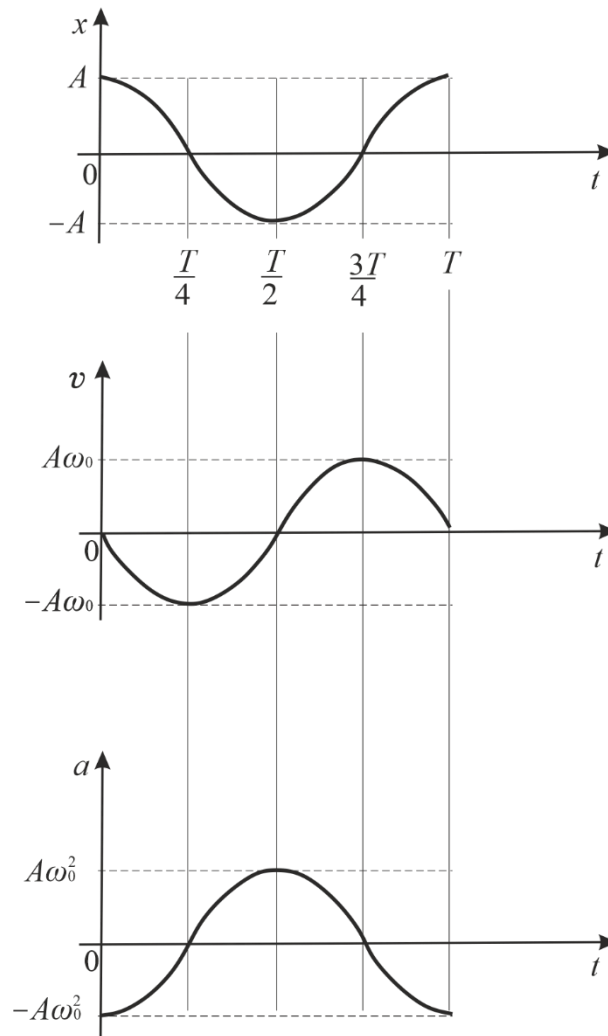


Рис. 56

Из выражения (6.27) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.28)$$

Решением этого уравнения является выражение (6.21).

Сила $F = ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , с учетом (6.27) равна

$$F = -m\omega_0^2 x. \quad (6.29)$$

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (6.30)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F , равна

$$E_{\text{п}} = - \int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (6.31)$$

Сложив (6.30) и (6.31), получим формулу для **полной энергии**:

$$E = E_k + E_{\text{п}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}. \quad (6.32)$$

На рис. 57 представлены графики зависимости x , E_k и $E_{\text{п}}$ от времени.

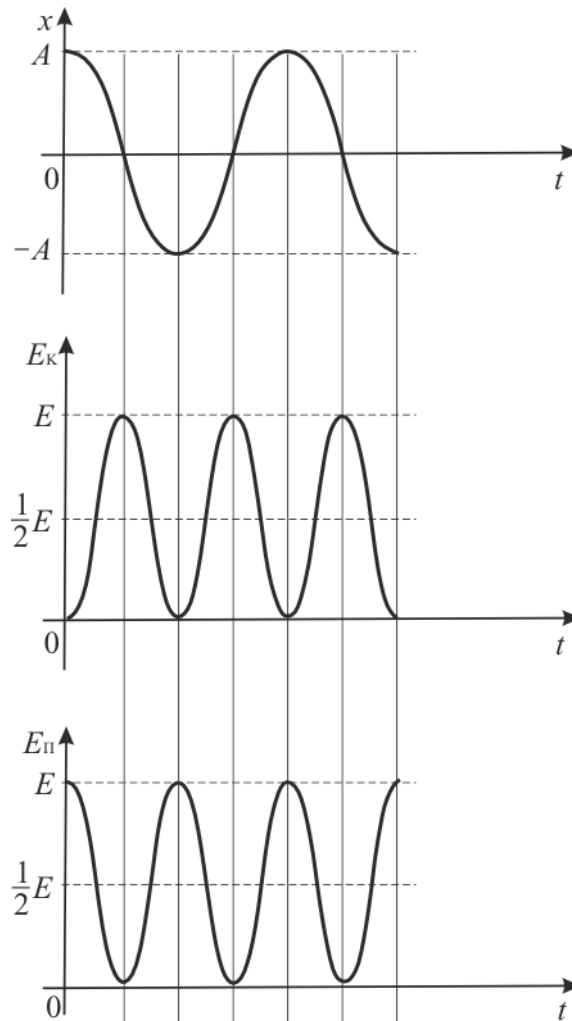


Рис. 57

Из формулы (6.30) и (6.31) следует, что E_k и $E_{\text{п}}$ изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

Поскольку средние значения $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$, из формул (6.30) – (6.32) следует, что

$$\langle E_k \rangle = \langle E_{\text{п}} \rangle = \frac{1}{2}E. \quad (6.33)$$

6.4.3. Маятники

Тела, совершающие под действием приложенных сил колебания вокруг неподвижной точки или оси, называются *маятниками*. Простейшие маятники – тела, колеблющиеся под действием силы тяжести.

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида (6.28):

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (6.34)$$

где s – колеблющаяся величина.

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

Пружинный маятник – груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы* (рис. 58):

$$F = -kx, \quad (6.35)$$

где k – жесткость пружины.

Уравнение движения груза (пружинного маятника) в отсутствие сил трения

$$m\ddot{x} = -kx,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.36)$$

где $\ddot{x} = a$ – ускорение груза.

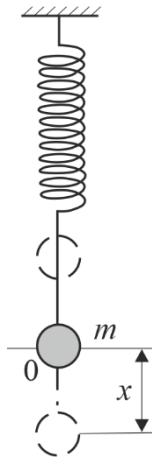


Рис. 58

Уравнение (6.36) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний пружинного маятника*, решением которого является [см. (6.21)]

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким образом, пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону (6.34) с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (6.37)$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.38)$$

Формула (6.38) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (6.31) и (6.37)

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (6.39)$$

Физический маятник – это твердое тело, способное совершать под действием силы тяжести $m\vec{g}$ колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела (рис. 59). Точку O называют *точкой подвеса*.

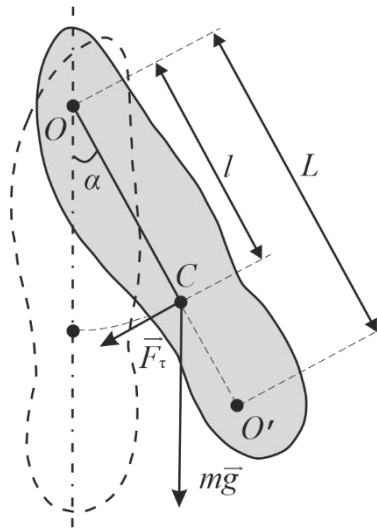


Рис. 59

Если такой маятник вывести из положения равновесия, отклонив его на *небольшой угол* α , то под действием силы тяжести $m\vec{g}$ он начнет совершать колебания. В соответствии с *основным законом динамики вращательного движения твердого тела* $[\vec{M} = J\vec{\varepsilon}]$ в отсутствие сил трения момент возвращающей силы

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha, \quad (6.40)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O ; l – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника; $F_t = mg \sin \alpha$ – возвращающая сила; при малых колебаниях маятника $\sin \alpha \approx \alpha$.

Из уравнения (6.40),

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) по виду совпадает с уравнением (6.28) [или (6.34)], описывающим гармонические колебания. Следовательно, *малые колебания физического маятника* будут происходить с *циклической частотой*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad (6.42)$$

и *периодом*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (6.43)$$

где $L = J/ml$ – *приведенная длина физического маятника*.

Принимая (6.42), из (6.41) получим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (6.44)$$

идентичное с (6.36); решение (6.44):

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.45)$$

где α_0 – амплитуда (наибольший угол отклонения маятника от положения равновесия).

[Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от точки O подвеса маятника на расстоянии приведенной длины L , называется *центром качаний физического маятника* (см. рис. 57). Применяя теорему Штейнера ($J = J_C + ma^2$), получим

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = l + \frac{J_C}{ml} > l,$$

т. е. OO' всегда больше OC . Точка подвеса O маятника и центр качений O' обладают *свойством взаимозаменяемости*: если точку подвеса перенести в центр качений, то прежняя точка O подвеса станет новым центром качений, и период колебаний T и приведенная длина L физического маятника не изменятся].

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. *Математический маятник является частным случаем физического маятника*. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшое тело массой m , подвешенное на тонкой невесомой нити длиной l (рис. 60).

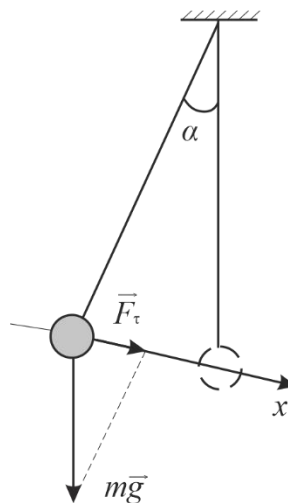


Рис. 60

Момент инерции математического маятника

$$J = ml^2. \quad (6.46)$$

Так как математический маятник представляет *предельный случай* физического маятника, вся масса которого сосредоточена в одной точке – центре масс C , то, подставив (6.46) в формулу (6.43), получим выражение для *периода малых колебаний математического маятника*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (6.47)$$

откуда *циклическая частота*

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{gl}{l}}. \quad (6.48)$$

[Сравнивая (6.43) и (6.47), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине l математического маятника ($L = l$), то периоды колебаний T этих маятников одинаковы. Следовательно, *приведенная длина L физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α , образованным нитью с вертикалью (рис. 60). Момент возвращающей силы

$$M = F_\tau l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha, \quad (6.46')$$

где α – угол отклонения маятника от положения равновесия; $F_\tau = mg \sin \alpha$ – возвращающая сила; l – длина маятника; g – ускорение свободного падения; при малых колебаниях маятника $\sin \alpha \approx \alpha$.

В соответствии с *основным законом динамики вращательного движения твердого тела* [$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$] в отсутствие сил трения момент возвращающей силы

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = J\ddot{\alpha} = ml^2\ddot{\alpha}, \quad (6.46'')$$

где $J = ml^2$ – момент инерции маятника.

Из выражений (6.46') и (6.46''), получаем

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\alpha,$$

откуда

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \quad (6.46''')$$

т. е. угол α удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (6.46''''')$$

идентичному уравнению (6.36). Его решение имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.46''''''')$$

где α_0 – амплитуда (наибольший угол отклонения маятника от положения равновесия)].

6.4.4. Электрический колебательный контур

Примером *простого гармонического осциллятора* является **колебательный контур** состоящий из катушки индуктивности L и последовательно соединенного с ней конденсатора C с зарядом q на обкладках (рис. 61).

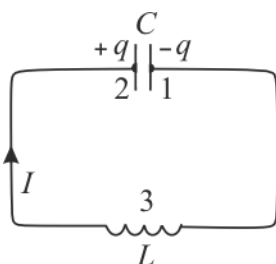


Рис. 61

При разрядке конденсатора через индуктивность в *идеализированном* контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$), возникают свободные колебания заряда на конденсаторе и тока в катушке. В процессе колебаний энергия электрического поля заряженного конденсатора [см. (2.32)]:

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

преобразуется в энергию магнитного поля катушки [см. (5.52)]

$$W_м = \frac{LI^2}{2}$$

и наоборот. Так как $R \approx 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия системы с течением времени не изменяется

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2} = \text{const}, \quad (6.49)$$

и производная от W по t должна равняться нулю, т. е.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0. \quad (6.50)$$

По определению, $I = dq/dt = \dot{q}$, а $dI/dt = dq^2/dt^2 = \ddot{q}$, следовательно,

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (6.51)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (6.52)$$

уравнение (6.51) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.53)$$

т. е. получили *дифференциальное уравнение свободных гармонических (незатухающих) колебаний заряда q в контуре.*

Решение уравнения (6.53)

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.54)$$

где q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора; ω_0 – **собственная частота контура**; φ – начальная фаза колебаний заряда на конденсаторе [значения q_m и φ определяются начальными условиями, а ω_0 – параметрами колебательного контура].

Период свободных незатухающих электрических колебаний определяется **формулой Томсона:**

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6.55)$$

Сила тока в колебательном контуре и напряжение в конденсаторе

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (6.56)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.57)$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ и $U_m = q_m/C$ – соответственно амплитуды силы тока и напряжения. Таким образом, сила тока I опережают по фазе напряжение U_C на конденсаторе, а также и заряд q [см. (6.54)] на $\pi/2$, т. е. при достижении током максимального значения заряд и напряжение обращаются в нуль, и наоборот.

Взяв отношение амплитуд U_m и I_m , и заменив ω_0 по (6.52), получим

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.58)$$

Формулу (6.58) можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля CU_m^2 должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля $LI_m^2/2$:

$$CU_m^2 = \frac{LI_m^2}{2}, \text{ или } U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.58')$$

6.4.5. Сложение гармонических колебаний

одинакового направления и одинаковой частоты. Биения

Под *сложением колебаний* понимают нахождение закона результирующих колебаний системы. Различают два предельных случая: *сложение колебаний одинакового направления* и *сложение взаимно перпендикулярных колебаний*.

Рассмотрим сложение *двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты*, воспользовавшись *методом векторных диаграмм*:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (6.59)$$

где A_1 и A_2 , φ_1 и φ_2 – соответственно амплитуды и начальные фазы первого и второго колебаний.

На рис. 62 показаны оба колебания с помощью векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 в произвольный момент времени t . Так как векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной. Результирующему колебанию $x = x_1 + x_2$ соответствует вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Результирующее колебание

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.60)$$

является также гармоническим, совершаемым с частотой ω_0 , амплитудой A и начальной фазой φ . Из построения находим, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (6.61)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6.62)$$

Таким образом, амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$) складываемых колебаний:

а) если складываемые колебания *синфазны* (находятся в одной фазе), т. е.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

тогда

$$A = A_1 + A_2,$$

т. е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

б) если складываемые колебания находятся в *противофазе*, т. е.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

тогда

$$A = |A_1 - A_2|,$$

т. е. амплитуда результирующего колебания A равна разности амплитуд складываемых колебаний.

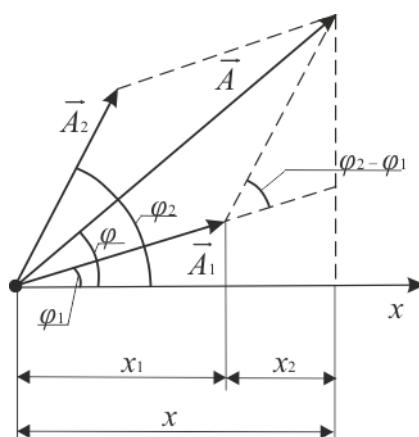


Рис. 62

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Колебания, получающиеся в результате наложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами, называются *биениями*.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Допустим, что начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Тогда уравнения колебаний

$$x_1 = A \cos \omega t; \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \quad (6.63)$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $\Delta\omega/2 \ll \omega$, найдем результирующее колебание

$$x = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega t, \quad (6.64)$$

график которого изображен на рис. 63, а. [В формуле (6.64) сомножитель в скобках изменяется гораздо медленнее, чем второй сомножитель. Ввиду условия $\Delta\omega \ll \omega$ за то время, за которое сомножитель ωt совершает несколько полных колебаний, сомножитель, стоящий в скобках, почти не изменяется].

Результирующее колебание (6.64) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда A_6 которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left|2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right|. \quad (6.65)$$

График амплитуды результирующего колебания показан на рис. 63, б.

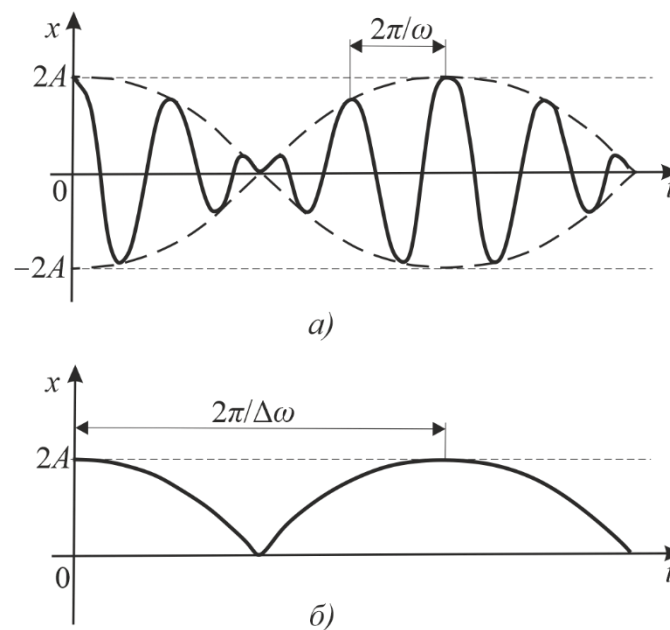


Рис. 63

Частота изменения A_6 в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. $\Delta\omega$. Таким образом, *частота пульсаций амплитуды – циклическая частота биений* – равна разности частот складываемых колебаний:

$$\omega_6 = \Delta\omega.$$

Так как частота биений гораздо меньше частоты колебаний ($\Delta\omega \ll \omega$), то амплитуду A_6 (6.65) условно называют *амплитудой биений*.

Период биений T_6 [определяется из условия $\Delta\omega T_6/2 = \pi$] и *частота биений*

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}; \quad (6.66)$$

$$\nu_6 = \frac{1}{T_6} = |\nu_2 - \nu_1|, \quad (6.67)$$

где T_1, ν_1 и T_2, ν_2 – периоды и частоты складываемых колебаний. Характер зависимости T_6 от $\Delta\omega$ при биениях показан на рис. 63, а.

[Биения представляют собой один из примеров *модулированных колебаний*, т. е. колебаний происходящих по закону гармонических колебаний (6.21), в котором один из параметров периодически изменяется со временем с периодом, значительно превышающим период основных колебаний. Различают *амплитудную, частотную и фазовую модуляции*].

6.4.6. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Пусть материальная точка M одновременно колеблется вдоль осей координат x и y по законам [начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю]:

$$x = A \cos \omega t; \quad y = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.68)$$

где A и B – амплитуды складываемых колебаний; φ – разность фаз колебаний.

Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости xu найдем, исключив из выражений (6.68) параметр t . Из (6.68) имеем

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi.$$

Заменяя во втором уравнении $\cos \omega t$ на x/A и $\sin \omega t$ на $\pm\sqrt{1 - x^2/A^2}$, получим *уравнение эллипса*, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (6.69)$$

[ориентация эллипса и размеры его полуосей зависят от амплитуд A и B складываемых колебаний и разности фаз φ]. Результирующее движение точки M называют *эллиптически поляризованными колебаниями*.

Формы траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз слагаемых колебаний $\varphi = 0$. Уравнение (6.69) в этом случае:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда получается *уравнение прямой* [эллипс вырождается в отрезок прямой]

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (6.70)$$

Результирующее движение является также гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 64, *a*).

2. Разность фаз слагаемых колебаний $\varphi = \pm\pi$. Уравнение (6.69) имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 64, *б*)

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (6.70)$$

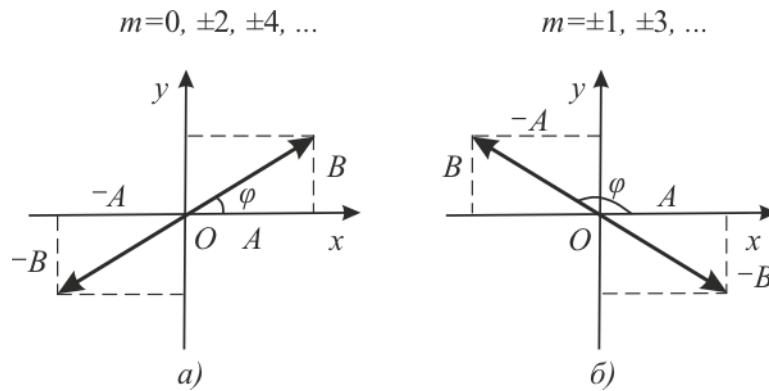


Рис. 64

3. При $\varphi = \pm\pi/2$ уравнение (6.69) переходит в

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (6.71)$$

т. е. в *уравнение эллипса*; оси эллипса совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 65). Такие колебания называются *эллиптически поляризованными*.

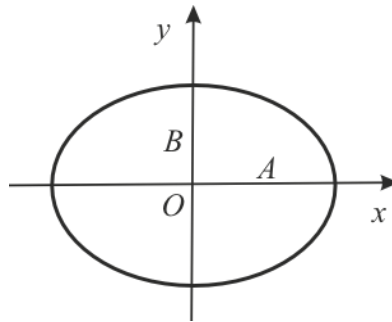


Рис. 65

[При равенстве амплитуд A и B [см. (6.71)] эллипс вырождается в *окружность*. Случаи $\varphi = \pm\pi/2$ различаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если отношение амплитуд изменяется, то эллипс деформируется, не изменяя своего положения относительно направлений слагаемых колебаний. Если изменяется сдвиг фаз, то эллипс одновременно и деформируется, и изменяет свою ориентацию относительно указанных направлений].

Частоты слагаемых взаимно перпендикулярных колебаний могут отличаться. В этом случае траекториями колеблющейся точки будут сложные кривые, называемые *фигурами Лиссажу*. Их форма зависит от соотношения частот и разности фаз слагаемых колебаний. На рис. 66 приведены фигуры Лиссажу при различных отношениях частот (2:1, 3:1, 2:3) и разности начальных фаз, равной $\pi/2$.

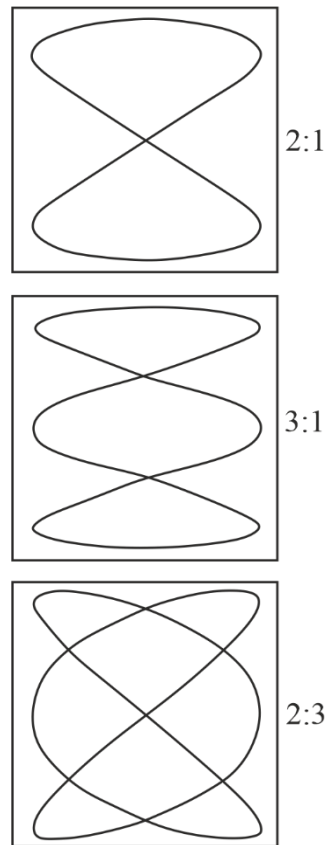


Рис. 66

6.4.7. Свободные затухающие колебания

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии реальной колебательной системой. Затухание свободных механических колебаний вызывается трением, сопротивлением окружающей среды и возбуждением в ней упругих волн, а в электрических колебательных системах – тепловыми потерями в проводниках и потерями энергии на излучение электромагнитных волн.

Закон затухания колебаний зависит от свойств колебательной системы. **Линейные системы** – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями. Линейными системами являются, например, пружинный маятник, движущийся в вязкой среде или при малых растяжениях пружины (когда справедлив

закон Гука), колебательный контур, если его индуктивность L , емкость C и сопротивление R не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

Затухающие колебания описываются уравнением

$$\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (6.72)$$

где s – колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс; $\beta = \text{const}$ – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, т. е. при $\beta = 0$, называется *собственной частотой* колебательной системы.

Решение уравнения (6.72) в случае малых затуханий ($\beta^2 \ll \omega_0^2$)

$$s = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.73)$$

где

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (6.74)$$

– *амплитуда затухающих колебаний*; A_0 – начальная амплитуда.

На рис. 67 даны графики функций (6.73) и (6.74): зависимость (6.73) показана сплошной линией, а зависимость (6.74) – штриховыми линиями.

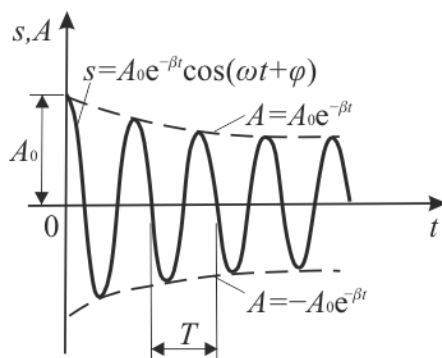


Рис. 67

Время релаксации $\tau = 1/\beta$ – это промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.

Согласно формуле (6.22) период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (6.75)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6.75')$$

– **циклическая частота свободных затухающих колебаний**. [При незначительном сопротивлении среды ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период колебаний равен $T_0 = 2\pi/\omega_0$. С ростом коэффициента затухания β период колебаний T увеличивается].

Отношение значений амплитуд $A(t)$ и $A(t + T)$ двух последовательных колебаний, различающихся на период T

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta t} \quad (6.76)$$

называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad (6.77)$$

– **логарифмическим декрементом затухания** [Θ – постоянная величина для данной колебательной системы]; N_e – число колебаний, совершаемых за время релаксации τ .

Колебательную систему также характеризуют **добротностью** Q , которая при малых значениях логарифмического декремента Θ [так как затухание мало ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), то T принято равным $T_0 = 2\pi/\omega_0$] равна

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad (6.78)$$

т. е. добротность Q пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации τ .

Приведенные результаты могут быть применимы для колебаний различной физической природы.

1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника массы m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F_{\text{упр}} = -kx$.

Сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}, \quad (6.79)$$

где r – **коэффициент сопротивления**; знак « \rightarrow » указывает на противоположные направления силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и вектора скорости \vec{v} .

По второму закону Ньютона $F = ma = m\ddot{x}$, закон движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (6.80)$$

Используя формулу (6.37) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и принимая, что коэффициент затухания

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad (6.81)$$

получим идентичное уравнению (6.72) *дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника*:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решением этого уравнения в случае малых затуханий ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) будет функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$$

[см. формулы (6.72), (6.73) и (6.75')].

Добротность Q пружинного маятника, согласно (6.78) и (6.81),

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}.$$

2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда q в контуре (при $R \neq 0$) имеет вид [см. (6.51)]

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.82)$$

где $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебательного контура.

Колебания заряда в случае малых затуханий ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) совершаются по закону

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.83)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (6.84)$$

меньшей собственной частоты ω_0 контура [см. (6.52)]; $q_m e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора; q_m – начальная амплитуда. При $R = 0$ формула (6.83) переходит в (6.52).

Колебание $q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ не гармоническое. Согласно формуле (6.75) период затухающих колебаний T , с учетом (6.84), равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (6.85)$$

Логарифмический декремент затухания Θ [см. (6.77)]

$$\Theta = \beta T, \quad (6.86)$$

а добротность колебательного контура в случае слабого затухания [см. (6.78)]

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (6.87)$$

где величина $\sqrt{L/C}$ называется **волновым сопротивлением контура**.

При $R^2/4L^2 \geq 1/LC$, т. е. при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ вместо колебаний будет происходить *апериодический* (не колебательный) разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим**. Значение критического сопротивления $R_{кр}$ определяется из условия

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

откуда

$$R_{кр} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.88)$$

6.4.8. Вынужденные колебания

В отличие от собственных *вынужденные колебания* происходят под действием внешней периодической силы. Если эта *вынуждающая* [возмущающая] *сила* изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (6.89)$$

где F_0 и ω – соответственно амплитуда и частота вынуждающей силы, то установившиеся вынужденные колебания системы будут гармоническими. Переменную внешнюю силу, приложенную к системе и вызывающую вынужденные колебания, называют *вынуждающей силой*.

Закон движения для *пружинного маятника* (6.80) с учетом вынуждающей силы (6.89) запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad (6.90)$$

где kx – сила упругости; $r\dot{x}$ – сила трения.

Тогда *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (6.91)$$

где $\beta = r/2m$ – коэффициент затухания [см. (6.81)]; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебательной системы [см. (6.37)]; ω – частота вынуждающей силы F ; $f_0 = F_0/m$; F_0 – амплитуда вынуждающей силы F .

По прошествии некоторого промежутка времени (*времени установления колебаний*) движение колебательной системы приобретает установившийся характер и будет совершаться периодически с постоянной амплитудой A и частотой вынуждающей силы ω (рис. 68).

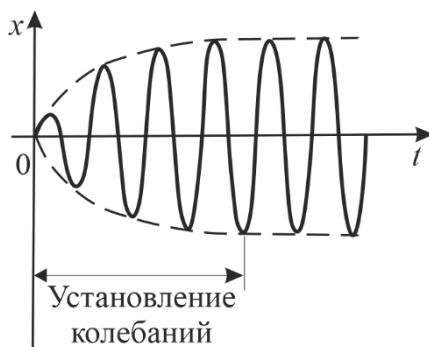


Рис. 68

Решение уравнения (6.91) для *установившихся вынужденных колебаний* (его частное решение) имеет вид

$$x = A \cos(\omega t - \alpha), \quad (6.92)$$

где амплитуда A смещения в случае установившихся вынужденных колебаний и сдвиг фаз α между смещением и вынуждающей силой

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (6.93)$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.94)$$

Из формулы (6.93) следует, что зависимость $A(\omega)$ имеет максимум при некоторой частоте вынуждающей силы F . Для нахождения этой частоты необходимо приравнять нулю производную от подкоренного выражения:

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = 0,$$

или

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (6.95)$$

Поскольку $\omega \neq 0$ [$\omega = 0$ соответствует максимуму знаменателя], то знаменатель выражения (6.93) достигает минимума при частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.96)$$

Частота $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансной частотой** [т. е. при $\omega_{\text{рез}}$ амплитуда A смещения достигает своего максимума], а резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты ω вынуждающей силы к значению $\omega_{\text{рез}}$ представляет собой явление **механического резонанса**.

Подставив (6.96) в выражение (6.93), найдем **резонансную амплитуду**

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \quad (6.97)$$

Графики зависимости A от ω при различных параметрах β – приведены на рис. 69. [Из формул (6.96) и (6.97) следует, что с уменьшением β максимумы кривых лежат

выше и правее. При $\omega \rightarrow 0$ все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля предельному значению, равному $F_0/m\omega_0^2$, т. е. F_0/k – *статическому отклонению*. При $\omega \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически стремятся к нулю. При очень большом затухании, т. е. с увеличением коэффициента затухания β , например при $2\beta^2 > \omega_0^2$, выражение (6.96) становится мнимым, что означает отсутствие резонанса (см. нижнюю кривую на рисунке – с увеличением частоты амплитуда монотонно убывает)].

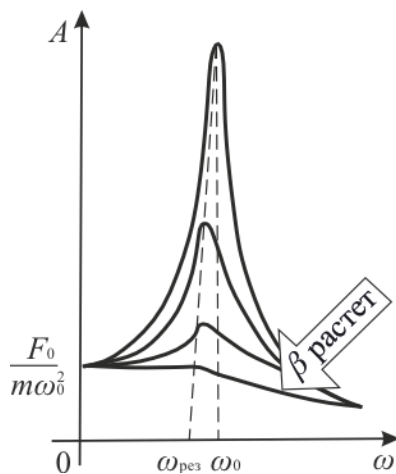


Рис. 69

Из формулы (6.97) вытекает, что при малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}.$$

Разделив это выражение на смещение x_0 от положения равновесия под действием постоянной силы $F = F_0/(m\omega_0^2)$, получим

$$\frac{A_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\Theta} = Q \quad (6.98)$$

[см. формулу (6.78)]. Таким образом, *добротность* Q показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы.

К аналогичным результатам приводит рассмотрение *вынужденных электрических колебаний в контуре* – незатухающих колебаний под действием внешней периодически изменяющейся по гармоническому закону ЭДС:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (6.99)$$

Подставив (6.99) в уравнение (6.82), получим

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos \omega t \quad \text{или} \quad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos \omega t, \quad (6.100)$$

где $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебательного контура. Как и в случае механических колебаний [см. (6.92)], частное решение уравнения (6.100), отвечающее *установившимся вынужденным колебаниям* заряда q на обкладках конденсатора:

$$q = q_m \cos(\omega t - \alpha), \quad (6.101)$$

где

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad (6.102)$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \text{arctg} \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \quad (6.103)$$

[q_m – амплитуда заряда на конденсаторе; α – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС].

В установившемся режиме [рис. 70, который является аналогом рис. 68] *электромагнитные вынужденные колебания являются гармоническими*, происходят с частотой ω внешней ЭДС, амплитуда q_m (6.102) и фаза α (6.103) определяются как частотой ω , так и характеристиками колебательного контура.

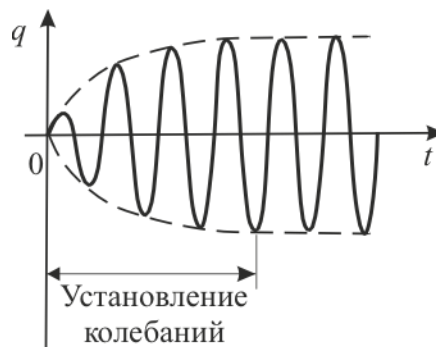


Рис. 70

Продифференцировав выражение (6.101) по t , найдем силу тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях:

$$I = \dot{q} = -\omega q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (6.104)$$

где амплитуда тока

$$I_m = \omega q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (6.105)$$

и сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.106)$$

[$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \pi/2) = -1/\operatorname{tg} \alpha = (\omega L - 1/\omega C)/R$].

Из выражения (6.106) следует, что ток отстает по фазе от внешней ЭДС ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/\omega C$, и опережает ЭДС ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/\omega C$.

В соответствии с (6.104) напряжение U_R на *активном сопротивлении* R

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.107)$$

Разделив выражение (6.101) на емкость C , получим *напряжение на конденсаторе*

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \alpha) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.108)$$

где

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (6.109)$$

Умножив производную функции (6.104) на L , получим *напряжение на индуктивности*

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.110)$$

где

$$U_{Lm} = \omega LI_m. \quad (6.111)$$

Сопоставление формул (6.104), (6.107), (6.108) и (6.110) показывает, что напряжение U_C на емкости отстает по фазе от силы тока I на $\pi/2$, а напряжение U_L на индуктивности опережает ток на $\pi/2$.

Из формулы (6.102)

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

следует, что при некоторой определенной для данного колебательного контура частоте амплитуда q_m достигает максимального значения. Резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ – частота, при которой амплитуда заряда q_m достигает максимума, равна [см. (6.96)]

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{(2L)^2}}. \quad (6.112)$$

Подставив формулу (6.112) в (6.102), получим

$$q_{m_{\text{рез}}} = \frac{\mathcal{E}_m/L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad (6.113)$$

– резонансную амплитуду заряда в случае *электрического резонанса*.

Резонансные кривые зависимостей q_m от ω при различных коэффициентах затухания β изображены на рис. 71. Из рис. 71 и формулы (6.113) следует, что с уменьшением β максимумы кривых лежат выше и правее. При $\omega \rightarrow 0$ все кривые приходят к так называемому статическому отклонению $\mathcal{E}_m/L\omega_0^2$. Если $\omega \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю.

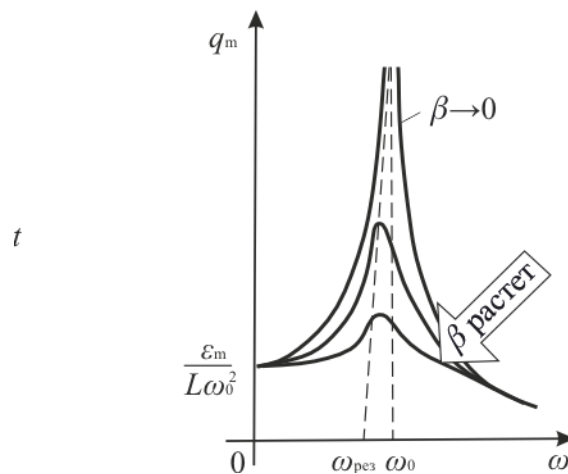


Рис. 71

Резонансная частота $\omega_{I_{\text{рез}}}$ для силы тока совпадает с собственной частотой ω_0 контура:

$$\omega_{I_{\text{рез}}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (*)$$

Резонансные кривые зависимостей I_m от ω внешней ЭДС при различных коэффициентах затухания β изображены на рис. 72 [вид зависимости $I_m(\omega)$ не отличается от вида зависимости $A(\omega)$ для вынужденных механических колебаний, представленного на рис. 69]. Амплитуда силы тока I_m максимальна при $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ и равна \mathcal{E}_m/R . Чем больше коэффициент затухания β , тем ниже максимум резонансной кривой.

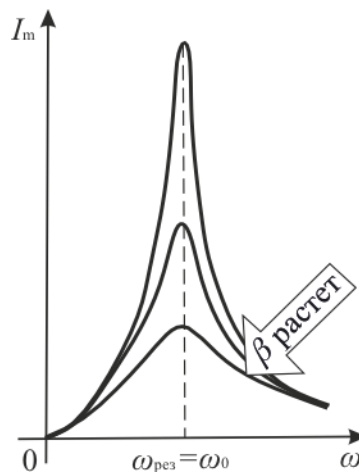


Рис. 72

Согласно формуле (6.109) отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{Cm_{\text{рез}}}$ к амплитуде внешнего напряжения U_m равно

$$\frac{U_{Cm_{\text{рез}}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (6.114)$$

[при резонансе $\omega = \omega_{U_{\text{рез}}} = \omega_0$]. Таким образом *добротность контура* Q [(6.78) и (6.98)] показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение. Формула верна лишь при больших значениях Q , т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

6.4.9. Переменный ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания [см. п. 6.4.8] можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей емкостью C , индуктивностью L и активным сопротивлением R , **переменного тока**, обусловленного переменным напряжением (рис. 73)

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (6.115)$$

где ω – частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи.

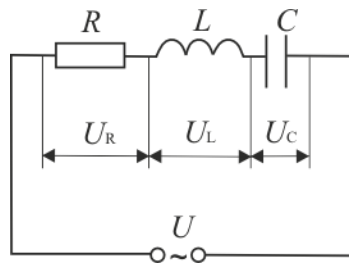


Рис. 73

Переменный ток можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы. Согласно формулам (6.104) – (6.106) этот ток изменяется по закону

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (6.116)$$

где $\varphi = \alpha - \pi/2$ – сдвиг по фазе между током I и напряжением U [см (6.106)].

Ток отстает по фазе от напряжения на угол φ , который зависит от параметров цепи C , L , R и частоты ω :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (6.117)$$

В случае, когда $\varphi < 0$, ток фактически опережает напряжение.

Амплитуда тока I_m определяется амплитудой напряжения U_m , параметрами цепи C , L , R и частотой ω :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (6.118)$$

Стоящее в знаменателе формулы (6.118) выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (6.119)$$

называется *полным электрическим сопротивлением* цепи.

Если цепь состоит из одного лишь *резистора сопротивлением* R ($L \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$), при выполнении условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m \cos \omega t}{R} = I_m \cos \omega t,$$

т. е. ток изменяется в фазе с напряжением, а амплитуда силы тока равна

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

[сдвиг фаз между I_m и U_m равен нулю].

Если *переменное напряжение приложено к конденсатору*, обладающему емкостью C ($L \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$), то он все время перезаряжается, и в цепи течет переменный ток. Тогда согласно формулам (6.118) и (6.117)

$$I_m = \frac{U_m}{1/(\omega C)}, \quad (6.120)$$

а $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$, т. е. $\varphi = -\pi/2$.

Величина

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (6.121)$$

называется *реактивным емкостным сопротивлением* (или *емкостным сопротивлением*). Из (6.121) следует, что R_C убывает с частотой ω . Для постоянного тока ($\omega = 0$) $R_C = \infty$; следовательно постоянный ток через конденсатор течь не может. Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.122)$$

Поскольку $\varphi = -\pi/2$, падение напряжения U_C на конденсаторе отстает по фазе от текущего через конденсатор тока I на $\pi/2$. Соответственно ток I опережает напряжение U_C на $\pi/2$.

Если к генератору переменного тока подключена катушка индуктивностью L ($R \rightarrow 0, C \rightarrow 0$), то в ней потечет переменный ток. Тогда из формул (6.118) и (6.117) следует, что

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (6.123)$$

а $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, т. е. $\varphi = \pi/2$.

Величина

$$R_L = \omega L \quad (6.124)$$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным сопротивлением**). Из (6.124) следует, что R_L растет с частотой ω . Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность L не оказывает сопротивления. Падение напряжения на катушке индуктивности

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (6.125)$$

Падение напряжения U_L опережает по фазе ток I , текущий через катушку, на $\pi/2$. Соответственно ток I в индуктивности отстает от напряжения U_L на $\pi/2$.

Допустим $R = 0$. В этом случае формула (6.118) переходит в

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}. \quad (6.126)$$

Величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (6.127)$$

называется **реактивным сопротивлением** (или **реактансом**).

Формулы (6.117) и (6.119) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

На рис. 74 представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), конденсаторе (U_C) и катушке (U_L). Амплитуда U_m приложенного напряжения U должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений [$U_m = U_R + U_C + U_L$]. Как видно из рис. рис. 74, угол φ определяет разность фаз между напряжением и силой тока [см. (6.117)].

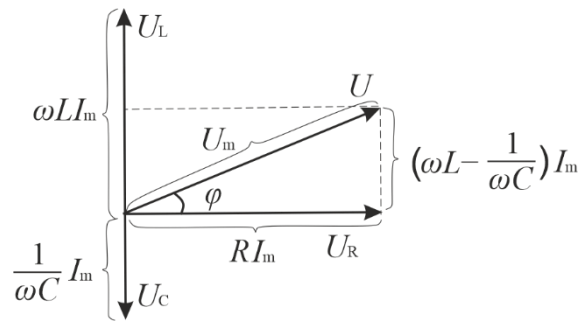


Рис. 74

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.128)$$

[см. формулы (6.115) и (6.116)].

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

запишем:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi + \frac{1}{2} I_m U_m \cos(2\omega t - \varphi). \quad (6.129)$$

Практический интерес представляет **среднее значение мощности** $\langle P \rangle$ **за период** колебания. За период среднее значение $\langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle = 0$, поскольку эта величина, непрерывно изменяясь в течение периода, принимает любые значения – и положительные, и отрицательные. Следовательно,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi. \quad (6.130)$$

Величины

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{эф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (6.131)$$

называются соответственно **эффективными** (или **действующими**) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по эффективным значениям тока и напряжения.

Из векторной диаграммы [см. рис. 74] следует, что $U_m \cos \varphi = RI_m$, поэтому

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m. \quad (6.132)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна $I = I_m / \sqrt{2}$.

Выражение средней мощности (6.130) через действующие значения силы тока и напряжения (6.131) имеет вид

$$\langle P \rangle = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi, \quad (6.133)$$

где множитель $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{R}{Z} \quad (6.134)$$

[см. формулы (6.117) и (6.119)]. Из формулы (6.133) следует, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от коэффициента мощности $\cos \varphi$.

[Увеличение $\cos \varphi$ потребителей электрической энергии имеет очень важное народно-хозяйственное значение. Один из способов увеличения $\cos \varphi$ – создание условий, при которых сдвиг фаз φ между током и напряжением становится незначительным. В зависимости от того, чем вызван сдвиг фаз – индуктивностью или емкостью, в цепь переменного тока включают дополнительно емкость или индуктивность, которые подбираются так, чтобы $\omega L \approx 1/\omega C$. Тогда, согласно формуле (6.117), угол будет мало отличаться от нуля ($\varphi \approx 0^\circ$; $\cos \varphi = 1$), а средняя мощность $\langle P \rangle$, отдаваемая генератором переменного тока потребителю, достигает наибольшего значения].

Примеры решения задач

6.1. Найдите силу тока смещения между обкладками плоского конденсатора площадью 4 см^2 , заполненного конденсаторной керамикой ($\varepsilon = 150$), если напряженность электрического поля при этом изменяется равномерно со скоростью $0,44 \text{ МВ}/(\text{м} \cdot \text{с})$.

Дано: $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\varepsilon = 150$; $\partial E / \partial t = 4,4 \cdot 10^5 \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{с})$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}/\text{м}$.

Найти: $I_{\text{см}}$.

Решение. Сила тока проводимости I в подводящих проводах равна силе тока смещения $I_{\text{см}}$ в электрическом поле конденсатора ($I = I_{\text{см}}$).

Плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ по определению равна:

$$j_{\text{см}} = \frac{I_{\text{см}}}{S}, \quad (1)$$

где S – площадь пластины конденсатора.

С другой стороны, по теории Максвелла, плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ равна скорости изменения электрического смещения D :

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (2)$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ [ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды, E – напряженность электрического поля], выражение (2) можно представить в виде:

$$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3)$$

Приравнивая правые части выражений (1) и (3), получим:

$$\frac{I_{\text{см}}}{S} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (4)$$

откуда искомая сила тока смещения

$$I_{\text{см}} = \varepsilon_0 \varepsilon S \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (5)$$

Ответ: $I_{\text{см}} = 2,34 \cdot 10^{-7}$ А.

6.2. Найдите плотность тока $j_{\text{см}}$ смещения при разрядке цилиндрического конденсатора длиной $l = 12$ см и внешним радиусом $r = 12$ мм, если в подводящих проводах течет ток $I = 1,5$ мкА.

Дано: $l = 0,12$ м; $r = 0,012$ м; $I = 1,5 \cdot 10^{-6}$ А.

Найти: $j_{\text{см}}$.

Решение. Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

где \vec{D} – вектор электрического смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора.

Согласно теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:

$$\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = q, \quad (2)$$

где q – заряд конденсатора. Поскольку поток вектора \vec{D} пронизывает только боковую цилиндрическую поверхность ($S = 2\pi r l$) и вектор \vec{D} направлен перпендикулярно к поверхности ($D = D_n$; D_n – проекция вектора \vec{D} на направление внешней нормали к элементу сечения dS), то выражение (2) можно записать в виде

$$D \cdot 2\pi r l = q,$$

откуда

$$D = \frac{q}{2\pi r l}. \quad (3)$$

Продифференцировав выражение (3) по времени, найдем искомую плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{I}{2\pi r l} \quad (4)$$

[учли, что сила тока проводимости $I = \partial q / \partial t$].

Ответ: $j_{\text{см}} = 0,17 \text{ мА/м}^2$.

6.3. Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением $x = 0,04 \cos(2\pi t - \pi/3)$, м. Найдите амплитуду A , циклическую частоту ω , период T , начальную фазу φ_0 и частоту колебаний ν .

Дано: $x = 0,04 \cos(2\pi t - \pi/3)$, м

Найти: A ; ω ; T ; φ_0 ; ν .

Решение. Уравнение гармонических колебаний с начальной фазой φ_0 имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где x – смещение колеблющейся точки из положения равновесия в момент времени t ; A – амплитуда колебаний; ω – циклическая (круговая) частота; φ_0 – начальная фаза.

По условию задачи

$$x = 0,04 \cos(2\pi t - \pi/3). \quad (2)$$

Сравнив уравнения (1) и (2) для смещения точки, можем записать, что $A = 0,04$ м; $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$; $\varphi_0 = -\pi/3$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ с.}$$

Частота колебаний (число полных колебаний, совершаемых за 1 с)

$$\nu = \frac{1}{T} = 1 \text{ Гц.}$$

Ответ: $A = 0,04$ м; $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$; $T = 1$ с; $\varphi_0 = -\pi/3$; $\nu = 1$ Гц.

6.4. Ускорение частицы, совершающей гармонические колебания, подчиняется закону $a(t) = -0,04\pi^2 \cos 2\pi t$, м/с². Найдите зависимость смещения этой частицы от времени.

Дано: $a(t) = -0,04\pi^2 \cos 2\pi t$, м/с².

Найти: $x(t)$.

Решение. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания, определяется как первая производная скорости по времени, т. е.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (1)$$

откуда

$$dv(t) = a(t)dt. \quad (2)$$

Проинтегрировав выражение (2), найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = -0,04\pi^2 \int_0^t \cos 2\pi t dt = -0,02\pi \sin 2\pi t. \quad (3)$$

Учитывая, что

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (4)$$

получим

$$dx(t) = v(t)dt. \quad (5)$$

Следовательно, искомая зависимость смещения материальной точки от времени:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = - \int_0^t 0,02\pi \sin 2\pi t dt = \frac{0,02\pi}{2\pi} \cos 2\pi t = 0,01 \cos 2\pi t. \quad (6)$$

Ответ: $x(t) = 0,01 \cos 2\pi t$.

6.5. Найдите потенциальную энергию $E_{\text{п}}$ пружинного маятника, совершающего гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см, циклической частотой $\omega = \pi/3$ с⁻¹ и начальной фазой $\varphi_0 = 0$, в момент времени $t = 1$ с, когда возвращающая сила в первый раз достигает значения $F = -8$ мН.

Дано: $A = 0,1$ м; $\omega = \pi/3$ с⁻¹; $\varphi_0 = 0$; $t = 1$ с; $F = -8 \cdot 10^{-3}$ Н.

Найти: $E_{\text{п}}$.

Решение. Гармонические колебания пружинного маятника описываются уравнением:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Возвращающая сила упругости при деформированной пружине равна:

$$F = -kx = -kA \cos \omega t \quad (2)$$

[учли, что начальная фаза по условию задачи $\varphi_0 = 0$; k – жесткость пружины].

Потенциальная энергия пружинного маятника равна:

$$E_{\text{п}} = - \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2 \omega t. \quad (3)$$

Учитывая полученные соотношения, находим формулу для искомой потенциальной энергии пружинного маятника

$$E_{\text{п}} = -\frac{1}{2}AF \cos \omega t. \quad (4)$$

Ответ: $E_{\text{п}} = 0,2$ мДж.

6.6. Найдите уравнение затухающих колебаний частицы, если смещение точки при $t = T/4$ составляет $x_0 = 12$ см, период затухающих колебаний $T = 4$ с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0,04$, начальная фаза колебаний равна нулю.

Дано: $t = T/4$; $x_0 = 0,12$ м; $T = 4$ с; $\Theta = 0,04$; $\varphi_0 = 0$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение затухающих колебаний имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где x – смещение колеблющегося тела из положения равновесия; β – коэффициент затухания; A_0 – амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$; $A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота той же колебательной системы; φ_0 – начальная фаза.

По условию задачи начальная фаза равна нулю, т. е. $\varphi_0 = 0$.

Тогда уравнение затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (2)$$

Циклическая частота (частота затухающих колебаний)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Логарифмический декремент затухания $\Theta = \beta T$, откуда коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\Theta}{T}.$$

Амплитуду A_0 найдем из начальных условий ($x_0 = 0,12$ м при $t = T/4$), согласно уравнению затухающих колебаний, где

$$x_0 = A_0 e^{-\beta t}, \quad (3)$$

откуда

$$A_0 = x_0 e^{\beta t} = x_0 e^{\frac{\Theta T}{4}} = x_0 e^{\frac{\Theta}{4}}. \quad (4)$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\Theta}{T} = \frac{0,04}{4} = 0,01.$$

Амплитуда колебаний

$$A_0 = x_0 e^{\frac{\Theta}{4}} = 0,12 \cdot e^{0,01} = 0,1212 \text{ (м)}.$$

Подставив полученные значения в уравнение затухающих колебаний, запишем искомое уравнение колебаний:

$$x = 12,12 e^{-0,01t} \cos 0,5\pi t. \quad (5)$$

Ответ: $x(t) = 12,12 e^{-0,01t} \cos 0,5\pi t$, см.

6.7. Найдите индуктивность L колебательного контура и закон изменения силы тока I в нем, если напряжение U_C на обкладках конденсатора емкостью $C = 5$ мкФ изменяется по закону $U_C = 8 \cos 10^3 t$, В. Сопротивлением контура пренебречь.

Дано: $C = 5$ мкФ = $5 \cdot 10^{-6}$ Ф; $U_C = 8 \cos 10^3 t$, В.

Найти: L ; $I(t)$.

Решение. В колебательном контуре напряжение U на обкладках конденсатора подчиняется гармоническому закону:

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (1)$$

где U_m – максимальное напряжение (амплитудное значение) на обкладках конденсатора; ω – циклическая частота [$\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}$, по условию задачи $\omega = 10^3$ с $^{-1}$]; L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Индуктивность катушки

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(10^3)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,2 \text{ Гн}.$$

В случае свободных незатухающих колебаний ($R = 0$) заряд на обкладках конденсатора совершает гармонические колебания по закону:

$$q = q_m \cos \omega t = C U_m \cos \omega t. \quad (2)$$

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{q} = -\omega C U_m \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставив числовые значения в формулу (3), найдем искомый закон изменения силы тока:

$$I = -0,04 \sin 10^3 t. \quad (4)$$

Ответ: $L = 0,2$ Гн; $I(t) = -0,04 \sin 10^3 t$, А.

6.8. Найдите отношение энергии W_M магнитного поля катушки к энергии $W_Э$ электрического поля конденсатора в момент максимума тока I_m для колебательного контура, состоящего из конденсатора емкости 4 мкФ, катушки с индуктивностью 5 мГн и активного сопротивления 5 Ом.

Дано: $C = 4$ мкФ = $4 \cdot 10^{-6}$ Ф; $L = 5$ мГн = $5 \cdot 10^{-3}$ Гн; $R = 5$ Ом.

Найти: $W_M/W_Э$.

Решение. Энергия электрического поля конденсатора

$$W_э = \frac{q^2}{2C}, \quad (1)$$

где q – заряд на обкладках конденсатора.

Энергия магнитного поля катушки при максимальном значении силы тока

$$W_м = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{W_м}{W_э} = \frac{LCI_m^2}{q^2}. \quad (3)$$

Согласно закону Ома, для колебательного контура, содержащего конденсатор, резистор и катушку индуктивности:

$$IR + U_C = \mathcal{E}_s, \quad (4)$$

где IR – напряжение на резисторе; $U_C = q/C$ – напряжение на конденсаторе; $\mathcal{E}_s = -LdI/dt$ – ЭДС самоиндукции.

Таким образом,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (5)$$

В случае максимума тока $dI/dt = 0$, тогда имеем:

$$I_m R + \frac{q}{C} = 0, \quad (6)$$

откуда

$$I_m = -\frac{q}{CR}. \quad (7)$$

Подставив полученное выражение (7) в формулу (3), получим искомое отношение энергий магнитного и электрического полей:

$$\frac{W_м}{W_э} = \frac{L}{CR^2}. \quad (8)$$

Ответ: $W_м/W_э = 50$.

6.9. Найдите циклическую частоту ω колебаний в колебательном контуре, если энергия контура 0,8 мДж, максимальная сила тока 0,4 А и максимальное напряжение на обкладках конденсатора 150 В.

Дано: $W = 0,8$ мДж = $8 \cdot 10^{-4}$ Дж; $I_m = 0,4$ А; $U_{Cm} = 150$ В.

Найти: ω .

Решение. Энергия колебательного контура равна максимальной энергии магнитного поля или максимальной энергии электрического поля контура:

$$W = W_{мm} = W_{эм} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2}, \quad (1)$$

откуда

$$W = \frac{\sqrt{LC}}{2} I_m U_{Cm}. \quad (2)$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3)$$

Таким образом, энергия колебательного контура

$$W = \frac{I_m U_{Cm}}{2\omega}, \quad (4)$$

откуда

$$\omega = \frac{I_m U_{Cm}}{2W}. \quad (5)$$

Ответ: $\omega = 3,75 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$.

6.10. Средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания, составляет 16 мВт. Найдите амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если колебательный контур содержит конденсатор емкостью 4 нФ и катушку с индуктивностью 20 мкГн и активным сопротивлением 0,4 Ом.

Дано: $\langle P \rangle = 16 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$; $C = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$; $L = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$; $R = 0,4 \text{ Ом}$.

Найти: U_{Cm} .

Решение. Средняя мощность, потребляемая колебательным контуром,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{R U_{Cm}^2 \omega^2 C^2}{2} \quad (1)$$

где R – активное сопротивление; $I_m = U_{Cm} \omega C$ – амплитуда тока; U_{Cm} – амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

Циклическая частота ω незатухающих колебаний

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

[в контуре поддерживаются незатухающие колебания].

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\langle P \rangle = \frac{R U_{Cm}^2 C}{2L}, \quad (3)$$

откуда найдем значение напряжения на конденсаторе:

$$U_{Cm} = \sqrt{\frac{2L\langle P \rangle}{RC}}. \quad (4)$$

Ответ: $U_{Cm} = 20 \text{ В}$.

Задачи

54. Найдите плотность тока $j_{\text{см}}$ смещения при разрядке цилиндрического конденсатора длиной $l = 12$ см и внешним радиусом $r_2 = 12$ мм, если в подводящих проводах течет ток $I = 1,5$ мкА. Ответ: $0,17$ мА/м²

55. Найдите силу тока $I_{\text{см}}$ смещения между квадратными пластинами воздушного конденсатора со стороной 5 см, если напряженность электрического поля в конденсаторе изменяется со скоростью $E/t = 4 \cdot 10^{10}$ В/(м · с). Ответ: 885 мкА

56. Найдите скорость изменения напряженности электрического поля E/t в зазоре между обкладками плоского конденсатора, заполненного конденсаторной керамикой ($\varepsilon = 200$), при разрядке которого в подводящих проводах течет ток $1,2$ мкА. Площадь каждой обкладки конденсатора равна 8 см². Ответ: $0,85$ МВ/(м · с)

57. Гармонические колебания частицы описываются уравнением $x = 0,05 \cos(2\pi t - \pi/4)$, м. Найдите амплитуду A , циклическую частоту ω , период T , начальную фазу φ_0 и частоту колебаний ν . Ответ: $0,05$ м; 2π с⁻¹; 1 с; $-\pi/4$; 1 Гц

58. Найдите величину максимального ускорения a_m материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 4 см и частотой 3 Гц. Ответ: $14,2$ м/с²

59. Напишите уравнение гармонических колебаний, если амплитуда колебаний $A = 12$ см, максимальная скорость $v_m = 3,14$ м/с, начальная фаза $\varphi_0 = 30^\circ$. Найдите период T , частоту колебаний ν и смещение x колеблющейся точки через $t = 0,12$ с от начала колебаний. Ответ: $x(t) = 0,12 \sin(157t/6 + \pi/6)$; $0,24$ с; $4,17$ Гц; $-0,06$ м

60. Найдите массу тела m , подвешенного на пружине и совершающего вертикальные колебания, если максимальная скорость колебаний и максимальная потенциальная энергия груза соответственно равны $0,4$ м/с и 48 мДж. Ответ: $0,6$ кг

61. Найдите время t , за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшится в e раз (e – основание натуральных логарифмов), если коэффициент затухания равен $\beta = 0,05$ с⁻¹. Ответ: 20 с

62. Найдите коэффициент затухания колебаний β , если известно, что период малых вертикальных колебаний шарика, подвешенного на легкой пружине в воздухе, равен $T = 1$ с, а при его погружении в вязкую жидкость, период колебаний увеличился на 20% . Ответ: $2,62$ с⁻¹

63. Найдите коэффициент затухания β осциллятора массы 50 г, движущегося по закону $x = 0,4 \sin 2\pi t$, под действием вынуждающей силы $F_x = 0,05 \cos 2\pi t$. Ответ: $0,2$ с⁻¹

64. Найдите частоту ν колебаний внешней силы, если в колебательной системе, под действием периодически изменяющейся внешней силы, установились вынужденные колебания по закону $x = 7 \cos(94,2t + 2,25)$, см. Ответ: 15 Гц

65. Найдите максимальное напряжение U_{C_m} на обкладках конденсатора в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 20$ нФ и катушку с индуктивностью $L = 1,8$ мГн, если максимальная сила тока в колебательном контуре равна $I_m = 0,5$ А. Ответ: 150 В

66. Найдите индуктивность L колебательного контура и закон изменения силы тока I в нем, если напряжение U_C на обкладках конденсатора емкостью $C = 2$ мкФ изменяется по закону $U_C = 5 \cos 10^3 t$, В. Сопротивлением контура пренебречь. Ответ: 0,5 Гн; $I = -0,01 \sin 10^3 t$ (А)

67. Электрический заряд q на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $q = 0,8 \sin(2\pi t + \pi/6)$, мКл. Найдите амплитуду колебаний заряда q_m на обкладках конденсатора, циклическую частоту ω , период T , частоту ν , начальную фазу φ_0 колебаний заряда и амплитуду силы тока I_m в контуре. Ответ: 0,8 мКл; 2π с⁻¹; 1 с; 1 Гц; $\pi/6$ рад; 1,6л мА

68. Найдите отношение энергии W_M магнитного поля катушки к энергии W_C электрического поля конденсатора в момент максимума тока I_m , для колебательного контура состоящего из конденсатора емкости $C = 5$ мкФ, катушки с индуктивностью $L = 4$ мГн и активного сопротивления $R = 8$ Ом. Ответ: 12,5

69. Средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания, составляет 14 мВт. Найдите амплитудное значение напряжения U_{C_m} на конденсаторе, если колебательный контур содержит конденсатор емкостью 7 нФ и катушку с индуктивностью 30 мкГн и активным сопротивлением 0,3 Ом. Ответ: 20 В

70. Резистор с активным сопротивлением 7 Ом и катушка индуктивности последовательно включены в цепь переменного тока с действующим напряжением 120 В и частотой 60 Гц. Найдите индуктивность L катушки, если амплитудное значение силы тока в цепи равно $I_m = 1,2$ А. Ответ: 0,375 Гн

71. Запишите для контура, содержащего катушку с индуктивностью 0,1 Гн, уравнение изменения заряда q на обкладках конденсатора в зависимости от времени t , если максимальная энергия магнитного поля в катушке равна 1,8 мкДж. Период свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре $T_0 = 0,02$ с. Ответ: $q = 19,11 \cdot 10^{-6} \cos \pi t$

72. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 160$ пФ, катушки с индуктивностью $L = 0,05$ Гн и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Найдите период T затухающих колебаний и через какое количество колебаний N_e амплитуда тока I_m в этом контуре уменьшится в e раз? (e – основание натурального логарифма). Ответ: 0,56 мс; 4

Лекции 8 – 9. ВОЛНЫ

8.1. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

8.1.1. Волновой процесс. Продольные и поперечные волны

Волнами (или **волновыми процессами**) называются возмущения, распространяющиеся в среде (или в вакууме) и несущие с собой энергию. При волновом процессе частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия, передавая друг другу импульс и энергию. *Основным свойством всех волн является перенос энергии волной без переноса вещества.*

Основными видами волн являются **упругие** или **механические волны** (в частности, **звуковые** и **сейсмические**); **волны на поверхности жидкости**; **электромагнитные волны** (например, **радиоволны**, **световые волны**).

В зависимости от направления смещения (колебаний) частиц в волне различают продольные и поперечные волны. **Упругие волны** – волны, распространяющиеся в жидких, твердых и газообразных средах за счет действия упругих сил, бывают *продольные* и *поперечные*.

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию [в отличие от *стоячих волн* (см. п.8.1.4)].

В продольной волне частицы среды колеблются в направлении распространения волны (рис. 75). Продольные волны связаны с деформациями сжатия и растяжения упругой среды и потому могут распространяться в любой среде – твердой, жидкой и газообразной. Примером таких волн являются звуковые волны в воздухе.

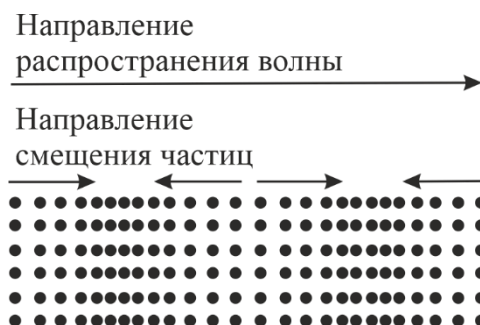


Рис. 75

В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны (рис. 76). Поперечные волны могут распространяться в среде, где возникают упругие силы при деформации сдвига, т. е. в твердых телах. Примером поперечных волн являются волны, распространяющиеся вдоль струн музыкальных инструментов.

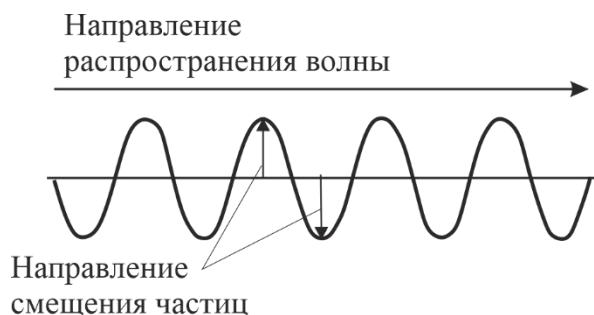


Рис. 76

Волны на поверхности жидкости (или **поверхностные волны**) – волны, распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости (или поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей). Возмущения этой поверхности, возникают под влиянием внешних воздействий (падения тел, ветра, движения судов и т. п.). В образовании и распространении этих волн определяющую роль играют силы поверхностного натяжения и тяжести. В поверхностных волнах частицы жидкости одновременно совершают поперечные и продольные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории.

Среда называется **однородной**, если ее физические свойства не изменяются от точки к точке. **Среда** называется **изотропной**, если ее физические свойства одинаковы по всем направлениям.

В действительности при волновом процессе колеблются не только отдельные частицы, а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется **фронтом волны** (или **волновым фронтом**), а направление, по которому распространяются колебания, – **лучом**.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. [Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, *волновых поверхностей существует бесконечное множество*, в то время как *волновой фронт в каждый момент времени один*. Волновой фронт – частный случай волновой поверхности. *Волновые поверхности остаются неподвижными. Волновой фронт все время перемещается*].

Волновые поверхности могут быть любой формы. Если источник волн точечный и колебания от него распространяются во все стороны – волна называется **сферической** – волновые поверхности представляют собой множество концентрических сфер. Центр этих сфер называются **центром волны**. Если волна распространяется по плоскости – волна называется **плоской** – волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей.

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. Частота этих колебаний называется **частотой волны**. Пусть плоская гармоническая волна распространяется со скоростью v вдоль оси x . Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x , колеблются в одинаковой фазе. На рис. 77 показан график функции $\xi(x, t)$ для некоторого фиксированного момента времени t , т. е. для момента времени t представлена зависимость смещения ξ частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстояния x этих частиц (например, частицы B) от источника колебаний O . Рисунок задает мгновенную картину распределения возмущений вдоль направления распространения и его не следует воспринимать как зримое изображение волны.

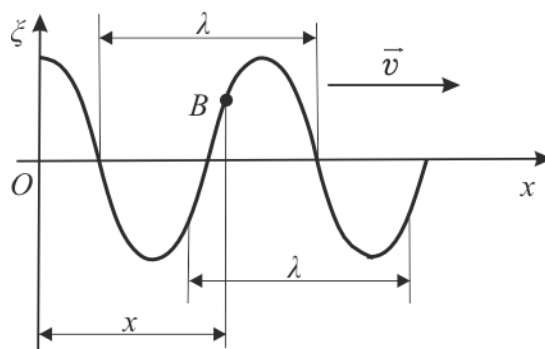


Рис. 77

[Графики гармонической волны (рис. 77) и гармонических колебаний (см. рис. 55), несмотря на их внешнее сходство, *различны по существу*. Если график волны определяет зависимость смещения *всех частиц среды от расстояния* до источника колебаний в *данный момент времени*, то график колебания – зависимость смещения *данной частицы от времени*].

Одной из основных характеристик волн является *длина волны*. Расстояние λ , на которое распространяется гармоническая волна за время t , равное периоду T колебаний частиц среды, называется *длиной волны*

$$\lambda = vT, \quad (8.1)$$

или, учитывая, что $T = 1/\nu$, где ν – частота колебаний,

$$v = \lambda\nu, \quad (8.2)$$

где v – скорость волны. Длину волны λ можно определить также как расстояние между ближайшими частицами среды, колеблющимися *в одинаковой фазе* (см. рис. 77)].

Еще одной характеристикой гармонических волн является *волновое число*, которое показывает, сколько длин волн λ укладывается на отрезке длиной 2π :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}, \quad (8.3)$$

где ω – циклическая частота.

8.1.2. Уравнения плоской и сферической волн

Уравнением упругой волны называется выражение, которое дает зависимость смещения ξ колеблющейся частицы, участвующей в волновом процессе, от координат (x, y, z) ее равновесного положения и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \quad (8.4)$$

Найдем вид функции ξ в случае плоской бегущей волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось x совпадает с направлением распространения волны (см. рис. 77). В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси x , а так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение ξ будет зависеть только от x и t , т. е. $\xi = \xi(x, t)$.

Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией $\xi(0, t) = A \cos \omega t$, то частица B среды (см. рис. 77) колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на τ , так как для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = x/v$, где v – скорость распространения волны. Следовательно, уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) представляет собой **уравнение бегущей волны**. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (8.5')$$

В общем случае **уравнение гармонической плоской волны** [и продольной, и поперечной], распространяющейся в направлении оси x в среде, не поглощающей энергии, имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (8.6)$$

где A – амплитуда волны [$A = \text{const}$]; φ_0 – начальная фаза, определяемая в общем случае выбором начал отсчета x и t ; $[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$ – фаза плоской волны; ω – циклическая частота.

С учетом выражения (8.3) уравнение (8.6) принимает вид:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (8.7)$$

где $(\omega t - kx + \varphi_0)$ – фаза плоской волны.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в сторону убывания x , отличается от уравнения (8.7) только знаком при kx .

Скорость v распространения гармонической волны характеризуется **фазовой скоростью** – скоростью перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующих *любому фиксированному значению фазы* гармонической волны.

Из условия

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const} \quad (8.8)$$

следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v, \text{ т. е. } v = \frac{dx}{dt}. \quad (8.9)$$

Таким образом, скорость распространения волны v в уравнениях (8.5) – (8.6) есть *скорость перемещения фазы волны*, поэтому ее и называют **фазовой скоростью**:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (8.9')$$

Основываясь на формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (8.10)$$

уравнение плоской волны (8.7) можно записать в экспоненциальной форме, удобной для дифференцирования

$$\xi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}, \quad (8.11)$$

где физический смысл имеет только действительная часть комплексной величины $\xi(x, t)$; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Уравнение гармонической сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (8.12)$$

где $\xi(r, t)$ – смещение точек среды на расстоянии r от центра волны в момент времени t ; A_0 – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице; $(\omega t - kr + \varphi_0)$ – фаза сферической волны; ω – циклическая частота; k – волновое число; φ_0 – начальная фаза колебаний в центре волны. Уравнение (8.12) справедливо лишь для r , значительно превышающих размеры источника [при $r \rightarrow 0$ выражение для амплитуды $A_0/r \rightarrow \infty$].

Зависимость фазовой скорости v волн в среде от их частоты ω [см. (8.9')] или длины волны λ называется **дисперсией волн**, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, – **диспергирующей средой**.

Волны в линейной однородной, изотропной, непоглощающей среде описываются **волновым уравнением** – дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (8.13)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ – *оператор Лапласа*; v – фазовая скорость.

Решением уравнения (8.13) является уравнение любой волны. Уравнению удовлетворяют, в частности, плоская волна (8.6) и сферическая волна (8.12).

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x ,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (8.14)$$

[Если скорость гармонической волны не зависит от частоты (зависимость ω от v является линейной, т. е. отсутствует дисперсия), то такому же уравнению удовлетворяет любая суперпозиция плоских волн. Верно также и обратное утверждение: если уравнение движения частицы среды удалось привести к (8.14), то волновые возмущения данной среды распространяются со скоростью v].

8.1.3. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость

В линейной среде [между воздействием и возмущением – линейная зависимость] волны распространяются независимо друг от друга. Следовательно, выполняется *принцип суперпозиции (наложения) волн*: результирующее возмущение в какой-либо точке линейной среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн порознь [т. е. результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов].

Основываясь на *принципе суперпозиции волн*, любую волну можно представить в виде суммы гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$, т. е. в виде *группы волн*, или *волнового пакета* – суперпозиции волн, мало отличающихся друг от друга по частоте. Совокупность значений частот этих гармонических волн называется *спектром частот* (или *спектром*).

Простейшей группой волн является *квазигармоническая плоская волна*, получающаяся в результате наложения двух распространяющихся вдоль оси x плоских волн с одинаковыми амплитудами A_0 и близкими по значению частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$:

$$\begin{aligned} \xi &= A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (8.15)$$

где амплитуда

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right| \quad (8.16)$$

– медленно изменяющаяся функция координаты x и времени t .

За скорость распространения этой *квазигармонической волны* [волнового пакета] принимают скорость u перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. Следовательно, максимум амплитуды волны движется по закону $td\omega - xdk = \text{const}$, откуда получим

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \quad (8.17)$$

– *групповую скорость* – скорость переноса энергии негармонической волной.

Найдем связь между групповой u и фазовой $v = dx/dt$ [см. (8.9)] скоростями. Так как $\omega = vk$, а $k = 2\pi/\lambda$ и $dk = -2\pi d\lambda/\lambda^2$, где λ – длина волны, то

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

или

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (8.18)$$

Из формулы (8.18) вытекает, что u может быть как меньше, так и больше v в зависимости от знака $dv/d\lambda$; $u \leq c$ – скорости света в вакууме. В недиспергирующей среде $dv/d\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой [$u = v$].

8.1.4. Интерференция волн. Стоячие волны

Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз остается постоянной во времени. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. Источники когерентных волн называются *когерентными источниками*. При сложении когерентных волн наблюдается явление *интерференции*, т. е. устойчивое во времени ослабление амплитуды результирующей волны в одних точках пространства и усиление – в других, в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Важным примером интерференции волн является *стоячая волна*, возникающая при сложении двух одинаковых [когерентных] плоских бегущих волн, распространяющихся вдоль оси x навстречу друг другу [начало координат выбрано в точках, где обе волны имеют одинаковую начальную фазу, а отсчет времени, когда начальные фазы обеих волн равны нулю]:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = 2A \cos kx \cos \omega t, \quad (8.19)$$

или

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t \quad (8.19')$$

[учли, что $k = 2\pi/\lambda$]. Выражения (8.19) и (8.19') представляют собой *уравнения стоячей волны*.

Амплитуда колебаний точек стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = \left| 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| \quad (8.20)$$

периодически меняется от нуля до $2A$, т. е. является периодической функцией координаты x .

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.21)$$

амплитуда колебаний достигает *максимального значения* ($A_{\text{ст}} = 2A$); эти точки называются *пучностями стоячей волны*.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(m + \frac{1}{2})\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.22)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль ($A_{ст} = 0$); эти точки называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из выражений (8.21) и (8.22) получаются *координаты пучностей и узлов*:

$$x_{пуч} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (8.23)$$

$$x_y = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.24)$$

Следует иметь в виду, что пучность, как и узел, представляет собой не одну единственную точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x , определяемые формулой (8.23) [для узла – формулой 8.24)].

Из формул (8.23) и (8.24) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$.

В уравнении (8.19') множитель $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла различается на π . Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно, т. е. в одинаковой фазе.

[Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Если конец веревки закрепить неподвижно (например, в стене), то отраженная в месте крепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной, образуя стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае возникает узел.

Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если бегущая волна отражается от более плотной среды, то волна меняет фазу на противоположную, у границы складываются колебания с противоположными фазами, и на границе отражения наблюдается узел (рис. 78, а). Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит, и у границы складываются колебания с одинаковыми фазами – получается пучность (рис. 78, б)].

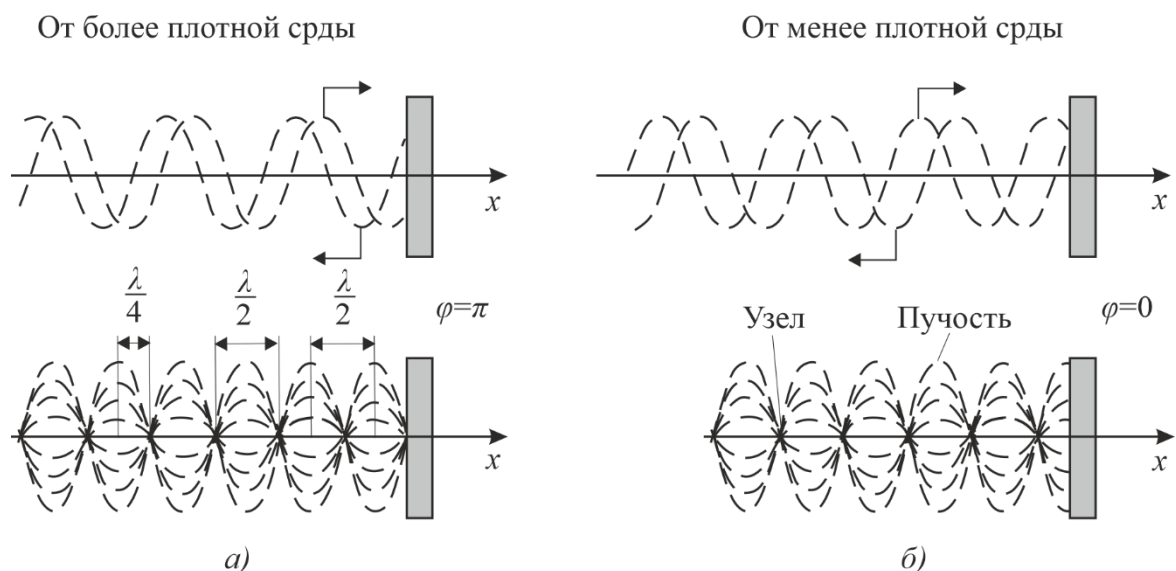


Рис. 78

В стоячей волне в отличие от бегущей *не происходит переноса энергии*, а осуществляется лишь перекачка энергии из одного вида в другой с удвоенной частотой [поскольку встречные бегущие волны одинаковой амплитуды переносят равную по величине энергию в противоположных направлениях и энергия колебания между двумя узлами остается постоянной, совершается лишь превращение кинетической энергии в потенциальную, и наоборот (электрической энергии в магнитную, и наоборот – в случае электромагнитных стоячих волн)].

8.1.5. Звуковые волны

Акустика (от греч. *akustikós* – слуховой) – область физики и техники, изучающая упругие (звуковые) колебания и волны в различных средах, их возбуждение и восприятие, распространение, взаимодействие со средой, а также разнообразное применение. (Большая российская энциклопедия).

Звуковые (или **акустические**) **волны** – упругие волны с частотами от 16 Гц до 20 кГц, распространяющиеся в среде. Особенностью звуковых волн, отличающих их от электромагнитных или гравитационных, является то, что они могут распространяться только в сплошной упругой среде.

Звуковые волны, частота колебаний ν которых ниже 20 Гц, называют **инфразвуком**. [Затухание инфразвука невелико, и поэтому инфразвуковые волны активно используются для исследования океана и структуры земли. Звуки взрывов вулканов могут обогнуть весь земной шар, низкочастотный подводный звук распространяется через океаны на тысячи километров].

Ультразвуком называют звуковые волны, частота колебаний ν которых выше 20 кГц. [Технологически развитый диапазон применения ультразвука лежит в пределах от 20 кГц до 100 МГц. Более высокочастотная область ультразвука получила название **гиперзвук**. Звуковые волны гиперзвуковых частот могут распространяться только в кристаллах с малым поглощением звука, таких, как монокристаллы кварца, сапфира, ниобата лития, железо-иттриевого граната и др. Гиперзвук используется при обработке больших массивов информации, в том числе оптических изображений, и исследовании строения твердых тел. Этим занимается наука **акустоэлектроника**].

Волны с $\nu < 16$ Гц (*инфразвуковые*) и $\nu > 20$ кГц (*ультразвуковые*) органами слуха человека не воспринимаются.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными, поскольку твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

Характеристики звука. 1. Интенсивность звука (или **сила звука**) – энергетическая характеристика – величина, определяемая средней по времени энергией W , переносимой звуковой волной в единицу времени t сквозь единичную площадку S , перпендикулярную направлению распространения волны:

$$I = \frac{W}{St}. \quad (8.25)$$

Единица интенсивности звука I – *ватт на метр в квадрате* [Вт/м²].

Чувствительность человеческого уха различна для разных частот. Для каждой частоты колебаний существует наименьшая (*порог слышимости*) и наибольшая (*порог болевого ощущения*) интенсивности звука, которые способны вызвать

звуковое восприятие. Область, расположенная между кривыми *болевого порога* и *порога слышимости*, является **областью слышимости** (рис. 79).

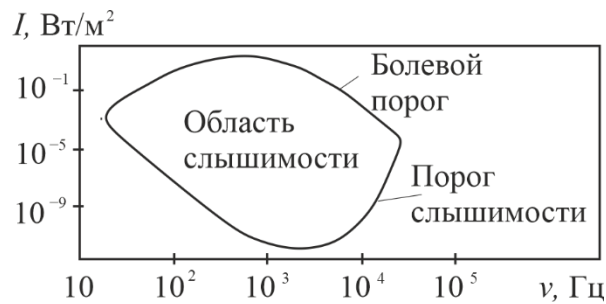


Рис. 79

2. Громкость звука – субъективная характеристика – величина, характеризующая слуховое ощущение для данного звука и зависящая от интенсивности звука, частоты и формы звуковых колебаний.

3. Уровень интенсивности звука L – объективная оценка громкости звука по измеренному значению его интенсивности:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (8.26)$$

где I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех звуков равной 10^{-12} Вт/м² [порог слышимости при частоте порядка $\nu = 10^3$ Гц лежит на нулевом уровне громкости ($L = 0$)].

Физиологический закон Вебера – Фехнера: с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону [см. (8.26)].

Единица уровня громкости L , определяемого формулой (8.26), – *бел* [Б] (в честь изобретателя телефона А. Белла). Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами – *децибелами* [дБ]. Значение L в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (8.27)$$

Отношение двух интенсивностей I_1 и I_2 также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (8.28)$$

[С помощью формулы (8.28) может быть выражено в дБ уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Так, например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз].

4. Уровень громкости – физиологическая характеристика – выражается в **фонах** [фон]. Громкость для звука в 1000 Гц (частота стандартного чистого тона) равна 1 фон, если его уровень интенсивности равен 1 дБ. [Например, шум в вагоне метро при большой скорости соответствует ~90 фон, а речь средней громкости – 40 фон].

5. Высота звука – субъективная характеристика – качество звука, определяемое человеком на слух и зависящее от частоты звука. С повышением частоты высота звука увеличивается, т. е. звук становится «выше».

6. Тембр звука – своеобразное звуковое ощущение, определяемое характером *акустического спектра* [совокупность гармонических колебаний, на которые можно разложить звуковую волну] и распределением энергии между определенными частотами.

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (камертон, язычок звонка, голосовые связки, в струнных инструментах – струна, соединенная с корпусом инструмента и т. д.).

Скорость распространения звуковых волн *в газах* вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (8.29)$$

где p и ρ – давление и плотность невозмущенного волной газа; R – молярная газовая постоянная; M – молярная масса; $\gamma = C_p/C_V$ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме; T – термодинамическая температура.

Из формулы (8.29) следует, что скорость звука v пропорциональна корню квадратному из температуры T [$v \sim \sqrt{T}$] и не зависит от давления p . Чем больше молярная масса газа M , тем меньше в нем скорость звука. Формула (8.29) соответствует опытным данным. [Например, при $T = 290$ К скорость звука в воздухе ($M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\gamma = 1,4$) $v = 341$ м/с, в H_2 ($\gamma = 1,4$; $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) $v = 1299$ м/с].

Скорость распространения звуковых волн в *изотропных твердых телах*

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\text{поп}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (8.30)$$

где E и G – модуль упругости и модуль сдвига; ρ – плотность тела.

Скорость распространения звуковых волн в *жидкостях*

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (8.31)$$

где K – объемный модуль упругости; ρ – плотность жидкости.

В приложении (см. табл. 24) приведены скорости распространения звуковых волн в различных средах [скорость звука в твердых телах значительно больше, чем в жидкостях и газах, так как упругость значительно больше].

8.1.6. Эффект Доплера для звуковых волн

Эффектом Доплера [1842 г.] называется изменение частоты ν или длины волны λ , воспринимаемой приемником (*наблюдателем*) при движении источника этих колебаний и приемника относительно друг друга. Например, тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение гудка (*источника колебаний*) относительно уха (*приемника*) изменяет частоту ν принимаемых колебаний.

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой [направим ось x от приемника к источнику]. Скорость источника $u_{\text{ист}}$ будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник движется в направлении от приемника; аналогично скорость приемника $u_{\text{пр}}$ – положительной, если приемник движется по направлению к источнику, и отрицательной, если приемник движется в направлении от источника. Частота колебаний источника равна ν_0 .

1. Источник и приемник покоятся, т. е. $v_{\text{ист}} = v_{\text{пр}} = 0$. Если v – скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде, то $\lambda = vT = v/v_0$. Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет колебания его звукочувствительного элемента с частотой

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{vT} = \nu_0$$

[частота ν принимаемого сигнала равна частоте колебаний источника ν_0].

2. Приемник приближается к источнику, а источник покоится, т. е. $v_{\text{пр}} > 0$, $v_{\text{ист}} = 0$. Скорость распространения волны относительно приемника $v + v_{\text{пр}}$. Длина волны λ не меняется, поэтому

$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{vT} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{v} \cdot \nu_0$$

[частота ν колебаний, воспринимаемых приемником, в $(v + v_{\text{пр}})/v$ раз больше частоты колебаний источника ν_0].

3. Источник приближается к приемнику, а приемник покоится, т. е. $v_{\text{ист}} > 0$, $v_{\text{пр}} = 0$. Скорость распространения волны v зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду T колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние $vT = \lambda$ (равное длине волны, – независимо от того, движется или покоится источник). За время T источник пройдет в направлении волны расстояние $v_{\text{ист}}T$ (рис. 80), т. е. длина волны λ' в направлении движения сократится и станет равной

$$\lambda' = \lambda - v_{\text{ист}}T = (v - v_{\text{ист}})T.$$

Тогда

$$\nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{\text{ист}})T} = \frac{v}{v - v_{\text{ист}}} \cdot \nu_0$$

[частота ν колебаний, воспринимаемых приемником, в $v/(v - v_{\text{ист}})$ раз больше частоты колебаний источника ν_0].

В случаях 2 и 3, если $v_{\text{ист}} < 0$ и $v_{\text{пр}} < 0$, знак будет обратным.

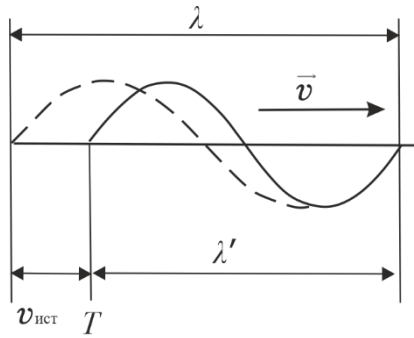


Рис. 80

4. Источник и приемник движутся относительно друг друга. Используя результаты случаев 2 и 3, получаем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником:

$$v = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})v_0}{v \mp v_{\text{ист}}} \quad (8.32)$$

[верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления].

Если направления скоростей $\vec{v}_{\text{ист}}$ и $\vec{v}_{\text{пр}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо скоростей $v_{\text{ист}}$ и $v_{\text{пр}}$ в формуле (8.32) нужно брать проекции векторов $\vec{v}_{\text{ист}}$ и $\vec{v}_{\text{пр}}$ на направление этой прямой.

[Из формулы (8.32) следует, что эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями движения источника и приемника *относительно среды*, в которой распространяется звук. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты имеет иной вид, чем (8.32). В случае *продольного эффекта Доплера* для световых волн

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}},$$

где c – скорость света в вакууме; v – скорость приемника по отношению к источнику света. Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой «свет». Поэтому скорости источника и приемника света относительно «среды» не имеют смысла. В случае света можно говорить лишь об относительной скорости v приемника и источника. Эффект Доплера для световых волн зависит от модуля и направления этой скорости].

8.1.7. Ультразвук и его применение

Ультразвук – это акустические волны с частотами ν от $2 \cdot 10^4$ Гц до 10^9 Гц [см. п. 8.1.5]. Выделяют ультразвук *низких* ($2 \cdot 10^4 - 10^5$ Гц), *средних* ($10^5 - 10^7$ Гц) и *высоких* ($10^7 - 10^9$ Гц) частот. Каждый из этих диапазонов характеризуется специфическими особенностями генерации, приема, распространения и применения. По физической природе ультразвук представляет собой упругие волны, и в этом он не отличается от звука, поэтому частотная граница между звуковыми и ультразвуковыми волнами условна. Однако благодаря более высоким частотам и, следовательно, малым длинам волн [так, длины волн ультразвука высоких частот в воздухе составляют $3,4 \cdot 10^{-3} - 3,4 \cdot 10^{-7}$ м, в воде $1,5 \cdot 10^{-4} - 1,5 \cdot 10^{-6}$ м, в стали $5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-6}$ м] имеет место ряд особенностей распространения ультразвука.

[Ввиду малой длины волны ультразвука характер его распространения определяется в первую очередь молекулярной структурой среды, поэтому измеряя скорость и коэффициент затухания ультразвука, можно судить о молекулярных свойствах вещества. Характерная особенность распространения ультразвука в многоатомных газах и во многих жидкостях – существование областей *дисперсии звука* – зависимости фазовой скорости гармонических акустических (звуковых) волн от частоты, сопровождающейся сильным возрастанием его поглощения. Ультразвук в газах, и в частности в воздухе, распространяется с большим затуханием. Жидкости и твердые тела (особенно монокристаллы), представляют собой, как правило, хорошие проводники ультразвука, затухание в них значительно меньше. Поэтому области использования ультразвука средних и высоких частот относятся почти исключительно к жидкостям и твердым телам, а в воздухе и газах применяют только ультразвук низких частот.

Другая особенность ультразвука – возможность получения большой интенсивности даже при сравнительно небольших амплитудах колебаний, т. к. при данной амплитуде плотность потока энергии пропорциональна квадрату частоты ($S \sim \nu^2$). Ультразвуковые волны большой интенсивности сопровождаются рядом нелинейных эффектов. Так, для интенсивных плоских ультразвуковых волн при малом поглощении среды гармоническая у излучателя волна превращается по мере распространения в слабую периодическую ударную волну (поглощение таких волн оказывается значительно больше, чем волн малой амплитуды). Распространению ультразвуковых волн в газах и жидкостях сопутствует движение среды (*акустическое течение* – регулярное течение среды в звуковом поле большой интенсивности). К числу важных нелинейных явлений, возникающих при распространении интенсивного ультразвука

в жидкостях, относится **акустическая кавитация** – возникновение в жидкостях пузырьков, заполненных газом, паром и (или) их смесью, под действием акустических волн].

Для генерации ультразвука используются *механические* и *электро-механические устройства*.

Механические излучатели ультразвука (воздушные и жидкостные свистки и сирены) отличаются простотой устройства и эксплуатации, не требуют электрической энергии высокой частоты [применяются главным образом в промышленной ультразвуковой технологии и как средства сигнализации].

Электро-механические излучатели ультразвука преобразуют электрические колебания в механические. В диапазоне *ультразвука низких частот* возможно использование *электродинамических* и *электростатических излучателей*. В этом диапазоне частот широко применяются **магнитострикционные преобразователи** – электро-механические или электроакустические преобразователи, в которых энергия переменного магнитного поля преобразуется в энергию механических колебаний и наоборот благодаря *эффекту магнитострикции*. [**Магнитострикция** (открыто Дж. Джоулем в 1842 г.) – это изменение формы и размеров тела (ферромагнетика) при изменении его магнитного состояния, например, в результате намагничивания или фазового перехода].

Для излучения *ультразвука средних и высоких частот* служат главным образом **пьезоэлектрические преобразователи** – электро-механические или электроакустические преобразователи, действие которых основано на *пьезоэлектрическом эффекте*. [**Пьезоэлектрики** – вещества, в которых: а) при упругих деформациях (напряжениях) возникает электрическая поляризация даже в отсутствие электрического поля – *прямой пьезоэффект*; б) под действием электрического поля возникают механические деформации – *обратный пьезоэффект*, например, возникновение деформации в вырезанной определенным образом кварцевой пластинке (или титаната бария). Для увеличения амплитуды колебаний и излучаемой в среду мощности применяются резонансные колебания магнитострикционных и пьезоэлектрических элементов на их собственной частоте. Идея кварцевого ультразвукового генератора принадлежит французскому физическому П. Ланжевону].

Магнитострикционные и пьезоэлектрические преобразователи применяются и для приема **ультразвука**.

Ультразвуковые методы используются в *физике твердого тела*, в частности в физике полупроводников. Ультразвук играет большую роль в изучении структуры вещества. Наряду с методами молекулярной акустики для жидкостей и газов, измерение скорости и коэффициента поглощения ультразвуком используется для определения модулей упругости и диссипативных характеристик твердых тел.

Ультразвук широко применяется в *технике*. По данным измерений скорости и коэффициента поглощения ультразвуком осуществляется контроль за протеканием технологических процессов. Ультразвук сравнительно малой интенсивности применяется для неразрушающего контроля изделий из твердых материалов. При помощи ультразвука осуществляется *звуковидение*. [Для получения увеличенных изображений предмета с помощью ультразвука высокой частоты создан *акустический микроскоп*. Важную роль ультразвук играет в *гидроакустике*. На принципе отражения ультразвуковых импульсов от препятствий, возникающих на пути их распространения, основана работа *эхолота*, *гидролокатора* и др.].

Ультразвук *большой интенсивности* (главным образом *диапазон низких частот*) оказывает воздействие на протекание технологических процессов. Так, при помощи мощного ультразвука ускоряется ряд процессов тепло- и массообмена в металлургии. Воздействие ультразвуковых колебаний непосредственно на расплавы позволяет получить более мелкокристаллическую и однородную структуру металла. *Ультразвуковая кавитация* используется для очистки от загрязнений мелких и крупных производственных деталей.

При действии ультразвука на *биологические объекты* происходит поглощение и преобразование акустической энергии в тепловую. Локальный нагрев тканей на доли и единицы градусов способствует жизнедеятельности биологических объектов, повышая интенсивность процессов обмена вещества. В *медицине* ультразвук используется для диагностики, терапевтического и хирургического лечения [*ультразвуковая диагностика*, *ультразвуковая терапия*].

Ультразвук способны воспринимать и генерировать некоторые виды животных (летучие мыши, дельфины), некоторые виды птиц и насекомых и др.

8.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

8.2.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля

Электромагнитными волнами называются возмущения переменного электромагнитного поля, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью. Утверждение о существовании электромагнитных волн является непосредственным следствием уравнений Максвелла [см. п. 6.3]. В однородной и изотропной среде, не поглощающей энергию, вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, векторы напряженностей \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля удовлетворяют **волновому уравнению** [см. формулу (8.13)]:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (8.33)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (8.34)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа; v – фазовая скорость.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (8.33) и (8.34), описывает некоторую волну. Следовательно, уравнения (8.33) и (8.34) указывают на то, что электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (8.35)$$

где ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды;

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (8.36)$$

– *скорость электромагнитных волн в вакууме*. Оказалось, что $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, т. е. совпадает со скоростью света в вакууме [$\varepsilon = \mu = 1$]. Поэтому Максвелл еще задолго до экспериментального подтверждения существования электромагнитных волн высказал гипотезу о том, что свет – это электромагнитная волна [впервые экспериментально доказал существование электромагнитных волн Генрих

Герц в 1888 г., спустя 9 лет после смерти Максвелла]. В веществе $\epsilon\mu > 1$, поэтому скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

8.2.2. Свойства электромагнитных волн

Анализ уравнений Максвелла показывает, что векторы напряженностей переменного электрического поля (\vec{E}) и переменного магнитного поля (\vec{H}) в плоской электромагнитной волне взаимно перпендикулярны и всегда направлены перпендикулярно направлению распространения колебаний [вектору ее скорости \vec{v} в рассматриваемой точке поля], т. е. электромагнитная волна является поперечной (рис. 81). [На рисунке показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны. Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют *правовинтовую систему*: направление распространения электромагнитной волны совпадает с поступательным движением острия винта, головка которого вращается по направлению кратчайшего поворота от вектора \vec{E} к вектору \vec{H} (смотреть надо вдоль направления распространения волны). Чтобы получить волну, распространяющуюся навстречу изображенной на рис. 81, надо изменить направление одного из векторов (\vec{E} или \vec{H}) на противоположное].

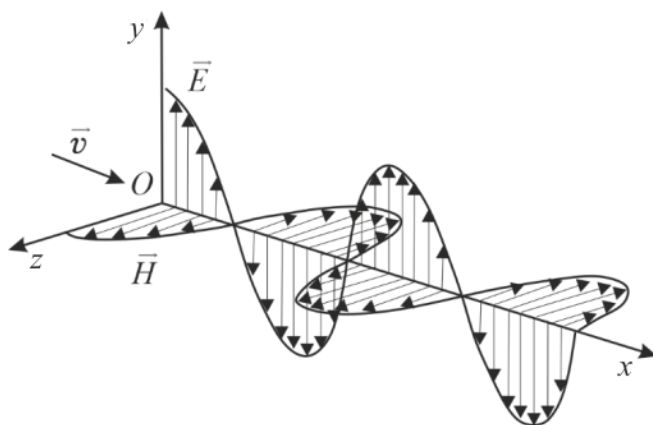


Рис. 81

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} всегда колеблются в одинаковых фазах (см. рис. 81), причем мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (8.37)$$

Следовательно, E и H одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д. От волновых уравнений (8.33) и (8.34) можно перейти к уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (8.39)$$

где соответственно индексы y и z при E и H подчеркивают лишь то, что векторы \vec{E} и \vec{H} направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z (см. рис. 81). [$E_x = E_z = 0$ и $H_x = H_y = 0$, так что $E_y = E$ и $H_z = H$]. Уравнения (8.38) и (8.39) представляют частный случай уравнений (8.33) и (8.34).

Уравнениям (8.38) и (8.39) удовлетворяют, в частности, плоские **монохроматические электромагнитные волны** (электромагнитные волны одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad (8.40)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (8.41)$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – циклическая (круговая) частота волны; $k = \omega/v$ – волновое число; φ – начальные фазы колебаний в точке с координатой $x = 0$.

В уравнениях (8.40) и (8.41) φ одинаково, так как колебания векторов \vec{E} и \vec{H} в электромагнитной волне происходят в одинаковой фазе – они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

8.2.3. Энергия и импульс электромагнитной волны

Электромагнитная волна переносит энергию в направлении своего распространения. Эта энергия, содержащаяся в электрическом и магнитном полях, распределена в пространстве с плотностями [см. (2.28) и (5.53)]

$$w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \text{ и } w_{\text{м}} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2},$$

поэтому объемную плотность энергии электромагнитной волны можно представить в виде

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (8.42)$$

С учетом формул (8.35) и (8.37) выражение (8.42) преобразуется к виду

$$w = 2w_{\text{эл}} = 2w_{\text{м}} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu} E H \quad (8.43)$$

или **объемную плотность энергии** электромагнитных волн в произвольный момент времени в данной точке пространства можно представить в виде

$$w = \frac{E H}{v}. \quad (8.44)$$

Умножив выражение (8.44) на скорость волны v , получим *модуль плотности потока энергии*:

$$S = wv = E H \quad (8.45)$$

– количество энергии, переносимое электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Направление вектора $[\vec{E}\vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен $E H$. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (8.46)$$

Вектор \vec{S} называется **вектором Умова – Пойнтинга** [направлен в сторону распространения электромагнитной волны].

В случае *плоской линейно поляризованной монохроматической волны*, распространяющейся вдоль положительного направления оси x , напряженность поля $E = A \sin(\omega t - kx)$. Соответственно объемная плотность энергии этой волны

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon A^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (8.47)$$

Значение w в каждой точке поля периодически колеблется с частотой ω/π в пределах от 0 до $w_{\max} = \varepsilon_0 \varepsilon A^2$. Среднее за период значение w пропорционально квадрату амплитуды напряженности поля:

$$\langle w \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} w dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon A^2. \quad (8.48)$$

Интенсивность монохроматической бегущей электромагнитной волны

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \langle w \rangle v. \quad (8.49)$$

Согласно (8.48), интенсивность плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны прямо пропорциональна квадрату амплитуды A колебаний вектора \vec{E} поля волны:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} A^2. \quad (8.50)$$

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами [эти явления подтверждены опытами Г. Герца], то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Это объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают двигаться упорядоченно и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию силы Лоренца [см. п. 4.3]. Эта сила, отнесенная к единице поверхности, и есть давление электромагнитной волны. [Давление света и электромагнитный импульс настолько малы, что непосредственное их измерение затруднительно. Так, зеркало, расположенное на расстоянии 1 м от источника света в миллион свечей (кд), испытывает давление 10^{-7} Н/м². Давление излучения Солнца на поверхность Земли равно $4,3 \cdot 10^{-6}$ Н/м², а общее давление излучения Солнца на Землю равно $6 \cdot 10^8$ Н, что в 10^{13} раз меньше силы притяжения Солнца. Давление электромагнитных волн на твердые тела (1899 г.) и газы (1910 г.) экспериментально подтверждено П.Н. Лебедевым. Опыты П.Н. Лебедева имели огромное значение для утверждения электромагнитной теории Дж. Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны].

Импульс электромагнитного поля

$$p = \frac{E}{c}, \quad (8.51)$$

где E – энергия электромагнитного поля; c – скорость света в вакууме. Выражая импульс как $p = mc$, получим $p = mc = E/c$, откуда

$$E = mc^2. \quad (8.52)$$

Соотношение (8.52) между массой и энергией электромагнитного поля является *универсальным законом природы*, справедливым для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Электромагнитное поле обладает всеми признаками материальных тел – энергией (E), конечной скоростью распространения (c), массой (m), импульсом (\vec{p}). Это говорит о том, что электромагнитное поле является одной из форм существования материи.

Электромагнитные волны обладают широким диапазоном частот (или длин волн в вакууме $\lambda = c/\nu$); они отличаются по способам генерации, регистрации, а также по своим свойствам. [Поэтому электромагнитные волны разделяют на несколько видов: *радиоволны*, *оптическое излучение* (инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое), *рентгеновское излучение* и *гамма-излучение* (границы между различными видами электромагнитных волн довольно условны)].

Шкала электромагнитных волн приведена на рис. 82.

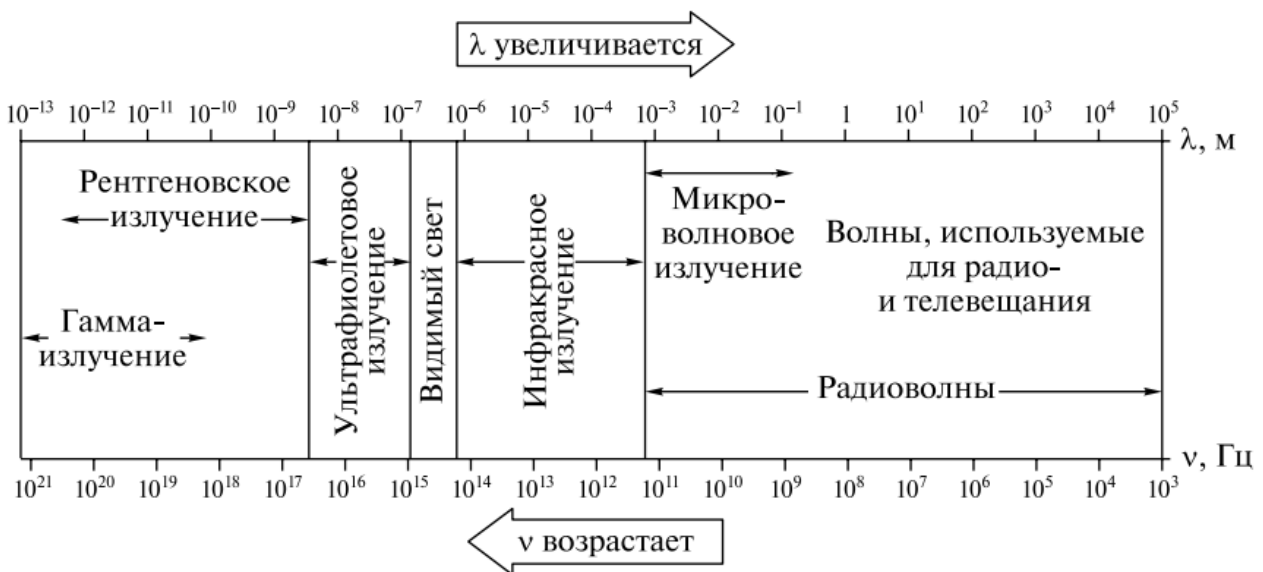


Рис. 82

8.2.4. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся *электрический диполь*. Примером такого диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся около него точечным зарядом $-q$ (см. рис. 83).

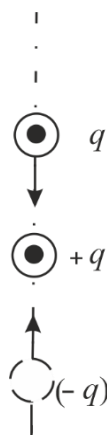


Рис. 83

Линейным гармоническим осциллятором или *элементарным вибратором* называется электрический диполь, дипольный электрический момент которого изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\vec{p} = -q\vec{r} = \vec{p}_0 \cos \omega t, \quad (8.53)$$

где \vec{r} – радиус-вектор заряда; \vec{p}_0 – амплитуда вектора \vec{p} .

Осциллятором пользуются для моделирования и расчета полей реальных систем. Если размеры излучающей системы (*диполя*) малы по сравнению с длиной λ излучаемых волн, то **в волновой зоне диполя**, т. е. в точках пространства, отстоящих от диполя на $r \gg \lambda$, поле излучения близко к полю излучения осциллятора, имеющего такой же электрический момент, как и вся излучающая система.

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии r от диполя, фаза гармониче-

ских колебаний одинакова, т. е. в волновой зоне волновой фронт будет сферическим, – волна, излучаемая диполем, есть сферическая волна. В каждой точке векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$, амплитуды этих векторов E_0 и H_0 пропорциональны $(1/r) \sin \theta$ [θ – угол между вектором r и осью диполя; r – расстояние до излучателя].

Интенсивность излучения диполя в волновой зоне

$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (8.54)$$

В полярных координатах зависимость интенсивности I излучения от угла θ , называемая **диаграммой направленности излучения диполя**, приведена на рис. 84. [Диполь сильнее всего излучает в направлении, составляющем угол $\theta = \pi/2$ (см. формулу (8.54) и рис. 84)), т. е. в плоскости, проходящей через середину диполя перпендикулярно его оси. Вдоль своей оси [$\theta = 0$ и $\theta = \pi$] диполь не излучает. Диаграмма направленности излучения диполя позволяет формировать излучение с определенными характеристиками и используется при конструировании антенн].

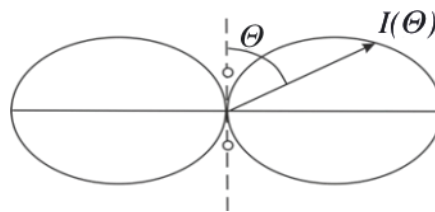


Рис. 84

Дипольное излучение, как и любое другое электромагнитное излучение, уносит из источника энергию, уменьшая тем самым энергию колебаний дипольного момента. **Средняя мощность излучения диполя** [энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени]

$$\langle P \rangle = p_0^2 \omega^4 \quad (8.55)$$

пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

8.2.5. Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

Главное отличие эффекта Доплера для электромагнитных волн в вакууме от *акустического эффекта Доплера* [см. п. 8.1.6] состоит в том, что отсутствует система отсчета, связанная со средой, в которой распространяется электромагнитная волна (в вакууме особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн, не существует). [Закономерности эффекта Доплера для электромагнитных волн устанавливаются на основе специальной теории относительности (СТО). Согласно СТО Эйнштейна, уравнение световой волны во всех инерциальных системах отсчета (ИСО) одинаково по форме. Используя преобразования Лоренца, можно получить уравнение волны, посылаемой источником, в направлении приемника в другой ИСО, а следовательно, и связь частоты электромагнитных волн, *излучаемых источником* (ν_0) и *воспринимаемых приемником* (ν). Поэтому соотношение – *доплеровское смещение частоты электромагнитных волн* – между частотой излучения ν_0 и зарегистрированной частотой ν (измеренной в системе отсчета приемника) может зависеть только от их относительной скорости].

СТО приводит к формуле, описывающей ***продольный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме***:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \left(\frac{v}{c}\right) \cos \theta} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (8.56)$$

где v – скорость источника относительно приемника (*относительная скорость*); c – скорость света в вакууме; θ – угол между вектором скорости \vec{v} и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

В случае, если $v \ll c$, формулу (8.56) можно приближенно записать следующим образом:

$$\nu \approx \nu_0 \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}\right).$$

Отсюда, ограничившись членами порядка v/c , получим

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_0(1 - \beta). \quad (8.57)$$

Из формулы (8.57) можно найти относительное изменение частоты при *продольном эффекте Доплера*:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c}, \quad (8.58)$$

где $\Delta\nu = \nu - \nu_0$.

Из формулы (8.57) следует, что при удалении источника и приемника друг от друга $v > 0$ – наблюдается *сдвиг в более длинноволновую область* [$\nu < \nu_0$, $\lambda > \lambda_0$]; при сближении же источника и приемника $v < 0$ – наблюдается *сдвиг в более коротковолновую область* [$\nu > \nu_0$, $\lambda < \lambda_0$].

Если $\theta = \pi/2$, то из выражение (8.56) можно найти формулу для ***поперечного эффекта Доплера*** наблюдаемого при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (8.59)$$

Относительное изменение частоты при *поперечном эффекте Доплера*

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (8.60)$$

пропорционально квадрату отношения v/c и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте Доплера, для которого относительное изменение частоты пропорционально первой степени v/c [см. (8.58)].

[Поперечный эффект Доплера был экспериментально обнаружен американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стиуэллом в 1938 г. Продольный эффект Доплера был впервые обнаружен в 1900 г. в лабораторных условиях русским астрофизиком А.А. Белопольским.].

8.2.6. Шкала электромагнитных волн

В зависимости от частоты ν или длины волны в вакууме $\lambda = c/\nu$, а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн с условными (*перекрывающимися*) границами: ***радиоволны, оптическое (световое) излучение, рентгеновское излучение и гамма-излучение*** (табл. 1).

Диапазоны электромагнитных волн

Таблица 1

№ п/п	Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источники излучения
1.	Радиоволны	$10^4 - 5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^{12}$	Колебательный контур Вибратор Герца Массовый излучатель Ламповый генератор
2.	Световые волны: инфракрасное излучение видимый свет ультрафиолетовое излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$ $8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$ $4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$ $3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$ $7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Лампы, лазеры
3.	Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Трубки Рентгена
4.	Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад Ядерные процессы Космические процессы

Радиоволнами называются электромагнитные волны, длина λ которых в вакууме больше $5 \cdot 10^{-5}$ м ($\nu < 6 \cdot 10^{12}$ Гц).

В связи с особенностями распространения и генерации весь **диапазон радиоволн** принято делить на *девять поддиапазонов* (табл. 2).

Диапазон радиоволн

Таблица 2

№ п/п	Диапазон	Длина волны	Частота
1.	Сверхдлинные волны	Более 10^4	Менее $3 \cdot 10^4$
2.	Длинные волны	$10^4 - 10^3$	$3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$
3.	Средние волны	$10^3 - 10^2$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$
4.	Короткие волны	$10^2 - 10$	$3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$
5.	Метровые волны	$10 - 1$	$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8$
6.	Дециметровые волны	$1 - 0,1$	$3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^9$
7.	Сантиметровые волны	$0,1 - 0,01$	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{10}$
8.	Миллиметровые волны	$10^{-2} - 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{11}$
9.	Субмиллиметровые волны	$10^{-3} - 5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{11} - 6 \cdot 10^{12}$

Процессы излучения и поглощения электромагнитных волн от самых длинных волн до инфракрасного излучения достаточно полно описываются соотношениями электродинамики. На более высоких частотах доминируют процессы, имеющие существенно квантовую природу, а в оптическом диапазоне и тем более в диапазонах рентгеновских и γ -лучей излучение и поглощение электромагнитных волн могут быть описаны только на основе представлений о дискретности этих процессов.

Примеры решения задач

8.1. Радиостанция работает на частоте волны 24 МГц. Сколько колебаний несущей частоты происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой 8 кГц?

Дано: $\nu = 24 \text{ МГц} = 24 \cdot 10^6 \text{ Гц}$; $\nu_{\text{зв}} = 8 \text{ кГц} = 8 \cdot 10^3 \text{ Гц}$.

Найти: N .

Решение. Период звуковых колебаний

$$T_{\text{зв}} = \frac{1}{\nu_{\text{зв}}}. \quad (1)$$

Период колебаний T , соответствующий несущей частоте радиостанции

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad (2)$$

где ν – длина электромагнитной волны.

Учитывая выражения (1) и (2) для периодов, найдем искомое число колебаний несущей частоты в течение одного периода:

$$N = \frac{T_{\text{зв}}}{T} = \frac{\nu}{\nu_{\text{зв}}}. \quad (3)$$

Ответ: $N = 3000$.

8.2. Скорость распространения звука в гелии при нормальных условиях равна 970 м/с. Найдите наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$ молекул гелия при тех же условиях.

Дано: $v = 970 \text{ м/с}$; $i = 3$; [н. у.: $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$; $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$].

Найти: $v_{\text{в}}$.

Решение. Скорость распространения звука в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (1)$$

где $\gamma = C_p/C_V$ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении ($p = \text{const}$) и объеме ($V = \text{const}$).

Наиболее вероятная скорость молекул газа

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (2)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы; T – термодинамическая температура; $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – молярная газовая постоянная; M – молярная масса газа.

Поделив выражение (2) на (1), получаем:

$$\frac{v_B}{v} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}. \quad (3)$$

Учитывая, что для одноатомного газа число степеней свободы $i = 3$, отношение молярных теплоемкостей газа будет равно:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i + 2}{i} = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, искомая наиболее вероятная скорость молекул гелия:

$$v_B = v \sqrt{\frac{2i}{i + 2}} = v \sqrt{1,2}. \quad (4)$$

Ответ: $v_B = 1062,58$ м/с.

8.3. Волна с частотой колебаний 3 Гц и амплитудой 0,4 м распространяется в упругой среде со скоростью 25 м/с. Найдите длину волны λ , а также для момента времени $t = 3$ с фазу колебаний, смещение, скорость, ускорение частицы, отстоящей на расстоянии 50 м от источника.

Дано: $\nu = 3$ Гц; $A = 0,4$ м; $v = 25$ м/с; $t = 3$ с; $l = 50$ м.

Найти: λ ; φ ; ξ ; v_1 ; a .

Решение. Длина волны λ равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза волны за период T , т. е.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}, \quad (1)$$

где v – скорость волны; ν – частота колебаний.

Уравнение бегущей волны:

$$\xi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \omega \left(t - \frac{l}{v} \right), \quad (2)$$

где ξ – смещение частицы среды от положения равновесия; A – амплитуда волны; l – расстояние частицы среды от источника волн в момент времени t ; v – скорость распространения волны; $\varphi = \omega(t - l/v)$ – фаза колебаний.

Фаза колебаний в момент времени t :

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{l}{v} \right) = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{l}{v} \right) = 2\pi\nu \left(t - \frac{l}{v} \right). \quad (3)$$

Подставив в формулу (3) численные значения величин, найдем:

$$\varphi = 2\pi \cdot 3 \left(3 - \frac{50}{25} \right) = 6\pi.$$

Смещение точки в этот момент времени $t = 3$ с равно:

$$\xi = A \sin 6\pi = 0.$$

Скорость частицы в момент времени t найдем как первую производную от смещения по времени:

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt} = A\omega \cos \omega \left(t - \frac{l}{v} \right) = A \cdot 2\pi\nu \cos \omega \left(t - \frac{l}{v} \right). \quad (4)$$

Подставив численные значения, найдем:

$$v_1 = 0,4 \cdot 6,28 \cdot 3 \cdot \cos 6\pi = 7,536 \text{ м/с.}$$

Ускорение частицы в момент времени t ($t = 3$ с):

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{l}{v} \right) = -A\omega^2 \sin 6\pi = 0.$$

Ответ: $\lambda = 8,33$ м; $\varphi = 6\pi$; $\xi = 0$; $v_1 = 7,54$ м/с; $a = 0$.

8.4. В немагнитной среде ($\mu = 1$) с диэлектрической проницаемостью, равной $\varepsilon = 3$, распространяется плоская электромагнитная волна. Найдите амплитуду напряженности H_0 магнитного поля и фазовую скорость v волны, если амплитуда напряженности электрического поля волны равна $E_0 = 75$ В/м.

Дано: $\mu = 1$; $\varepsilon = 3$; $E_0 = 75$ В/м.

Найти: H_0 ; v .

Решение. Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны:

$$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2, \text{ или } \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

В электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} всегда колеблются в одинаковых фазах, поэтому выражение (1) может быть записано и для мгновенных значений амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0. \quad (2)$$

Из выражения (2) получаем искомую амплитуду напряженности магнитного поля электромагнитной волны:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0. \quad (3)$$

Ответ: $H_0 = 0,35$ А/м.

8.5. Найдите энергию W , переносимую распространяющейся в вакууме плоской электромагнитной волной, через поверхность площадью $0,25 \text{ м}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за время $0,5$ мин. Амплитуда напряженности магнитного поля 14 мА/м. Период волны $T \ll t$.

Дано: $S = 0,25 \text{ м}^2$; $t = 30 \text{ с}$; $H_0 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}$; $\varepsilon = 1$; $\mu = 1$; $T \ll t$.

Найти: W .

Решение. Электромагнитные волны переносят энергию. Объемная плотность w энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{\text{эл}}$ электрического и $w_{\text{м}}$ магнитного полей:

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (1)$$

Учитывая выражение

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H, \quad (2)$$

получим, что объемные плотности энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинаковы, т.е. $w_{\text{эл}} = w_{\text{м}}$. Поэтому можно записать:

$$w = 2w_{\text{эл}} = 2w_{\text{м}} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2. \quad (3)$$

Энергия, переносимая через площадку S , перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени:

$$\frac{dW}{dt} = \int_S \vec{P} d\vec{S} = PS = SE_0 H_0 \sin^2 \omega t = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_0^2 S \sin^2 \omega t \quad (4)$$

[учли, что плотность потока энергии электромагнитной волны определяется вектором Умова – Пойнтинга: $\vec{P} = \vec{E} \vec{H}$; векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны,

поэтому $P = EH = E_0 H_0 \sin^2 \omega t$, где $E = E_0 \sin \omega t$ и $H = H_0 \sin \omega t$ – соответственно напряженности электрического и магнитного полей; E_0 и H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны].

Энергия, переносимая волной за время t , будет определяться интегралом:

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega dt = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_0^2 S \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \quad (5)$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому $t/2 \gg \sin 2\omega t / 4\omega$, тогда:

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_0^2 S t. \quad (6)$$

Ответ: $W = 0,28$ Дж.

8.6. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде, имеет вид: $E = 12 \sin(3,14 \cdot 10^8 t - 1,57x)$. Найдите диэлектрическую проницаемость среды и длину волны.

Дано: $\mu = 1$; $E = 12 \sin(3,14 \cdot 10^8 t - 1,57x)$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: ε ; λ .

Решение. Плоская монохроматическая электромагнитная волна (*электромагнитная волна одной строго определенной частоты*) описывается уравнениями:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad (1)$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (2)$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – круговая частота волны; $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; v – фазовая скорость; φ – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

По условию задачи $k = 1,57$ м⁻¹; $\varphi = 0$.

Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (3)$$

Фазовая скорость волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (4)$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{c^2}{\mu v^2} = \frac{c^2 k^2}{\mu \omega^2}. \quad (5)$$

[учли, что $v = \omega/k$].

Ответ: $\lambda = 4$ м; $\varepsilon = 2,25$.

Задачи

73. Найдите длину λ звуковой волны, распространяющейся в морской воде от гидроакустического преобразователя с частотой $\nu = 4,5$ кГц, если известно, что скорость звука в морской воде при температуре $t = 20$ °С равна $v = 1530$ м/с. Найдите также наименьшее расстояние x между точками среды, колеблющимися в одной фазе. Ответ: 0,34 м; 0,34 м

74. Радиостанция работает на частоте волны $\nu = 5$ МГц. Сколько колебаний N несущей частоты происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой $\nu_{зв} = 10$ кГц? Ответ: 500

75. Найдите длину волны λ , если в точках, находящихся на расстояниях $x_1 = 5$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, разность фаз колебаний в волне составляет $\Delta\varphi = 5\pi/6$. Ответ: 12 м

76. Найдите, во сколько раз изменится длина λ ультразвуковой волны при переходе ее из свинца в алюминий, если скорость распространения ультразвука в свинце и алюминии соответственно равны $v_1 = 2160$ м/с и $v_2 = 6260$ м/с. Ответ: 2,9

77. Скорость звука в трансформаторном масле равна $v = 1380$ м/с. На каком расстоянии x находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 920$ Гц? Ответ: 0,75 м

78. Найдите разность фаз $\Delta\varphi$ двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0,2$ м, если при частоте $\nu = 3000$ Гц волны распространяются со скоростью $v = 1200$ м/с. Ответ: π

79. Найдите длину волны λ , если смещение ξ_1 из положения равновесия частицы среды, находящейся на расстоянии $x_1 = 4$ см от источника колебаний, через промежуток времени $t = T/4$ равно половине амплитуды ($\xi_1 = A/2$). Ответ: 0,48 м

80. В немагнитной среде ($\mu = 1$) с диэлектрической проницаемостью, равной $\varepsilon = 4$, распространяется плоская электромагнитная волна. Найдите амплитуду напряженности H_0 магнитного поля и фазовую скорость v волны, если амплитуда напряженности электрического поля волны равна $E_0 = 90$ В/м. Ответ: $1,5 \cdot 10^8$ м/с; 0,48 А/м

81. В немагнитном веществе с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$ распространяется электромагнитная волна, амплитуда напряженности электрического поля в которой составляет $E_0 = 12$ В/м. Найдите амплитуду магнитной индукции B_0 в этой волне. Ответ: 120 нТл

82. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде ($\mu = 1$), имеет вид $E = 80 \sin(3,14 \cdot 10^8 t - 1,57x)$. Найдите диэлектрическую проницаемость среды ε и длину волны λ . Ответ: 2,25; 4 м

83. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 2 \cdot 10^6$ Гц распространяется в некоторой среде. Амплитуда напряженности электрического поля в волне составляет 14,12 В/м, а амплитуда плотности тока смещения в ней равна 6,28 мА/м². Найдите диэлектрическую проницаемость ϵ этой среды. Ответ: 4

84. Найдите амплитуду напряженности E_0 электрического поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме вдоль оси x , если амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 12$ мА/м. Ответ: 4,52 В/м

85. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 10^7$ Гц распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 8$ и удельной проводимостью $\sigma = 10^{-8}$ См \cdot м⁻¹. Найдите отношение амплитуды тока проводимости I_m к амплитуде тока смещения $I_{см}$ в этой волне. Ответ: 2,25

86. Найдите энергию, переносимую распространяющейся в вакууме плоской электромагнитной волной, через поверхность площадью 0,8 м², расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за время 0,5 мин. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 80$ В/м. Период волны $T \ll t$. Ответ: 203,9 Дж

87. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси x . Интенсивность волны (*средняя энергия, проходящая через поверхность площадью 1 м² за 1 с*) составляет $I = 18$ мкВт/м². Найдите амплитуду напряженности E_0 электрического поля волны. Ответ: 116,46 мВт/м²

88. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с интенсивностью, равной 17 мкВт/м². Найдите амплитуду напряженности H_0 магнитного поля в волне. Ответ: 0,3 мА/м

89. Найдите давление на тело, оказываемое плоской электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме вдоль оси x . Волна падает перпендикулярно к поверхности тела и полностью поглощается. Амплитуда магнитного поля волны $H_0 = 4$ мА/м. Ответ: 10,05 пПа

90. В однородной и изотропной среде ($\epsilon = 4$ и $\mu = 1$), с амплитудой напряженности электрического поля $E_0 = 8$ В/м, распространяется плоская электромагнитная волна. Найдите фазовую скорость v и амплитуду напряженности H_0 магнитного поля волны. Ответ: $1,5 \cdot 10^8$ м/с; 42,47 мА/м

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ВТОРОЙ ЧАСТИ

1. Орбитальный магнитный момент \vec{p}_m электрона. Орбитальный механический момент \vec{L}_l электрона. Гиромагнитное отношение орбитальных моментов g электронов. Собственный механический момент импульса \vec{L}_{ls} электрона (спин). Собственный (спиновый) магнитный момент \vec{p}_{ms} электрона. Гиромагнитное отношение спиновых моментов g_s электрона. Магнетон Бора μ_B – единица магнитного момента электрона.
2. Диа- и парамагнетики, их магнитные свойства. Поведение пара- и диамагнетиков в неоднородном магнитном поле.
3. Магнитное поле в веществе. Характеристики магнитного поля в веществе – магнитная индукция, напряженность магнитного поля, намагниченность. Связь между ними.
4. Магнитная проницаемость μ и магнитная восприимчивость χ . Их определения и связь между ними.
5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B} (закон полного тока для магнитного поля в веществе).
6. Циркуляция намагниченности \vec{J} по замкнутому контуру L . Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора \vec{B}) через намагниченность \vec{J} .
7. Теорема о циркуляции вектора напряженности \vec{H} магнитного поля по произвольному замкнутому кругу L .
8. Связь для векторов магнитной индукции \vec{B} и напряженности \vec{H} на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости μ_1 и μ_2) при отсутствии на границе тока проводимости.
9. Ферромагнетики и их основные свойства. Магнитный гистерезис. Петля гистерезиса. Постоянные магниты. Применение ферромагнетиков. Точка Кюри. Ферриты.
10. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Напишите математическое выражение первого основного положения теории Максвелла *в интегральной форме*.
11. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Напишите математическое выражение первого основного положения теории Максвелла *в дифференциальной форме*.
12. Максвелловская гипотеза о токе смещения. Плотность тока смещения $\vec{J}_{см}$. Плотность тока смещения в вакууме. Плотность тока поляризации. Напишите математическое выражение второго основного положения теории Максвелла

(обобщенная теорема о циркуляции вектора напряженности \vec{H}) в интегральной форме.

13. Максвелловская гипотеза о токе смещения. Плотность тока смещения $\vec{J}_{\text{см}}$. Плотность тока смещения в вакууме. Плотность тока поляризации. Напишите математическое выражение второго основного положения теории Максвелла (обобщенная теорема о циркуляции вектора напряженности \vec{H}) в дифференциальной форме.

14. Полная система уравнений электромагнитной теории Максвелла в интегральной форме с использованием векторов магнитной индукции и напряженности электрического поля.

15. Полная система уравнений электромагнитной теории Максвелла в интегральной форме с использованием векторов напряженности магнитного поля и электрического смещения.

16. Полная система уравнений электромагнитной теории Максвелла в дифференциальной форме, с использованием векторов магнитной индукции и напряженности электрического поля.

17. Полная система уравнений электромагнитной теории Максвелла в дифференциальной форме, с использованием векторов напряженности магнитного поля и электрического смещения.

18. Гармонические колебания и их характеристики. Уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, круговая (циклическая) частота, фаза колебаний, начальная фаза, период и частота колебаний. Единица частоты – герц (Гц).

19. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение.

20. Механические гармонические колебания. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях. Максимальная скорость и максимальное ускорение.

21. Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания. Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F . Полная энергия при гармонических колебаниях.

22. Гармонический осциллятор. Пружинный маятник. Напишите выражение для круговой частоты и периода малых колебаний пружинного маятника.

23. Пружинный маятник. Напишите дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника и получите выражение для периода его малых колебаний.

24. Математический маятник. Напишите выражение для круговой частоты и периода малых колебаний математического маятника.

25. Математический маятник. Напишите дифференциальное уравнение колебаний математического маятника, и получите выражение для периода его малых колебаний.
26. Физический маятник. Напишите выражение для круговой частоты и периода малых колебаний физического маятника. Приведенная длина физического маятника.
27. Физический маятник. Напишите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника, и получите выражение для периода его малых колебаний.
28. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонических колебаний. Максимальная кинетическая и максимальная потенциальная энергии колебаний.
29. Колебательный контур. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре. Полная энергия свободных гармонических колебаний в колебательном контуре.
30. Получите дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в колебательном контуре. Собственная частота контура. Период колебаний (формула Томсона). Сила тока в колебательном контуре. Напряжение на конденсаторе.
31. Сложение гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Выражение для амплитуды суммарного колебания.
32. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.
33. Напишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Напишите выражение для амплитуды затухающих колебаний. Время релаксации. Нарисуйте график зависимости амплитуды от времени.
34. Напишите выражение для периода затухающих колебаний. Декремент затухания. Логарифмический декремент затухания. Аperiodическое движение. Автоколебания.
35. Свободные затухающие колебания пружинного маятника. Коэффициент сопротивления.
36. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.
37. Вынужденные (механические и электромагнитные) колебания. Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение для установившихся колебаний. Нарисуйте график вынужденных колебаний в установившемся режиме.
38. Амплитуда и фаза вынужденных (механических и электромагнитных) колебаний. Резонансные кривые. Нарисуйте график зависимости амплитуды установившихся вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания. Резонанс смещения при затухающих колебаниях. Энергетический смысл резонанса.

39. Волновые процессы. Упругие волны. Продольные и поперечные волны, примеры. Волновой фронт. Волновая поверхность.
40. Бегущие волны. Вектор плотности потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга для упругих волн). Уравнение бегущей волны. Амплитуда, циклическая частота, начальная фаза и фаза плоской бегущей волны. Получите, исходя из уравнения колебаний, уравнение плоской бегущей волны. Длина волны. Волновое число. Фазовая скорость волны. Связь фазовой скорости, волнового числа и частоты волны.
41. Уравнение сферической волны. Дисперсия волн. Волновое уравнение – дифференциальное уравнение в частных производных.
42. Принцип суперпозиции (наложения) волн. Волновой пакет. Групповая скорость волн. Связь между групповой и фазовой скоростями.
43. Когерентность волн. Интерференция волн. Разность хода волн. Интерференционные максимумы и интерференционные минимумы.
44. Стоячие волны. Уравнение стоячей волны. Получите выражение для смещения в стоячей волне. Узлы и пучности. Условие стационарности стоячих волн.
45. Связь между разностью фаз двух точек плоской волны с расстоянием между этими точками.
46. Экспериментальное получение электромагнитных волн. Векторы напряженности \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля (волновое уравнение). Фазовая скорость электромагнитных волн.
47. Плоская электромагнитная волна, ее поперечность. Скорость электромагнитной волны в вакууме. Напряженность \vec{E} электрического поля в волне, как функция координаты и времени. Запишите волновое уравнение для векторов \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решение и объясните физический смысл.
48. Плоская электромагнитная волна, ее поперечность. Скорость электромагнитной волны в вакууме. Напряженность \vec{H} магнитного поля в волне как функция координаты и времени.
49. Объемная плотность w энергии электромагнитной волны. Энергия, переносимая электромагнитной волной.
50. Вектор плотности потока \vec{S} электромагнитной энергии (вектор Умова – Пойнтинга). Модуль плотности потока S электромагнитной энергии. В чем заключается физический смысл вектора \vec{S} ?

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Таблица производных, интегралов и некоторых тригонометрических формул

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^{nx}	ne^{nx}	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$			$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$		
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$			$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$		
$\int \sin x dx = -\cos x$			$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$		
$\int \cos x dx = \sin x$			$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$		
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$			$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$		
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sqrt{\pi/2}, & n=1/2 \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$n=0$	$\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ \sqrt{\pi/4}, & n=2 \\ 1/2, & n=3 \end{cases}$	$n=0$		
	$n=1/2$		$n=1$		
	$n=1$		$n=2$		
	$n=2$		$n=3$		
$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n=1/2 \\ \pi^2/6, & n=1 \\ 2,405, & n=2 \\ \pi^4/15, & n=3 \\ 24,9, & n=4 \end{cases}$	$n=1/2$	$\int_0^\alpha \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha=1 \\ 1,18, & \alpha=2 \\ 2,56, & \alpha=3 \\ 4,91, & \alpha=5 \\ 6,43, & \alpha=10 \end{cases}$	$\alpha=1$		
	$n=1$		$\alpha=2$		
	$n=2$		$\alpha=3$		
	$n=3$		$\alpha=5$		
	$n=4$		$\alpha=10$		
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$			
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$		$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$			
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$		$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$			

2. Обозначения и названия некоторых единиц

№ п/п	Обозначение и название единицы	№ п/п	Обозначение и название единицы	№ п/п	Обозначение и название единицы
1.	А – ампер	14.	дин – дина	27.	Н – ньютон
2.	Å – ангстрем	15.	Дж – джоуль	28.	П – пауз
3.	а. е. м. – атомная единица массы	16.	дптр – диоптрия	29.	Па – паскаль
4.	Б – бел	17.	К – кельвин	30.	рад – радиан
5.	б – барн	18.	кал – калория	31.	с – секунда
6.	Бк – беккерель	19.	кд – кандела	32.	См – сименс
7.	В – вольт	20.	Кл – кулон	33.	ср –стерадиан
8.	Вб – вебер	21.	л – литр	34.	Тл – тесла
9.	Вт – ватт	22.	лк – люкс	35.	Ф – фарад
10.	Гн – генри	23.	лм – люмен	36.	ч – час
11.	г – грамм	24.	м – метр	37.	Э – эрстед
12.	Гс – гаусс	25.	мин – минута	38.	эВ – электрон-вольт
13.	Гц – герц	26.	Мкс – максвелл	39.	

3. Десятичные приставки к названиям единиц

1.	Э – экса, 10^{18}	6.	к – кило, 10^3	11.	мк – микро, 10^{-6}
2.	П – пета, 10^{15}	7.	г – гекто, 10^2	12.	н – нано, 10^{-9}
3.	Т – тера, 10^{12}	8.	д – деци, 10^{-1}	13.	п – пико, 10^{-12}
4.	Г – гига, 10^9	9.	с – санти, 10^{-2}	14.	ф – фемто, 10^{-15}
5.	М – мега, 10^6	10.	м – милли, 10^{-3}	15.	а – атто, 10^{-18}

4. Единицы величин в СИ

№ п/п	Величина	Единица величины в СИ	№ п/п	Величина	Единица величины в СИ
1.	Длина	м	24.	Электрический заряд	Кл
2.	Время	с	25.	Потенциал	В
3.	Скорость	м/с	26.	Напряженность электрического поля	В/м
4.	Ускорение	м/с ²	27.	Электрическое смещение	Кл/м ²
5.	Частота колебаний	Гц	28.	Электрический момент диполя	Кл · м ²
6.	Круговая частота	с ⁻¹	29.	Поляризованность	Кл/м ²
7.	Угловая скорость	рад/с	30.	Электрическая емкость	Ф
8.	Угловое ускорение	рад/с ²	31.	Сила тока	А
9.	Масса	кг	32.	Плотность тока	А/м ²
10.	Плотность	кг/м ³	33.	Электрическое сопротивление	Ом
11.	Сила	Н	34.	Удельное сопротивление	Ом · м
12.	Давление, напряжение	Па	35.	Электрическая проводимость	См
13.	Импульс	кг · м/с	36.	Магнитная индукция	Тл
14.	Момент силы	Н · м	37.	Магнитный поток	Вб
15.	Энергия, работа	Дж	38.	Напряженность магнитного поля	А/м
16.	Мощность	Вт	39.	Магнитный момент	А · м ²

17.	Плотность потока энергии	Вт/м ²	40.	Намагниченность	А/м
18.	Момент импульса	кг · м ² /с	41.	Индуктивность	Гн
19.	Момент инерции	кг · м ²	42.	Сила света	кд
20.	Вязкость	Па · с	43.	Световой поток	лм
21.	Температура	К	44.	Освещенность	лк
22.	Теплоемкость	Дж/К	45.	Светимость	лм/м ²
23.	Энтропия	Дж/К	46.	Яркость	кд/м ²

5. Некоторые внесистемные единицы

1.	1 сут = 86400 с	7.	1 мм рт. ст. = 133,3 Па
2.	1 год = 365,25 сут = 3,16 · 10 ⁷ с	8.	1 Å = 10 ⁻¹⁰ м
3.	1° = 1,75 · 10 ⁻² рад	9.	1 кал = 4,18 Дж
4.	1' = 2,91 · 10 ⁻⁴ рад; 1'' = 4,85 · 10 ⁻⁶ рад	10.	1 эВ = 1,6 · 10 ⁻¹⁹ Дж = 1,6 · 10 ⁻¹² эрг
5.	1 атм = 1013 кПа = 760 мм рт. ст.	11.	1 а. е. м. = 1,66 · 10 ⁻²⁷ кг = 931,5 МэВ
6.	1 бар = 100 кПа (точно)	12.	1 Ки (кюри) = 3,70 · 10 ¹⁰ Бк

6. Основные физические постоянные (округленные значения)

№ п/п	Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
1.	Нормальное ускорение свободного падения	<i>g</i>	9,81 м/с ²
2.	Гравитационная постоянная	<i>G</i>	6,67 · 10 ⁻¹¹ м ³ /(кг · с ²)
3.	Скорость света в вакууме	<i>c</i>	3 · 10 ⁸ м/с
4.	Молярная газовая постоянная	<i>R</i>	8,31 Дж/(моль · К)
5.	Постоянная Авогадро	<i>N_A</i>	6,022 · 10 ²³ моль ⁻¹
6.	Постоянная Больцмана	<i>k</i>	1,38 · 10 ⁻²³ Дж/К
7.	Элементарный заряд	<i>e</i>	1,6 · 10 ⁻¹⁹ Кл
8.	Масса покоя электрона	<i>m_e</i>	9,11 · 10 ⁻³¹ кг
9.	Масса покоя протона	<i>m_p</i>	1,672 · 10 ⁻²⁷ кг
10.	Масса покоя нейтрона	<i>m_n</i>	1,675 · 10 ⁻²⁷ кг
11.	Удельный заряд электрона	<i>e/m_e</i>	1,76 · 10 ¹¹ Кл/кг
12.	Объем 1 моль идеального газа при н.у. (<i>T₀</i> = 273,15 К, <i>p₀</i> = 101325 Па)	<i>V₀</i>	22,41 · 10 ⁻³ м ³ /моль
13.	Число Лошмидта	<i>N_L</i>	2,68 · 10 ²⁵ м ⁻³
14.	Постоянная Планка	<i>h</i>	6,63 · 10 ⁻³⁴ Дж · с
15.	Атомная единица массы	<i>a. e. м.</i>	1,66 · 10 ⁻²⁷ кг
16.	Энергия, соответствующая 1 а. е. м.		931,50 МэВ
17.	Электрическая постоянная	<i>ε₀</i>	8,85 · 10 ⁻¹² Ф/м
18.	Магнитная постоянная	<i>μ₀</i>	4π · 10 ⁻⁷ Гн/м
19.	Первый борковский радиус	<i>a₀</i>	5,28 · 10 ⁻¹¹ м
20.	Энергия покоя электрона	<i>E₀</i>	0,511 МэВ

7. Некоторые астрономические величины

№ п/п	Астрономическая величина	Числовое значение
1.	Радиус Земли (среднее значение)	$6,37 \cdot 10^6$ м
2.	Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
3.	Радиус Солнца (среднее значение)	$6,95 \cdot 10^8$ м
4.	Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
5.	Радиус Луны (среднее значение)	$1,74 \cdot 10^6$ м
6.	Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
7.	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
8.	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м
9.	Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
10.	Радиус Марса (среднее значение)	$3,39 \cdot 10^6$ м
11.	Масса Марса	$6,42 \cdot 10^{23}$ кг
12.	Расстояние от центра Марса до центра Солнца	$2,28 \cdot 10^{11}$ м

8. Плотность некоторых жидкостей, 10^3 кг/м³

№ п/п	Название жидкости	Плотность
1.	Вода (при температуре 4 °С)	1,00
2.	Глицерин	1,26
3.	Керосин	0,80
4.	Масло машинное	0,90
5.	Ртуть (при 0 °С)	13,596
6.	Спирт этиловый (при 20 °С)	0,789
7.	Спирт метиловый (при 20 °С)	0,793

9. Плотность газов (при нормальных условиях), кг/м³

№ п/п	Название газа	Плотность
1.	Азот	1,25
2.	Аргон	1,28
3.	Водород	0,09
4.	Воздух	1,29
5.	Гелий	0,18
6.	Кислород	1,43
7.	Метан	0,72
8.	Углекислый газ	1,98
9.	Хлор	3,21

10. Плотность твердых тел, 10^3 кг/м³

№ п/п	Название твердого тела	Плотность
1.	Алюминий	2,70
2.	Вольфрам	19,25
3.	Железо	7,87
4.	Кобальт	8,90
5.	Лёд (при температуре -20 °С)	0,92

Продолжение таблицы 10

6.	Медь	8,94
7.	Никель	8,90
8.	Нихром	8,40
9.	Фарфор	2,3 – 2,5
10.	Цинк	7,14

11. Эффективный диаметр молекулы газов, нм

№ п/п	Название газа	Эффективный диаметр
1.	Азот	0,31
2.	Аргон	0,35
3.	Водород	0,27
4.	Воздух	0,37
5.	Гелий	0,19
6.	Кислород	0,35
7.	Неон	0,24
8.	Углекислый газ	0,40
9.	Хлор	0,37
10.	Этан	0,54

12. Удельная теплота плавления, 10³ Дж/кг

№ п/п	Название твердого тела	Удельная теплота плавления
1.	Алюминий	393
2.	Вольфрам	184
3.	Железо	270
4.	Золото	67
5.	Лёд	330
6.	Медь	213
7.	Натрий	113
8.	Олово	59
9.	Парафин	150
10.	Свинец	24,3

13. Удельная теплота парообразования, 10³ Дж/кг (при температуре кипения и нормальном атмосферном давлении)

№ п/п	Название жидкости	Удельная теплота парообразования
1.	Азот жидкий	201
2.	Бензин	230–310
3.	Вода	2260
4.	Водород жидкий	450
5.	Воздух	197
6.	Гелий жидкий	23
7.	Керосин	209–230
8.	Кислород жидкий	214
9.	Ртуть	293
10.	Спирт этиловый	906
11.	Эфир этиловый	356

14. Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)

(В таблице даны значения удельной теплоемкости некоторых распространенных металлов и сплавов при температуре 20 °С и удельные теплоемкости c_p распространенных жидкостей при температуре 10–25 °С и нормальном атмосферном давлении)

№ п/п	Название вещества	Удельная теплоемкость
1.	Алюминий	897
2.	Вода	4182
3.	Вольфрам	134
4.	Бензин	2090
5.	Глицерин $C_3H_5(OH)_3$	2430
6.	Керосин	2085–2220
7.	Лёд при температуре θ °С	2150
8.	Масло трансформаторное	1680
9.	Масло хлопковое	1737
10.	Медь	383
11.	Нефть	2100
12.	Нихром	460
13.	Ртуть	139
14.	Свинец	128
15.	Серебро	235
16.	Спирт метиловый (метанол) CH_3OH	2470
17.	Спирт этиловый (этанол) C_2H_5OH	2470
18.	Сталь углеродистая	468
19.	Цинк	385
20.	Эфир этиловый $C_4H_{10}O$	2340

15. Постоянные Ван-дер-Ваальса

№ п/п	Газ	$a, Н \cdot м^4/моль^2$	$b, 10^{-5} м^3/моль$
1.	Азот	0,1412	3,862
2.	Аммиак	0,42257	3,707
3.	Аргон	0,1363	3,221
4.	Вода (пары)	0,5541	3,041
5.	Водород	0,0245	2,665
6.	Воздух	1,3078	11,413
7.	Гелий	0,00346	2,361
8.	Кислород	0,1358	3,167
9.	Криптон	0,2354	3,978
10.	Неон	0,2088	1,697
11.	Окись азота	0,1438	2,886
12.	Окись углерода	0,1454	3,949
13.	Метан	0,2256	4,272
14.	Углекислый газ	0,3641	4,284
15.	Хлор	0,6497	5,624
16.	Этан	0,5427	6,419

16. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей, мН/м (при 20 °С)

№ п/п	Жидкость	Коэффициент поверхностного натяжения
1.	Вода	72,5
2.	Бензин	21
3.	Керосин	24
4.	Мыльный раствор	40
5.	Молоко	46
6.	Нефть	30
7.	Ртуть	472
8.	Спирт этиловый	22
9.	Эфир этиловый при 25 °С, газовая среда: воздух	17

17. Коэффициент теплопроводности χ некоторых веществ, Вт/(м · К)

№ п/п	Вещество	χ	№ п/п	Вещество	χ
1.	Алебастровые плиты	0,48	13.	Каучук натуральный	0,042
2.	Бетон на песке	0,72	14.	Керамзитобетон	0,2
3.	Бумага	0,14	15.	Кирпич пустотелый	0,44
4.	Вата хлопковая	0,055	16.	Кирпич силикатный	0,81
5.	Войлок шерстяной	0,045	17.	Латунь	110
6.	Воздух ($p = 760$ мм рт. ст., $t = 0$ °С)	0,0237	18.	Медь	380
7.	Гипс строительный	0,35	19.	ПВХ	0,19
8.	Гранит, базальт	3,5	20.	Резина	0,15
9.	Древесина твердых пород	0,2	21.	Сталь	52
10.	Дюралюминий	160	22.	Стекло	1,15
11.	Железобетон	1,7	23.	Чугун	56
12.	Камень	1,4	24.	Эбонит	0,16

18. Динамическая вязкость η некоторых веществ при температуре 25 °С, 10^{-3} Па · с

№ п/п	Вещество	η	№ п/п	Вещество	η
1.	Анилин	3,847	9.	Глицерин при $t = 20$ °С	12100
2.	Ацетон	0,306	10.	Глицерин при $t = 25$ °С	934
3.	Бензол	0,604	11.	Глицерин при $t = 100$ °С	14,8
4.	Бром	0,944	12.	Нитробензол	1,863
5.	Вода при $t = 0$ °С	1,793	13.	Ртуть	1,526
6.	Вода при $t = 20$ °С	1,004	14.	Уксусная кислота	1,056
7.	Вода при $t = 25$ °С	0,890	15.	Фенол при $t = 50$ °С	3,437
8.	Вода при $t = 100$ °С	0,282	16.	Этанол	1,074

19. Коэффициент диффузии D газов и паров, см²/с

№ п/п	Газы и (пары)	$t, ^\circ\text{C}$	D	№ п/п	Газы и (пары)	$t, ^\circ\text{C}$	D
1.	Аргон – гелий	15	0,70	9.	Кислород – азот	12,5	0,20
2.	Водород – азот	12,5	0,73	10.	Бензол – водород	0	0,29
3.	Водород – воздух	0	0,64	11.	Бензол – кислород	0	0,18
4.	Водород – кислород	0	0,69	12.	Спирт метиловый – водород	0	0,50
5.	Водород – кислород	14	0,77	13.	Спирт метиловый – воздух	0	0,13
6.	Воздух – водяной пар	0	0,22	14.	Спирт метиловый – кислород	0	0,18
7.	Воздух – водяной пар	15	0,26	15.	Спирт этиловый – водород	0	0,37
8.	Кислород – азот	0	0,18	16.	Спирт этиловый – воздух	0	0,10

20. Диэлектрические проницаемости различных веществ

№ п/п	Диэлектрик	ϵ	№ п/п	Диэлектрик	ϵ
1.	Алмаз	5,7	18.	Лед (водяной лед, при – 5 °С)	73
2.	Аммиак (жидкий; –33 °С)	16,90– 22,4	19.	Масло вазелиновое	2,0
3.	Бензин	2	20.	Масло трансформаторное	2,2
4.	Бензол (20°С– 25°С)	2,23 – 2,27	21.	Масло касторовое	4,6 – 4,8
5.	Бетон	4,5	22.	Мрамор	7,0 – 8,0
6.	Битум	2,5 – 3,0	23.	Парафин	2,0 – 2,3
7.	Бумага	2,0 – 3,5	24.	Плексиглас	3,5
8.	Вода (при +20 °С)	81	25.	Полиэтилен	2,3
9.	Воздух	1,0001959	26.	Резина	7,0
10.	Воск	7,8	27.	Слюда	7,5
11.	Германий	16 – 16,4	28.	Соль, NaCl	5,9
12.	Каучук	2,4	29.	Спирт	26
13.	Кварц	3,5 – 4,5	30.	Стекло	3,8 – 19,0
14.	Керосин	2,1	31.	Текстолит	7,5
15.	Каменная соль	6,3	32.	Фарфор	4,4 – 4,7
16.	Кремний	11,7	33.	Эбонит	2,5 – 4,0
17.	Керамика конденсаторная	10 – 200	34.	Янтарь	2,6 – 2,8

21. Удельные сопротивления проводников и изоляторов

№ п/п	Проводники	Удельное сопротивление (в диапазоне от 0 до 100 °С) ρ , 10^{-8} Ом · м	Температурный коэффициент α , 10^{-3} К ⁻¹	№ п/п	Изоляторы	Удельное сопротивление (при 20 °С) ρ , Ом · м
1.	Алюминий	2,6	4,2	1.	Битум	$10^{13} - 10^{14}$
2.	Вольфрам	5,5	5,1	2.	Бумага	10^{10}
3.	Железо	9,71	6,5	3.	Вода	10^{10}
4.	Золото	2,3	3,9	4.	Воск пчелиный	$10^{11} - 10^{12}$
5.	Иридий	4,74	3,9	5.	Гетинакс	$10^8 - 10^9$
6.	Магний	4,5	3,8	6.	Канифоль	$10^{12} - 10^{13}$
7.	Медь	1,75	4,3	7.	Мрамор	$10^5 - 10^9$
8.	Молибден	5,9	4,6	8.	Парафин	$10^{14} - 10^{16}$
9.	Натрий	4,7	5,0	9.	Полистирол	$10^{13} - 10^{15}$
10.	Никель	8,7	6,5	10.	Резина	10^{13}
11.	Олово	12,8	4,4	11.	Слюда	$10^{13} - 10^{16}$
12.	Платина	10,7	3,9	12.	Стекло	$10^6 - 10^{15}$
13.	Ртуть	95,8	0,9	13.	Текстолит	$10^8 - 10^9$
14.	Свинец	20,6	3,7	14.	Фарфор	10^{13}
15.	Серебро	1,6	4,1	15.	Эбонит	$(2,6 - 8,4) \cdot 10^{14}$
16.	Цинк	5,4	4,2	16.	Янтарь	10^{17}

22. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

№ п/п	Парамагнетики	$\mu - 1, 10^{-6}$	№ п/п	Диамагнетики	$\mu - 1, 10^{-6}$
1.	Азот	0,013	1.	Водород	-0,063
2.	Воздух	0,38	2.	Бензол	-7,5
3.	Кислород	1,9	3.	Вода	-9,0
4.	Эбонит	14	4.	Медь	-10,3
5.	Алюминий	23	5.	Стекло	-12,6
6.	Вольфрам	176	6.	Каменная соль	-12,6
7.	Платина	360	7.	Кварц	-15,1
8.	Жидкий кислород	3400	8.	Висмут	-176

23. Температура Кюри T_C ферромагнетиков

Материал	Fe, железо	Co, кобальт	Ni, никель	Gd, гадолиний	Dy, диспрозий	No, гольмий	Tb, тербий	Er, эрбий
Температура Кюри, К	1043	1403	631	289	87	20	25	19,6

24. Скорость звука в различных средах

а) газы

Газы			
№ п/п	Вещество	v , м/с	dv/dT , м/(с · К)
1.	Азот	333,64	0,85
2.	Аммиак	415,0	0,73
3.	Аргон	319,0	-
4.	Водород	1286,0	2,0
5.	Воздух (сухой, 0,03 % CO_2 по объему)	331,46	0,607
6.	Гелий	970	1,55
7.	Кислород	314,84	0,57
8.	Метан	430	0,62
9.	Неон	435	0,78
10.	Пары воды (100 °С)	405	-
11.	Углекислый газ	260,3	0,87

б) жидкости

Жидкости				
№ п/п	Вещество	t , °С	v , м/с	dv/dT , м/(с · К)
1.	Азот	-199,0	962	-10
2.	Анилин	20	1659	-4,0
3.	Ацетон	25	1170	-5,5
4.	Бензол	25	1295	-5,2
5.	Вода	25	1497	+2,5
6.	Глицерин	26	1930	-1,8
7.	Керосин	25	1315	-3,6
8.	Ртуть	20	1451	-0,46
9.	Сероуглерод	25	1149	-3,3
10.	Скипидар	25	1225	-
11.	Спирт этиловый	20	1177	-3,6
12.	Толуол	25	1300	-4,3
13.	Углерод четыреххлористый	25	930	-3,0

в) твердые тела

Твердые тела				
№ п/п	Вещество	$v_{ }$, м/с	v_{\perp} , м/с	v
1.	Алюминий	6400	3130	5240
2.	Бетон	4250–5250	-	-
3.	Вольфрам	5174	2842	-
4.	Гранит	5400	-	-
5.	Дерево (дуб, вдоль волокна)	-	-	4100
6.	Дерево (сосна, вдоль волокна)	-	-	3600
7.	Дюралюминий	6400	3120	-
8.	Железо	5930	-	5170

9.	Кварц кристаллический (Х-срез)	5720	-	5440
10.	Кварц плавленный	5980	3760	5760
11.	Латунь	4280–4700	2020–2110	3130–3450
12.	Медь (отожженная)	4720	-	3790
13.	Мрамор	-	-	3810
14.	Никель (отожженный, немагнитный)	-	-	4810
15.	Олово	3320	-	2730
16.	Полистирол	2350	1120	-
17.	Полиэтилен	2000	-	-
18.	Серебро	3700	1694	2802
19.	Стекло крон	5260–6120	3050–3550	4710–5300
20.	Стекло флинт	3760–4800	-	3490–4550
21.	Сталь инструмент.	5900–6100	-	5150
22.	Сталь нержавеющая	5740	3092	-
23.	Цинк	4170	-	3810
24.	Эбонит	2500	-	-

25. Греческий алфавит

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сигма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – ламбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – ипсилон
Ε, ε – эпсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фи
Ζ, ζ – дзэта	Ξ, ξ – кси	Χ, χ – хи
Η, η – эта	Ο, ο – омикрон	Ψ, ψ – пси
Θ, θ, ϑ – тхэта	Π, π – пи	Ω, ω – омега

26. Латинский алфавит

A, a – а	J, j – йот/жи	S, s – эс
B, b – бэ	K, k – ка	T, t – тэ
C, c – це	L, l – эль	U, u – у
D, d – дэ	M, m – эм	V, v – вэ
E, e – э	N, n – эн	W, w – дубль-вэ
F, f – эф	O, o – о	X, x – икс
G, g – гэ/жэ	P, p – пэ	Y, y – игрек/ипсилон
H, h – ха/аш	Q, q – ку	Z, z – зед
I, i – и	R, r – эр	

27. Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева

Г Р У П П Ы Э Л Е М Е Н Т О В							
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1 H водород 1,0079							
3 Li литий 6,941	4 Be бериллий 9,01218	5 B бор 10,811	6 C углерод 12,011	7 N азот 14,0067	8 O кислород 15,9994	9 F фтор 18,9984	
11 Na натрий 22,98977	12 Mg магний 24,305	13 Al алюминий 26,98154	14 Si кремний 28,0855	15 P фосфор 30,97376	16 S сера 32,066	17 Cl хлор 35,453	
19 K калий 39,0983	20 Ca кальций 40,078	21 Sc скандий 44,95591	22 Ti титан 47,88	23 V ванадий 50,9415	24 Cr хром 51,9961	25 Mn марганец 54,9380	26 Fe железо 55,845
29 Cu медь 63,546	30 Zn цинк 65,39	31 Ga галлий 69,723	32 Ge германий 72,59	33 As мышьяк 74,9216	34 Se селен 78,96	35 Br бром 79,904	
37 Rb рубидий 85,4678	38 Sr стронций 87,62	39 Y иттрий 88,9059	40 Zr цирконий 91,224	41 Nb ниобий 92,9064	42 Mo молибден 95,94	43 Tc технеций 98,9062	44 Ru рутений 101,07
47 Ag серебро 107,8682	48 Cd кадмий 112,41	49 In индий 114,82	50 Sn олово 118,710	51 Sb сурьма 121,75	52 Te теллур 127,60	53 I йод 126,9045	
55 Cs цезий 132,9054	56 Ba барий 137,33	57* La лантан 138,9055	72 Hf гафний 178,49	73 Ta тантал 180,9479	74 W вольфрам 183,85	75 Re рений 186,207	76 Os осмий 190,23
79 Au золото 196,9665	80 Hg ртуть 200,59	81 Tl таллий 204,383	82 Pb свинец 207,2	83 Bi висмут 208,9804	84 Po полоний 208,9824	85 At астат 210,9871	
87 Fr франций 223,0197	88 Ra радий 226,0254	89** Ac актиний 227,0278	104 Rf резерфордий [261]	105 Db дубний [262]	106 Sg сиборгий [263]	107 Bh борий [264]	108 Hs хассий [265]

Библиографический список

- 1. Савельев, И. В.** Курс общей физики : в 5 кн. : кн. 2. : Электричество и магнетизм : учебное пособие для вузов / И. В. Савельев. – Москва : АСТ : Астрель, 2006. – 336 с. – ISBN 5-271-01033-3.
- 2. Савельев, И. В.** Курс общей физики : в 5 кн. : кн. 4 : Волны. Оптика : учебное пособие для вузов / И. В. Савельев. – Москва : АСТ : Астрель, 2006. – 256 с. – ISBN 5-271-01306-5.
- 3. Трофимова, Т. И.** Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. – 15-е изд., стер. – Москва : Академия, 2012. – 560 с. – ISBN 978-5-7695-4565-8.
- 4. Хусаинов, Ш. Г.** Электромагнетизм и волны : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2020. – 168 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.007.
- 5. Хусаинов, Ш. Г.** Электромагнетизм и волны. Оптика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 151 с. – ISBN 978-5-9973-5922-5.
- 6. Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. I : Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2022. – 218 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9676-1927-7.
- 7. Хусаинов, Ш. Г.** Основы механики и молекулярная физика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2020. – 146 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.006.
- 8. Хусаинов, Ш. Г.** Курс физики: теория, вопросы и задачи : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 372 с. – ISBN 978-5-9973-5921-7.
- 9. Хусаинов, Ш. Г.** Основы механики, молекулярной физики и термодинамики : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 131 с. – ISBN 978-5-9973-5921-8.
- 10. Хусаинов, Ш. Г.** Курс физики: теория, задачи и вопросы : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2021. – 464 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9675-1820-1.
- 11. Яворский, Б. М.** Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – 8-е изд., перераб. и испр. – Москва: Оникс, 2006. – 1056 с. – ISBN 5-488-00330-4.

Учебное издание

Хусаинов Шаукат Габдулхакович

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Часть II

Электромагнетизм и волны

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной системе РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева 05.09.2022 г.

Оригинал-макет подготовлен Издательством РГАУ-МСХА
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44
Тел. 8 (499) 977-40-64