

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДОБУСТРОЙСТВА



В.А. Волосухин, А.И. Голышев, Т.Л. Ляпота

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие
издание 2-ое



Москва 2013

ISBN 978-5-89231-454-1

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДОБУСТРОЙСТВА»**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НОВОЧЕРКАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
МЕЛИОРАТИВНАЯ АКАДЕМИЯ»**

В.А. Волосухин, А.И. Голышев, Т.Л. Ляпота

**СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА**

Учебное пособие

Рекомендовано Методической комиссией
Строительного факультета для студентов,
обучающихся по направлению подготовки
270800 «Строительство»

Москва
2013

УДК 624.04

ББК 38.112

С 86

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов,
строительной и прикладной механики ФГБОУ ВПО ЮРГТУ (НПИ),
П.П. Гайджуров

Профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой ГТС
ФГБОУ ВПО МГУП, Заслуженный деятель науки РФ, академик РААСН
И.С. Румянцев

Профессор, д-р техн. наук, декан строительного факультета
ФГБОУ ВПО ЮРГТУ(НПИ),
Г.М. Скибин

С 86 Строительная механика : учеб. пособие / В.А. Волосухин, А.И. Голь-
ышев, Т.Л. Ляпота; .2-ое, изд. перераб. и дополненное. -
М.:ФГБОУ ВПО МГУП, 2013.- 173 с.

ISBN 978-5-89231-454-1

В учебном пособии изложены теоретические основы и примеры реше-
ния типовых задач статики сооружений.

Рекомендовано для студентов высших учебных заведений, обучаю-
щихся по направлениям подготовки 270800 «Строительство» и 280100
«Природообустройство и водопользование»

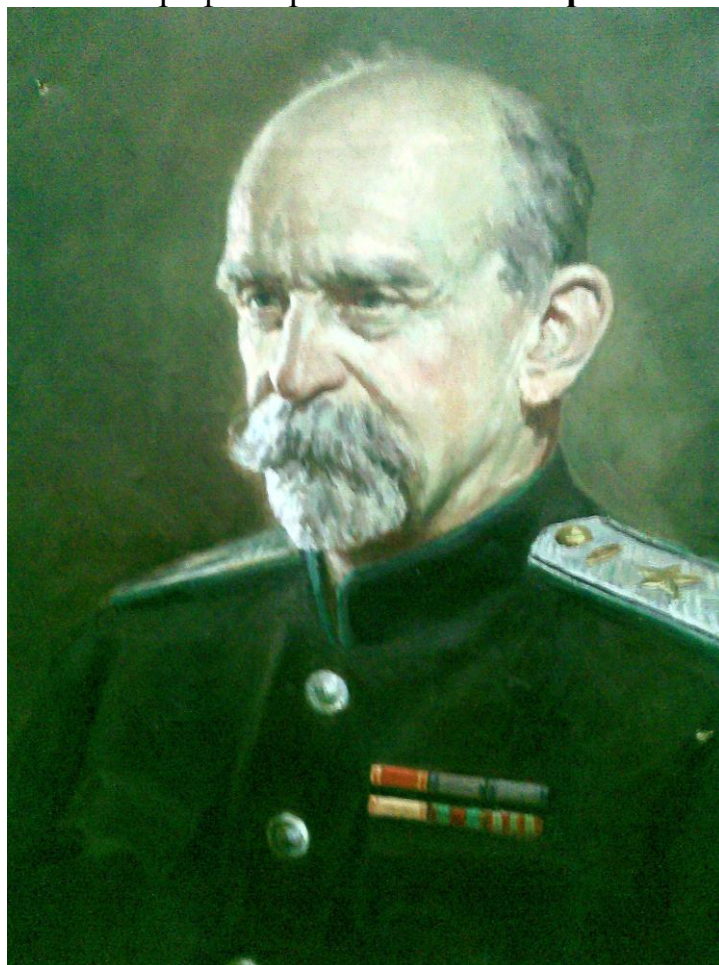
Табл.38. Рис.115. Библиограф.назв.: 8

ISBN 978-5-89231-454-1

© В.А. Волосухин, А.И. Гольшев; Т.Л. Ляпота 2013
© ФГБОУ ВПО «Московский государственный
университет природообустройства», 2013

ВВЕДЕНИЕ

Посвящается 100-летию организации кафедры строительной механики на инженерном отделении МСХИ (ныне ФГБОУ ВПО МГУП) профессором **Иваном Петровичем Прокофьевым**



Иван Петрович Прокофьев (1877-1958) – доктор технических наук, профессор, генерал-директор путей сообщения, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, выдающийся специалист в области строительной механики, автор крупных проектов мостов и других сооружений, основатель кафедры строительной механики Московского государственного университета природообустройства

Строительной механикой, в широком смысле, называется наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Задачи строительной механики состоят в разработке рациональных методов определения усилий в сооружениях и их перемещений; методов расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, а также в нахождении наивыгоднейших форм сооружений, удовлетворяющих критериям экономичности.

Датой основания кафедры строительной механики Московского госу-

дарственного университета природообустройства считают 1913 год, когда Иван Петрович Прокофьев был избран на должность адъюнкт-профессора по кафедре строительной механики Московского сельскохозяйственного института, в который незадолго до этого была преобразована Петровская земледельческая и лесная академия.

После революции Петровская сельскохозяйственная академия была воссоздана, а в 1930 году на базе Инженерного факультета Тимирязевки и подразделений ряда других московских вузов был образован Московский государственный инженерно-мелиоративный институт.

Учебное заведение, в составе которого находилась кафедра строительной механики, меняло названия: Московский институт инженеров водного хозяйства (1936), Московский гидромелиоративный институт (1937), Московский институт инженеров водного хозяйства имени В.Р.Вильямса (1951), преобразовывалось в факультет Гидротехники и мелиорации Тимирязевки (1960), который был преобразован в Московский гидромелиоративный институт (1963). В 1993 г. вуз был преобразован в Московский Государственный Университет Природообустройства. (www.msuee.ru)

В рамках повышения эффективности работы в 2013 г. была образована объединенная кафедра Технической и строительной механики.

Научная деятельность кафедры была нацелена на решение важных научно-технических задач, связанных с расчетом мелиоративной и строительной техники, сооружений контактирующих с грунтом (подпорных стен и подземных трубопроводов), многослойных конструкций, обеспечением пожаробезопасности зданий и сооружений, статики и динамики элементов гидротехнических сооружений.

В составе кафедры работали выдающиеся ученые, организаторы образования и науки, УЧИТЕЛЯ - профессора, доктора наук: Безухов Николай Иванович, Киселев Василий Александрович, Емельянов Лавр Михайлович, Ксенофонтов Кирилл Андреевич, Виноградов Сергей Васильевич, Новичков Юрий Николаевич, Бутко Анатолий Михайлович, Парцевский Владлен Васильевич, Сабодаш Петр Филиппович.

Заведовали кафедрой: Прокофьев Иван Петрович (1913-1958),
Емельянов Лавр Михайлович (1958-1980),
Новичков Юрий Николаевич (1980-1999),
Бутко Анатолий Михайлович (1999-2005),
Сабодаш Петр Филиппович (2005-2010).

В 2010-2013 г.г. обязанности заведующего кафедрой исполнял доц., к.т.н. Голышев Александр Иванович.

Первый курс «Строительная механика» в России был издан в С.-Петербурге в 1885 г. профессором Н.А. Белелюбским (1845 – 1922 гг.), оказавший значительное влияние на формирование южной научной школы по строительной механике в Новочеркаске. В становлении курса «Строительная механика» в Донском политехническом институте (1907 – 1930 гг.) и Новочеркасской государственной мелиоративной академии большое влияние оказали профессора Н.М. Абрамов, Э.-В.О. Цшохер, А.Н. Динник (в последствии академик АН СССР), Н.Н. Давиденков (в последствии академик УССР), А.П. Коробов (ученик профессора С.П. Тимошенко), доценты А.К. Борисович, Д.Д. Саввин, Л.В. Яицкий и др.

Кафедра «Строительная механика» на инженерном отделении МСХИ (ныне МГУП) организована доктором технических наук, профессором, генерал-директором путей сообщения И.П. Прокофьевым (1877 – 1958 гг.) в 1913 г., который заведовал ею 38 лет. Учебник И.П. Прокофьева «Теория сооружений» начиная с 1929 г. выдержал 4 издания. Выдающимися учениками И.П. Прокофьева являются: академик РАН В.В. Болотин; член-корреспондент АН СССР А.Ф. Смирнов; доктора технических наук, профессора В.А. Киселев, Л.М. Емельянов, Н.И. Безухов, К.А. Ксенофонтов, С.В. Виноградов и др.

В настоящее время определение внутренних усилий осуществляется с помощью программных комплексов APM Win Machine, SCAD и SOLID и др.

Цель настоящего пособия - оказать помощь студентам вузов по направлениям 270800 "Строительство" и 280100 «Природообустройство и водопользование» в овладении методами проектирования и расчета инженерных сооружений.

Авторы учебного пособия ставили своей целью кратко и в доступной для понимания форме ознакомить будущих бакалавров, специалистов и магистров с основами дисциплины «Строительная механика».

1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ СИСТЕМ

1.1.Задачи строительной механики

Строительной механикой (в широком смысле) называется наука, изучающая и разрабатывающая методы расчета сооружений и их элементов на прочность, жесткость и устойчивость при действии статических и динамических нагрузок.

К ней относятся дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, строительная механика пластин и оболочек, теория упругости, теория пластичности и теория ползучести.

Строительная механика делится на следующие разделы:

- 1) статика сооружений – изучает расчеты на прочность при действии статической нагрузки (не вызывающей появления сил инерции);
- 2) динамика сооружений и
- 3) теория устойчивости сооружений.

В строительной механике широко применяются методы теоретической механики и сопротивления материалов, математики и физики. Строительная механика является экспериментально-теоретической наукой, так как базируется на результатах испытаний сооружений (в натуре и на моделях), опыте их эксплуатации и теоретических исследованиях.

Сооружение – это совокупность элементов расположенных в пространстве и взаимосвязанных определенным образом в зависимости от функционального назначения и воздействия внешних нагрузок.

Сооружения различного назначения, проектируемые и возводимые на основе расчета их на прочность, жесткость и устойчивость называются **инженерными сооружениями**.

Расчет сооружений на **прочность** обеспечивает их сопротивляемость действующим нагрузкам. Расчет на **устойчивость** выявляет способность сооружений сохранять заданные положения и принимаемые ими формы равновесия в деформированном состоянии. Расчет на **жесткость** преследует цель оградить сооружения от чрезмерных перемещений и вибраций, препятствующих их нормальной эксплуатации.

Совокупность элементов, воспринимающих внешнюю нагрузку, образует **несущую конструкцию** сооружения, а сами элементы называются **несущими**.

Основная **цель** строительной механики – определение внутренних усилий и перемещений, что позволяет оценить неизменяемость, прочность, жесткость и устойчивость сооружений при различных силовых воздействиях, установить законы образования наивыгоднейших форм сооружений.

К любому сооружению предъявляются следующие **т р е б о в а н и я**:

1) неподвижность относительно основания и неизменяемость заданной геометрической формы (в определенных пределах) в течении всего срока службы;

2) прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность и устойчивость гарантируют безопасность эксплуатации сооружения, а жесткость – нормальные условия эксплуатации.

3) экономичность сооружения определяется наименьшими затратами на материалы и возведение.

Основными **з а д а ч а м и** статики сооружений являются:

1) установление законов образования наивыгоднейших форм сооружений;

2) определение внутренних усилий во всех элементах сооружений;

3) изучение упругих перемещений, возникающих в сооружении под влиянием внешних воздействий;

4) исследование устойчивости сооружения.

В статике сооружений используются следующие основные **д о п у щ е н и я**, которые относятся ко всему сооружению в целом:

1) материал сооружения обладает идеальной упругостью;

2) материал и сооружения из него следуют закону Р. Гука, т.е. линейно деформируемы

$$\Delta = \alpha \cdot F,$$

где Δ – результат воздействия (перемещение, деформация, внутренние усилия, напряжения);

α – коэффициент пропорциональности;

F – действующая нагрузка.

3) расчет ведется по недеформированному состоянию, т.е. перемещения точек сооружения обусловленные упругими деформациями, малы по сравнению с размерами самого сооружения и не учитываются при составлении уравнений равновесия;

4) применим принцип суперпозиции (**принцип независимости действия сил**, принцип наложения): результат действия группы сил равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности.

1.2 Типы элементов сооружений. Расчетные схемы сооружений

Все элементы, из которых состоят сооружения, делятся на две группы:

А. По функциональному признаку элементы подразделяются на:

1) *несущие* – воспринимают и передают на землю нагрузки от веса сооружения, технологического или какого-либо другого оборудования, давления воды, ветровые, снеговые, гололедные (климатические) и сейсмические воздействия;

2) *второстепенные* (ограждающие элементы) – не принимают участие в передаче нагрузки на землю и воспринимают только собственный вес.

Б. По геометрическому признаку среди элементов сооружений выделяют следующие основные виды несущих элементов:

1) стержень (брус) $L \gg B \approx H$;

2) оболочка и пластина $L \approx B \gg H$;

3) массивное тело $L \approx B \approx H$.

Расчет сооружения с точным учетом всех геометрических размеров и формы его элементов, а также с учетом строгого их взаимодействия между собой теоретически недоступен или практически сложен и, следовательно, неприемлем, поэтому строительная механика использует метод научной абстракции, заменяя сооружения их расчетными схемами.

Схема сооружения – это упрощенное его изображение, учитывающее основные свойства, которые определяют поведение сооружения под нагрузкой. В схеме стержни заменяют их осями, пластины – их срединными поверхностями; поперечные сечения стержней и пластин (оболочек) независимо от их формы характеризуются в общем виде численными значениями: площади поперечного сечения (A), осевого момента инерции (I); материалы характеризуются модулями упругости первого и второго рода E и G ; реальные опорные устройства и связи между элементами заменяют

идеальными связями.

Такое упрощение должно обеспечивать выполнение приемлемого по сложности и в то же время достоверного по точности расчета.

Расчетные схемы сооружений группируют по различным признакам.

1. По типу элементов:

- а) стержневые системы – состоят из стержней различного очертания и сечения;
- б) складчато–тонкостенные – состоят из пластин и оболочек;
- в) массивные;
- г) висячие или вантовые.

2. По расположению в пространстве:

- а) плоские;
- б) пространственные.

Плоские сооружения самостоятельно встречаются редко и чаще являются составной частью пространственных сооружений.

1.3 Образование и свойства плоских стержневых систем

1.3.1 Основные понятия

Плоская система – это система, оси всех элементов которой лежат в одной плоскости. В этой же плоскости лежит одна из главных центральных осей поперечного сечения и внешняя нагрузка. Перемещения точек системы принадлежат этой же плоскости.

Системы подразделяют на следующие **типы** :

- 1) **геометрически изменяемые (механизмы)** – которые могут иметь перемещения, не связанные с деформацией материала конструкции, и на
- 2) **геометрически неизменяемые (сооружения)** – любые перемещения которых связаны с деформацией материала конструкции (см. Рис. 1.3, а).

Геометрически неизменяемые системы могут быть со статической точки зрения:

2-а) **статически определимыми** – для определения основных неизвестных (опорных реакций и реакций иных связей) хватает одних уравнений статического равновесия;

2-б) **статически неопределимыми** – если имеются лишние связи, и для определения основных неизвестных (опорных реакций и реакций иных связей) уравнений статического равновесия не хватает.

Для определения типа системы проводят **кинематический анализ – это первый шаг при решении любой задачи!!!.**

Степень свободы какого-либо тела или системы тел – это число независимых геометрических параметров, определяющих положение тела или системы тел в пространстве (см. Рис. 1.1).

ДИСК – это любая система, расстояние между двумя произвольными

точками которой ($C-C_1$) может измениться только за счет деформации материала. Диск может изображаться в виде (см. Рис. 1.2): фигуры неопределенной формы (а); сооружения (б); элемента сооружения (в) и (г). Иначе говоря, **ДИСК** – это геометрически неизменяемая часть сооружения или сооружение в целом.

Степень свободы каждого обособленного диска в плоскости равна трем: две координаты какой-либо точки, принадлежащей диску (например, точка C), и угол наклона φ к оси абсцисс какой-либо прямой, проходящей через ту же точку ($t.C \in CC_1$).

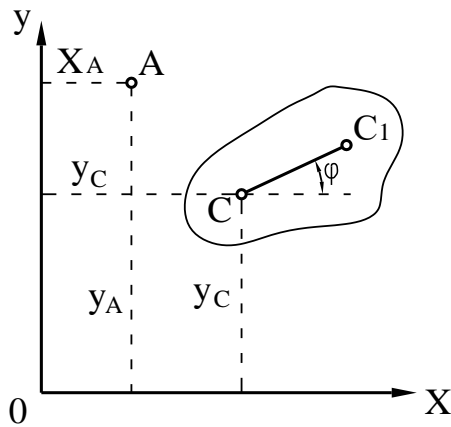


Рис. 1.1 – К определению степени свободы диска

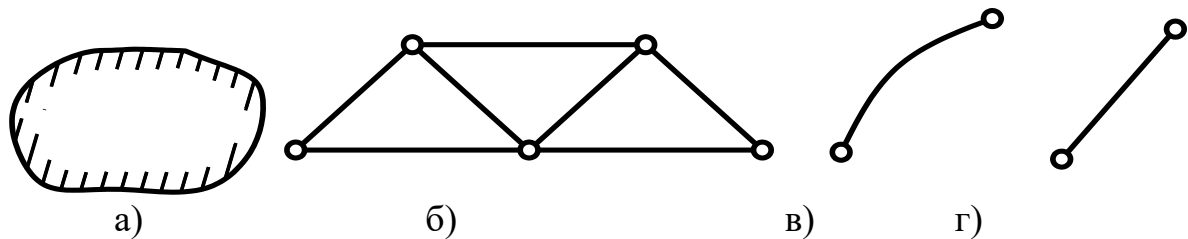


Рис. 1.2 – Примеры изображения диска

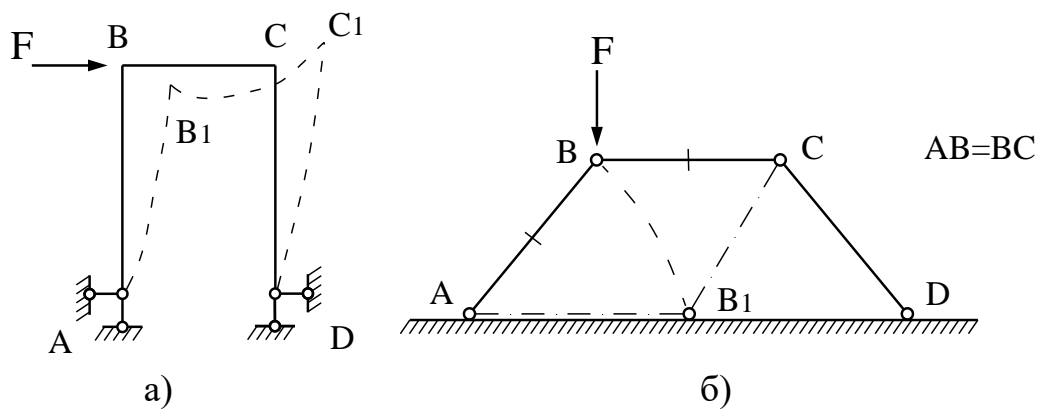


Рис. 1.3 – Примеры геометрически неизменяемой (а) и геометрически изменяемой (б) систем

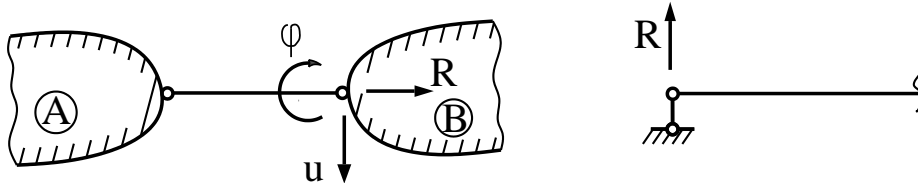
Земля – это неподвижный диск (степень свободы равна нулю).

Одним из основных требований, предъявляемых к сооружению, является следующее: сооружение должно сохранять заданную геометрическую форму в течение всего срока службы, то есть сооружение должно быть геометрически или мгновенно неизменяемо.

1.3.2 Виды связей между дисками и типы опор

Различают следующие виды связей между дисками и типы опор:

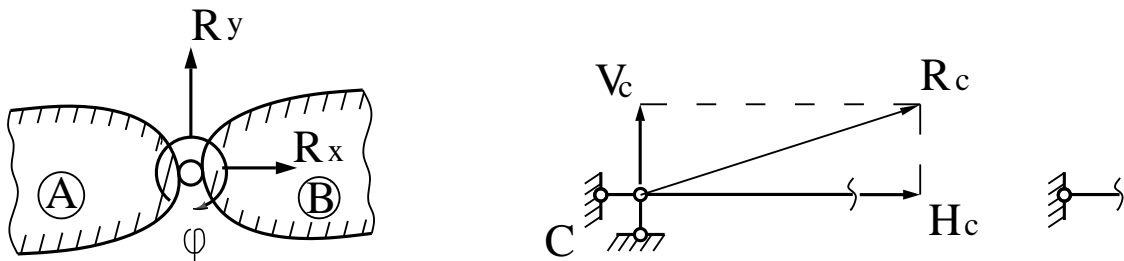
1. Стержень с шарнирами по концам - Шарнирно-подвижная опора:



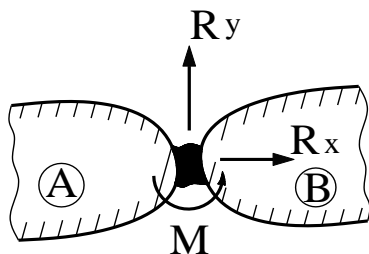
В этом случае возможны перемещения диска В относительно диска А:
 – линейные по направлению $u \perp AB$;
 – угловое (φ) относительно одного из шарниров.

Реакция всегда направлена по оси стержня, удаляет одну степень свободы (накладывает одну связь).

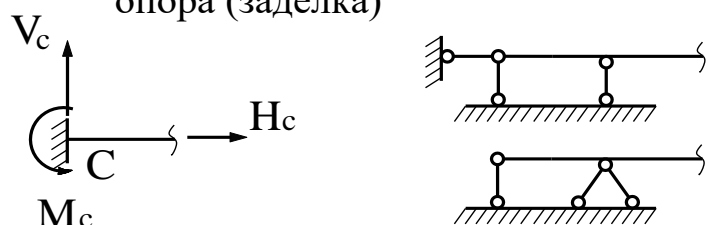
2. Цилиндрический шарнир или Шарнирно-неподвижная опора - удаляет две степени свободы или накладывает две связи. Имеются только угловые перемещения (φ), т.е. вращения.



3. Жесткое соединение



Заземляющая неподвижная опора (заделка)



Заделка удаляет три степени свободы (накладывает три связи). Взаимные перемещения дисков невозможны. Жесткое соединение равноценно

трем стержням с шарнирами по концам и не пересекающимися в одной точке.

1.3.3 Этапы анализа образования плоских систем

Структурный (кинематический) анализ – первый шаг при решении любой системы, ибо только после этого можно выбрать метод задачи. Его цель – дать ответ на основной вопрос – к какому типу относится рассматриваемая система.

Структурный анализ образования сооружений можно рассматривать состоящим из двух этапов.

1. Количественный анализ, определяет необходимые количественные соотношения между элементами сооружения:

А) ДИСКОВЫЕ СИСТЕМЫ.

Аналитический признак геометрической неизменяемости (формула Чебышева) (необходимый, но недостаточный) имеет вид:

$$W=3D-2Ш-3Ж-C_0 \leq 0,$$

где D – число дисков, образующих систему;

$3D$ – степень свободы для D дисков (число уравнений статики);

$2Ш+C_0$ – число реакций, которые необходимо найти;

C_0 – число опорных стержней с шарнирами по концам;

W – степень свободы системы, при этом если

$W=0$ – система статически определимая;

$W<0$ – признак статически неопределимой системы;

$W>0$ – геометрически изменяемая система (механизм);

$Ш$ – суммарное число простых и приведенных к ним сложных (кратных) шарниров.

$Ж$ – суммарное число простых и приведенных к ним сложных (кратных) жестких связей.

Простой шарнир (одионый) – шарнир, соединяющий два диска (стержня), снимает одну связь (см. Рис. 1.4).

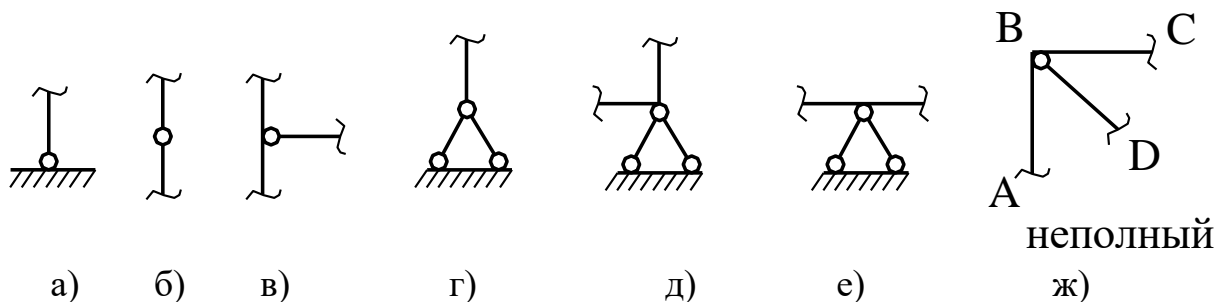


Рис. 1.4 – Схемы простых шарниров

Сложный шарнир – шарнир, соединяющий более двух дисков (стержней) [Рис. 1.5] или точек одного диска (Рис.1.6). Кратность (экви-

валентность) сложного шарнира «Ш» простым шарнирам равна:

$Ш = m - 1$, где m – число дисков (стержней) объединенных сложным шарниром.

Если шарнир соединяет три стержня (диска) АВ, АС и DFE, тогда $Ш = 3 - 1 = 2$ (см. Рис. 1.5).

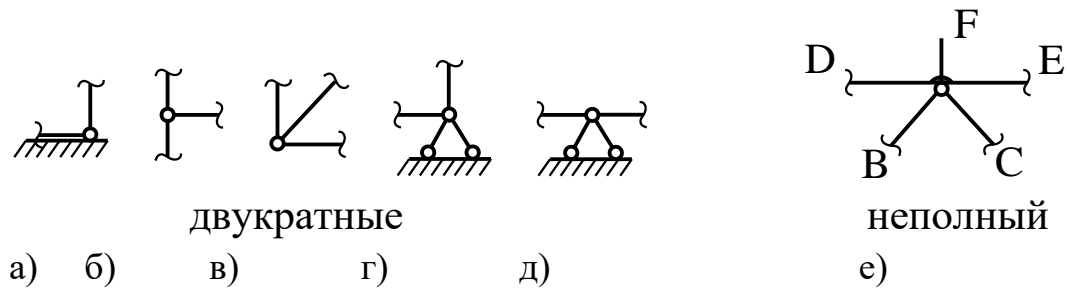


Рис. 1.5 – Схемы двукратных шарниров

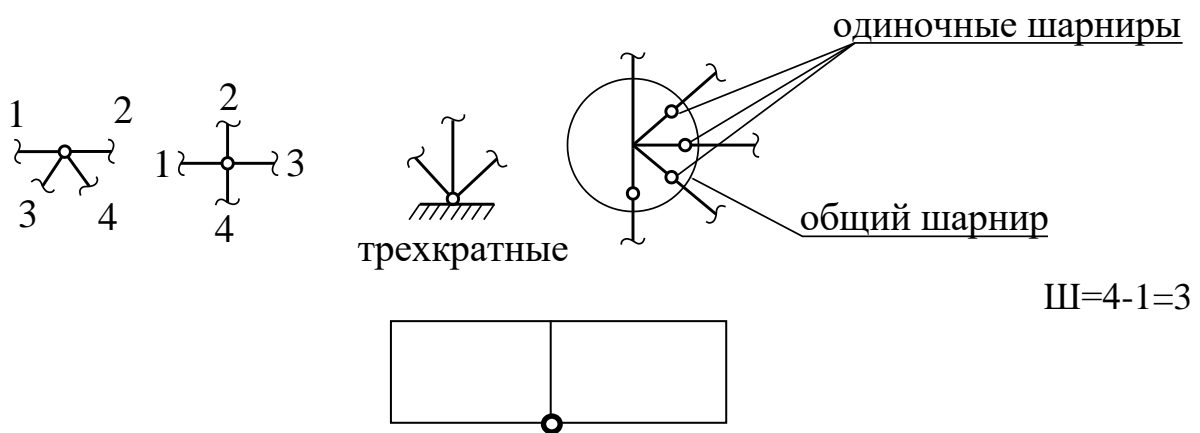


Рис. 1.6 – Схемы сложных шарниров

Полный шарнир – это сложный шарнир, соединяющий все стержни, сходящиеся в узле.

Угловой диск ABC, составленный из двух стержней ВА и ВС, жестко соединенных между собой, и диск (стержень) BD соединены неполным шарниром (см. Рис. 1.4. ж).

На Рис.15 а-д показаны примеры сложных полных шарниров, а на Рис.15 е) – сложный неполный шарнир.

Кратная жесткая связь, соединяющая « m » стержней эквивалентна « $m - 1$ » простым жестким связям (см. Рис. 1.7).

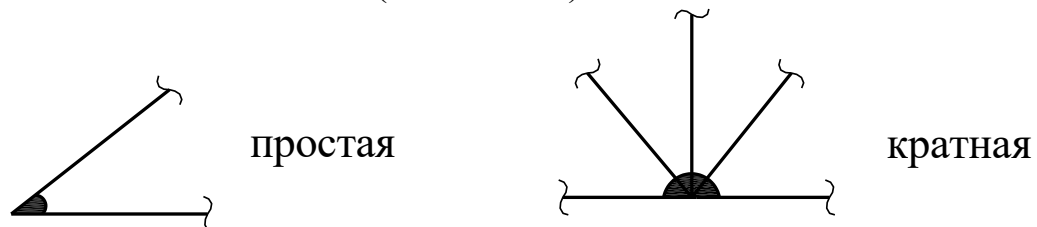


Рис. 1.7 – Схемы жестких связей

Б) СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Аналитический признак геометрической неизменяемости
(для свободных систем)

$$S=2Y-3,$$

где S – число стержней;

Y – число шарнирных узлов;

Предыдущее выражение получено следующим образом

$$S = (Y-3) \cdot 2 + 3, \Rightarrow S = 2Y-3$$

здесь $Y-3$ – число присоединенных узлов;

$(Y-3) \cdot 2$ – число присоединенных стержней.

(для несвободных, т.е. присоединенных к земле систем)

$$S=2Y,$$

здесь S – число неизвестных – усилий в стержнях;

$2Y$ – число уравнений равновесия.

П р и м е ч а н и е. При этом опорные стержни считаются стержнями системы.

Если $S > 2Y-3$, то система, вероятно, геометрически неизменяема и статически неопределимая (С.Н.С).

При $S < 2Y-3$ – изменяема.

Если $S = 2Y$ – статически определимая система (С.О.С).

П р и м е ч а н и е. Далее при соблюдении условий $W \leq 0$, $S \geq 2Y-3$ ($S \geq 2Y$) система может быть в некоторой её части геометрически или мгновенно изменяемой.

Этот критерий для ферм можно записать и другим образом:

$$C + O = 2Y.$$

Здесь C – число стержней, O – число опорных связей (т.о. $C+O$ – общее количество неизвестных);

Y – число шарнирных узлов, а $2Y$ – общее число независимых уравнений статики.

Соответственно, если $C+O > 2Y$ – система может быть геометрически неизменяемой и статически неопределимой (есть лишние связи);

Если $C+O < 2Y$ – связей не хватает, система геометрически изменяема <

К и н е м а т и ч е с к и й анализ определяет правильность соединения отдельных элементов, не допуская геометрической и мгновенной изменяемости систем.

Мгновенно изменяемыми называют системы, допускающие без деформации составляющих их элементов бесконечно малые поступательные или вращательные перемещения, после чего системы становятся неизменяемыми (см. Рис. 1.8, б).

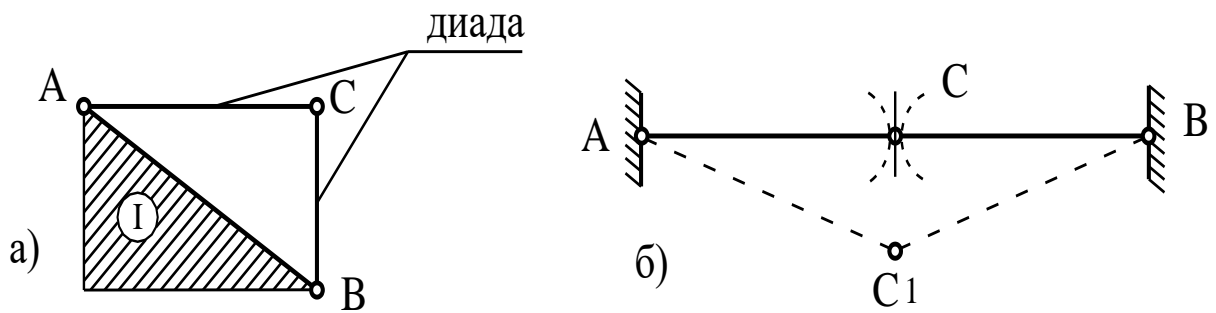
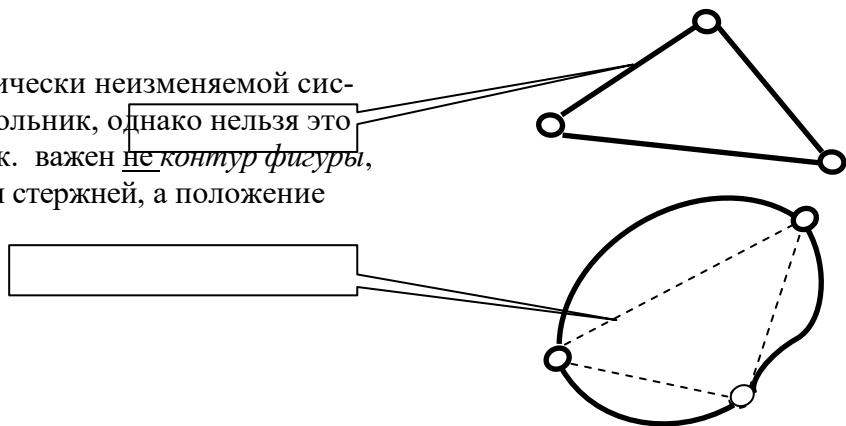


Рис. 1.8 – Иллюстрация к понятиям «диада» (а) и «мгновенно изменяемая система» (б)

Правила образования геометрически неизменяемых систем

1. В основе образования простых шарнирно-стержневых систем лежит система из трех стержней, соединяемых попарно при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (иначе получится мгновенно изменяемая система).

Простейшей геометрически неизменяемой системой является треугольник, однако нельзя это абсолютизировать, т.к. важен не контур фигуры, которую образуют оси стержней, а положение шарниров



2. Для геометрически неизменяемого присоединения к неизменяемой системе одного узла (например, С) необходимы два стержня (АС и ВС), не лежащие на одной прямой.

Совокупность двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой и соединенных шарниром, называется – **диадой** (см. Рис. 1.8, а).

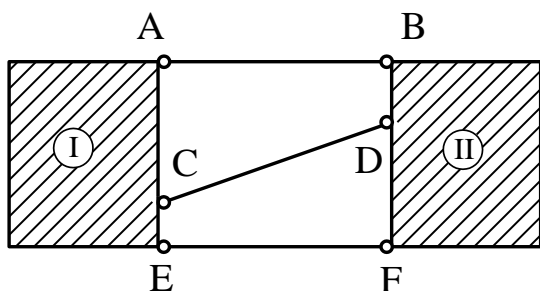
Присоединение к системе любого количества диад или отбрасывание их не нарушает неизменяемости системы.

3. Два диска образуют неизменяемую систему, если они соединены между собой одним из способов, указанных на Рис. 1.9.

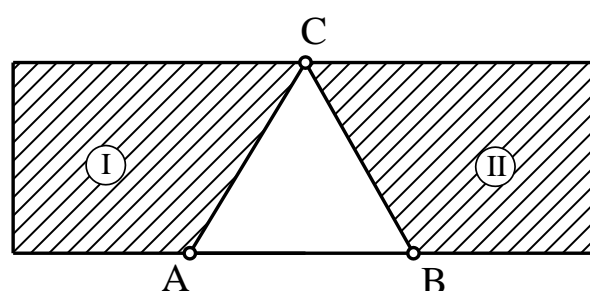
4. Три диска образуют неизменяемую систему, если они соединены между собой одним из способов, указанных на Рис. 1.10.

Следует помнить, что соединяемые элементы (диски или узлы) можно рассматривать как соединяющие (связи), а соединяющие элементы – наоборот, как соединяемые (см. Рис. 1.10, а), например:

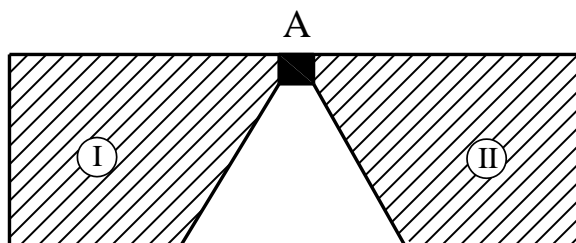
- 1) три диска (I и II, III) соединены шарнирами (А, В и С);
- 2) три узла (А, В и С) соединены связями (АВ, ВС, и АС);
- 3) два диска (I и II) соединены шарниром В и связью АС;
- 4) прикрепление к диску III узла В связями АВ и ВС.



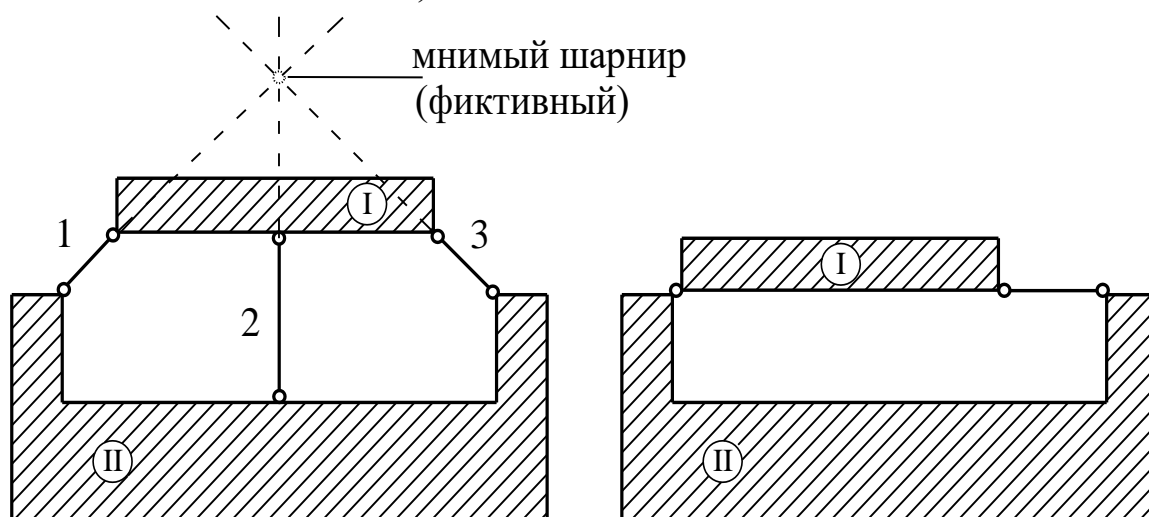
а) три стержня, оси которых (или их продолжения) не пересекаются в одной точке и не параллельны



б) один шарнир и стержень ось которого не проходит через центр этого шарнира



в) одна жесткая связь



г)

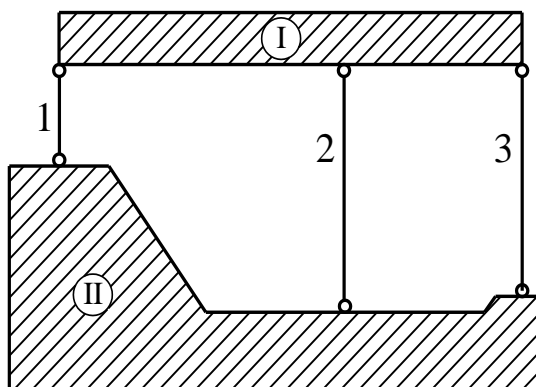
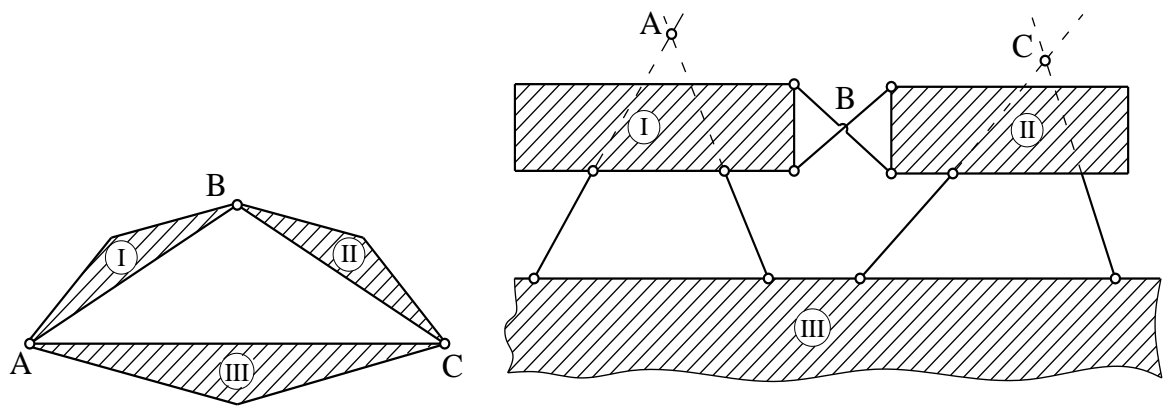
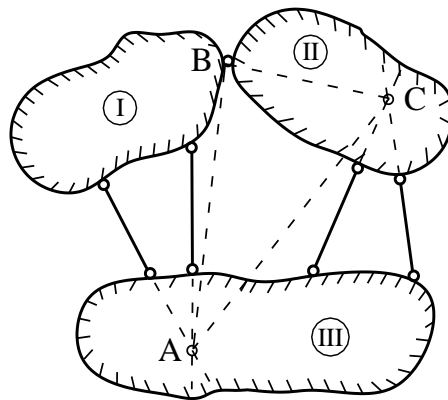


Рис. 1.9 – Способы соединения двух дисков между собой (а, б, в) и примеры их неправильного присоединения (г)

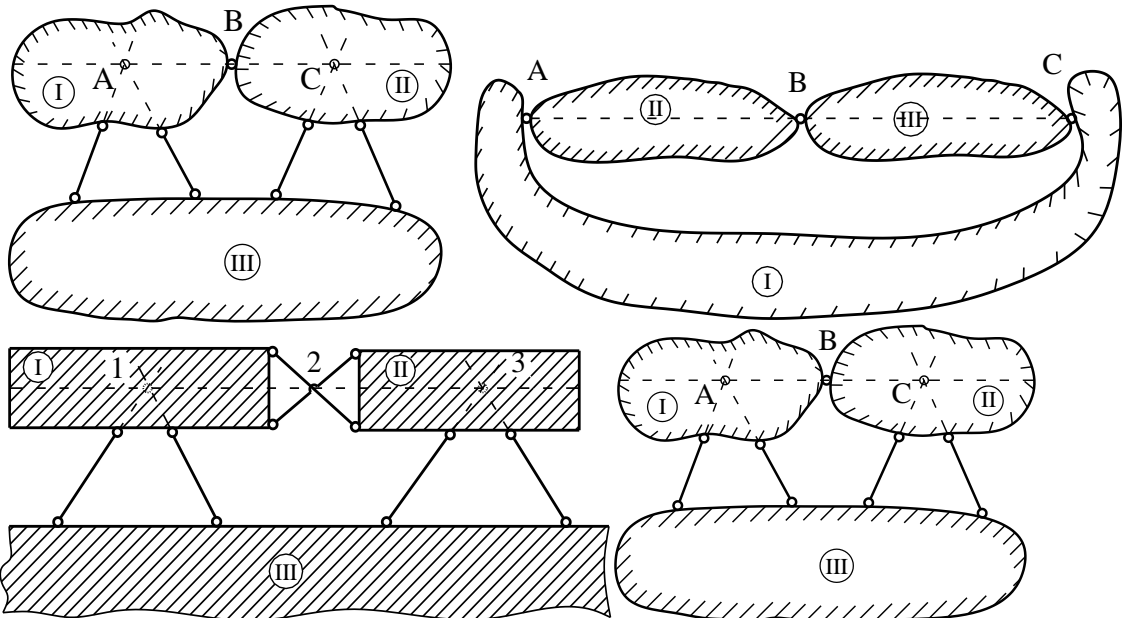


а) три шарнира, центры которых не лежат на одной прямой

б) шесть стержней, каждые два из которых соединяют по паре дисков так, что точки пересечения осевых линий которых (фиктивные шарниры) не лежат на одной прямой



в) смешанное соединение - при помощи шарниров и стержней; реальные и фиктивные шарниры не должны лежать на одной прямой



г)

Рис. 1.10 – Способы соединения трех дисков между собой (а,б,в) и примеры их неправильного присоединения (г).

Итак, приступая к расчету любого сооружения, необходимо убедиться в его неизменяемости, так как в противном случае статический расчет теряет всякий смысл.

2 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

2.1 Понятие о линиях влияния

При расчете многих конструкций (фермы мостов, кранов, подкрановые балки, фермы эскалаторов) приходится иметь дело с подвижной (обычно вертикальной) нагрузкой, которая может перемещаться в пределах сооружения. При этом величины усилий в элементах сооружения зависят от положения нагрузки на сооружении.

Для определения размеров элемента сооружения необходимо выбрать из всех возможных положений нагрузки такое, при котором усилие в элементе сооружения получилось бы наибольшим. Поэтому для определения расчетного (наибольшего) усилия необходимо предварительно отыскать невыгоднейшее положение нагрузки.

Эта и некоторые другие задачи решаются при помощи так называемой *линии влияния*.

Линией влияния какого либо фактора (опорной реакции, изгибающего момента и поперечной силы в **определенном сечении балки**, усилия в стержне фермы, перемещения сечения) называется график, изображающий закон изменения этого фактора в зависимости от положения на сооружении подвижного единичного груза $\bar{F} = 1$ (т.е. от координаты точки его приложения) постоянного направления.

Ц е л ь построения линии влияния (Л.В.) – определение "опасного" положения подвижной нагрузки и экстремального значения исследуемого фактора.

Надо четко отличать линии влияния от эпюры. При построении линии влияния сечение остается неподвижным, а единичный груз $\bar{F} = 1$ перемещается по сооружению; при построении эпюры меняется положение сечения, нагрузка же остается неподвижной. Сравнение удобно представить в табличной форме.

Таблица 2.1

Сравнение свойств эпюры и линии влияния

Эпюра	Нагрузка неподвижна (любая)	Сечение подвижно
Линия влияния	Нагрузка подвижна (груз $\bar{F} = 1$)	Сечение неподвижно

2.2 Линия влияния опорных реакций и усилий в сечениях однопролетных балок

Наиболее простым методом построения линий влияния является статический.

Порядок построения линии влияния следующий:

1. Выбирают положение начала координат (положение подвижной нагрузки всегда должно отсчитываться от одной и той же точки) уОz.

2. Как правило, на втором шаге необходимо построить линии влияния опорных реакций.¹

Линии влияния опорных реакций

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad V_A L - 1(L - z) = 0;$$

$$V_A = \frac{(L - z)}{L} = 1 - \frac{z}{L}$$

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad V_B L - 1z = 0;$$

$$V_B = \frac{z}{L}$$

3. Позволяют грузу двигаться и строят график (см. Рис. 2.1, б, в)

$$-C \leq z \leq L + d$$

$$\text{при } z = 0 \left| \begin{array}{l} V_A = 1; \\ V_B = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{при } z = L \left| \begin{array}{l} V_A = 0; \\ V_B = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{при } z = -C \left| \begin{array}{l} V_A = 1 + \frac{C}{L}; \\ V_B = -\frac{C}{L} \end{array} \right.$$

$$\text{при } z = L + d \left| \begin{array}{l} V_A = -\frac{d}{L}; \\ V_B = 1 + \frac{d}{L} \end{array} \right.$$

3 На третьем шаге рассматривают два положения груза, каждый раз выбирая, равновесие какой части удобнее рассмотреть:

¹ Только в консольных системах, имеющих заделку, можно не определять опорные реакции, но при этом приходится каждый раз рассматривать свободный конец консоли.

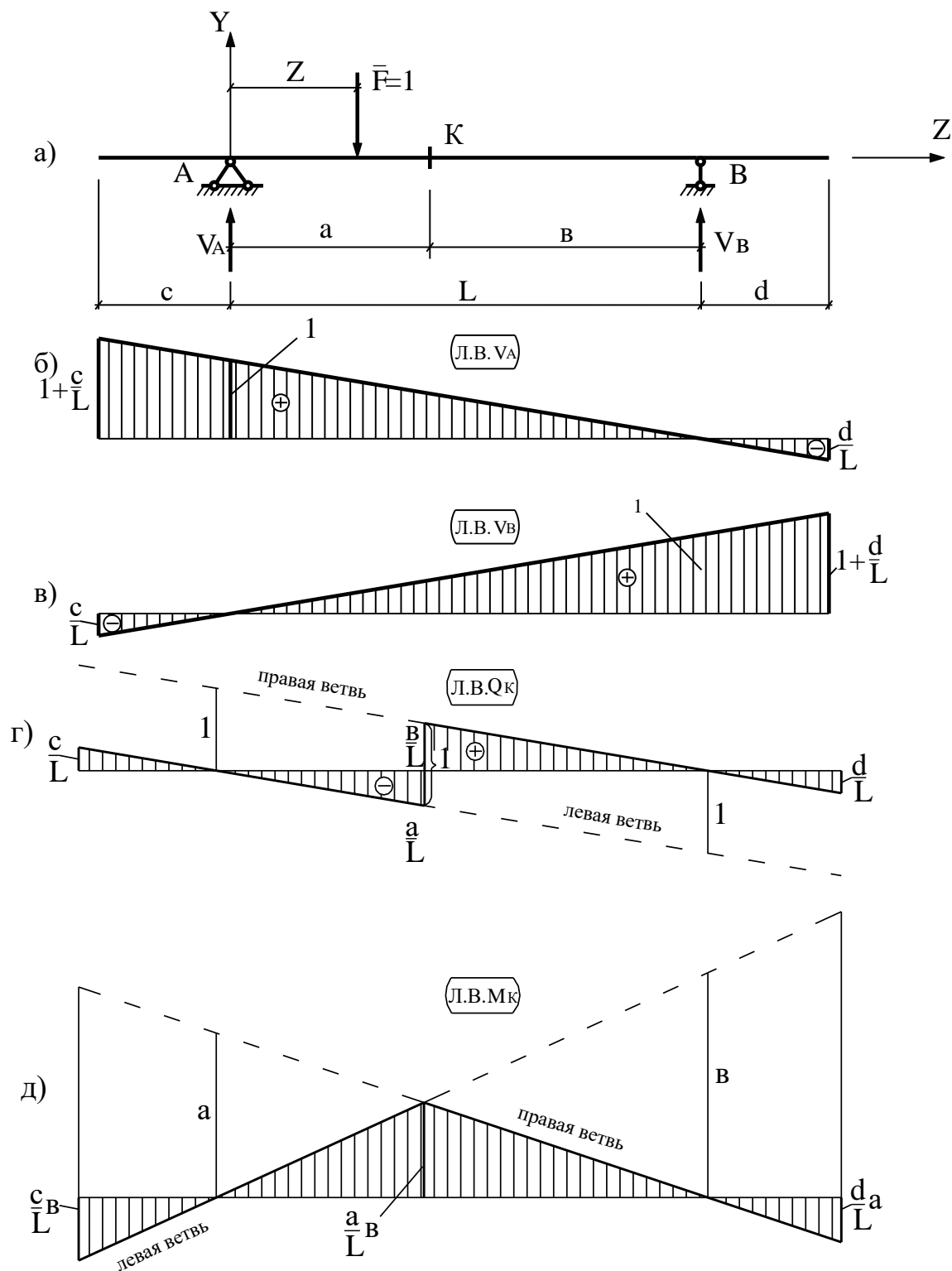


Рис. 2.1 – Построение линий влияния опорных реакций (б, в), поперечных сил (г) и изгибающих моментов (д) в сечениях однопролетной балки (а)

Линии влияния внутренних усилий (Q_K и M_K) строят рассматривая два положения груза относительно сечения – слева и справа от него:

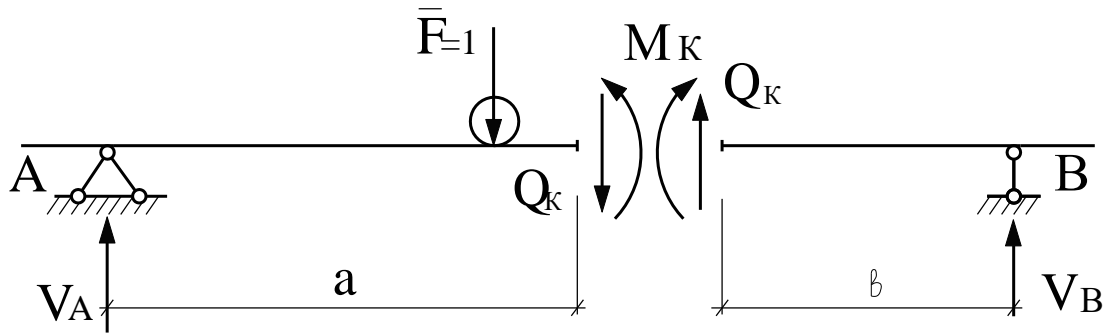


Рис. 2.2 – Груз слева от сечения К-К

$$-C \leq z \leq a$$

$$\sum y^{прав} = 0; \quad Q_K = -V_B = -\frac{z}{L} \epsilon;$$

$$\sum M_K^{прав} = 0; \quad M_K = V_B \epsilon = \frac{z}{L} \epsilon$$

$$\text{при } z = -c \left| \begin{array}{l} Q_K = \frac{c}{L}; \\ M_K = -\frac{c}{L} \epsilon \end{array} \right.$$

$$\text{при } z = a \left| \begin{array}{l} Q_K = -\frac{a}{L}; \\ M_K = \frac{a}{L} \epsilon \end{array} \right.$$

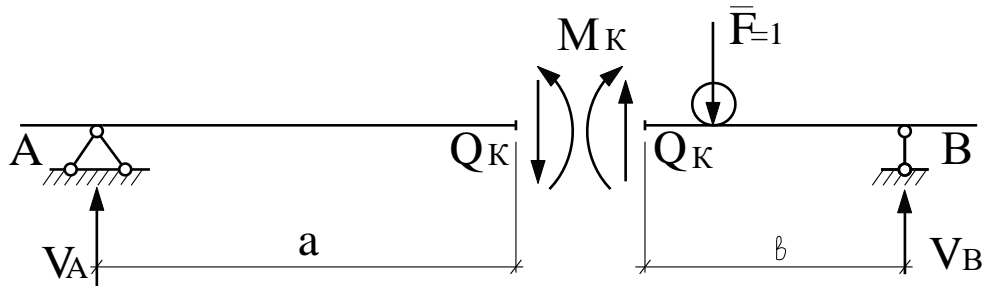


Рис. 2.3 – Груз справа от сечения К-К

$$a \leq z \leq L+d$$

$$\sum y^{лев} = 0; \quad Q_K = V_A = 1 - \frac{z}{L};$$

$$\sum M^{лев} = 0; \quad M_K = V_A a = \left(1 - \frac{z}{L}\right) a$$

$$\text{при } z = a \left| \begin{array}{l} Q_K = 1 - \frac{a}{L} = \frac{\epsilon}{L}; \\ M_K = \left(1 - \frac{a}{L}\right) a = \frac{\epsilon}{L} a \end{array} \right.$$

$$\text{при } z = L+d \left| \begin{array}{l} Q_A = -\frac{d}{L}; \\ M_K = -\frac{d}{L} a \end{array} \right.$$

П р а в и л а проверки линии влияния поперечной силы (Q):

- 1) правая и левая ветви – параллельные прямые;
- 2) скачок на линии влияния равен величине подвижного груза

($\bar{F} = 1$) и расположен под сечением (К-К).

П р а в и л о проверки линии влияния изгибающего момента: правая и левая ветви линии влияния изгибающего момента М пересекаются под рассматриваемым сечением.

2.3 Основные свойства линий влияния. Определение усилий по линиям влияния

1. Если известны линии влияния какого-либо усилия в элементе сооружения и положения на сооружении груза F, то величина этого усилия равна произведению силы тяжести груза на ординату линии влияния, расположенную под грузом:

$$\Phi = Fy$$

2. Если известны линии влияния какого-либо усилия в элементе сооружения и положение на сооружении системы сосредоточенных грузов $F_1; F_2; \dots; F_n$, то значение этого усилия равно алгебраической сумме произведений сил тяжести этих грузов на ординаты линии влияния, расположенные под указанными грузами (см. Рис. 2.4). На основании принципа независимости действия сил

$$\Phi = F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n \quad \text{т.е.} \quad \Phi = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

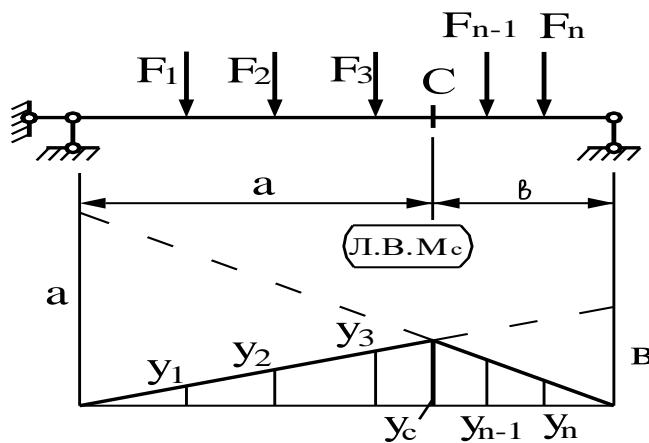


Рис. 2.4 – Схема к определению усилия по линии влияния от системы сосредоточенных грузов

3. Если известны линии влияния какого-либо усилия в элементе сооружения и положение на сооружении равномерно распределенной нагрузки, то значение этого усилия равно произведению интенсивности равномерно распределённой нагрузки на площадь линии влияния, располо-

женную под участком действия указанной нагрузки (см. Рис. 2.5).

$$d\Phi = qdz \cdot y,$$

где $udz = q\omega$ или $d\Phi = qd\omega$

Тогда значение усилия от всей q:

$$\Phi = \int_a^e qd\omega,$$

т.к. $q = const$, то

$$\Phi = q \int_a^e d\omega = q(\omega_e - \omega_a) = q\omega \quad \text{или} \quad \Phi = \sum_{i=1}^n q_i \omega_i$$

В случае одновременного действия F и q

$$\Phi = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{j=1}^m q_j \omega_j$$

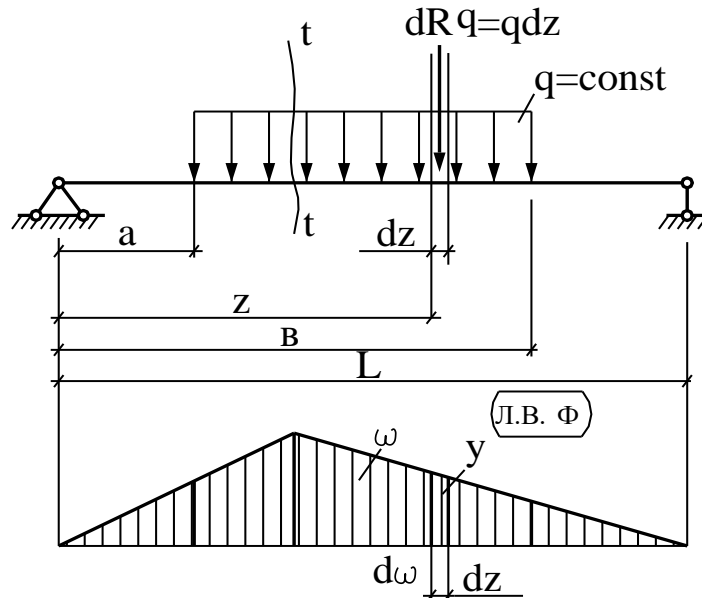


Рис. 2.5 – Схема к определению усилия по линии влияния от действия равномерно распределенной нагрузки

2.4 Построение линии влияния при узловой передаче нагрузки

Узловая передача нагрузки встречается в балочных клетках перекрытий промышленных зданий, рабочих площадках этих же зданий и в мостовых конструкциях (нагрузка передается через проезжую часть (настил) на поперечные балки и далее в узлы мостовых ферм).

Узловая передача нагрузки несколько изменяет условия работы балки и вид линии влияния (см. Рис. 2.6).

При движении единичного груза $\bar{F} = 1$ слева от рассматриваемой панели

$$M_c = V_B \vartheta = \frac{z}{L} b$$

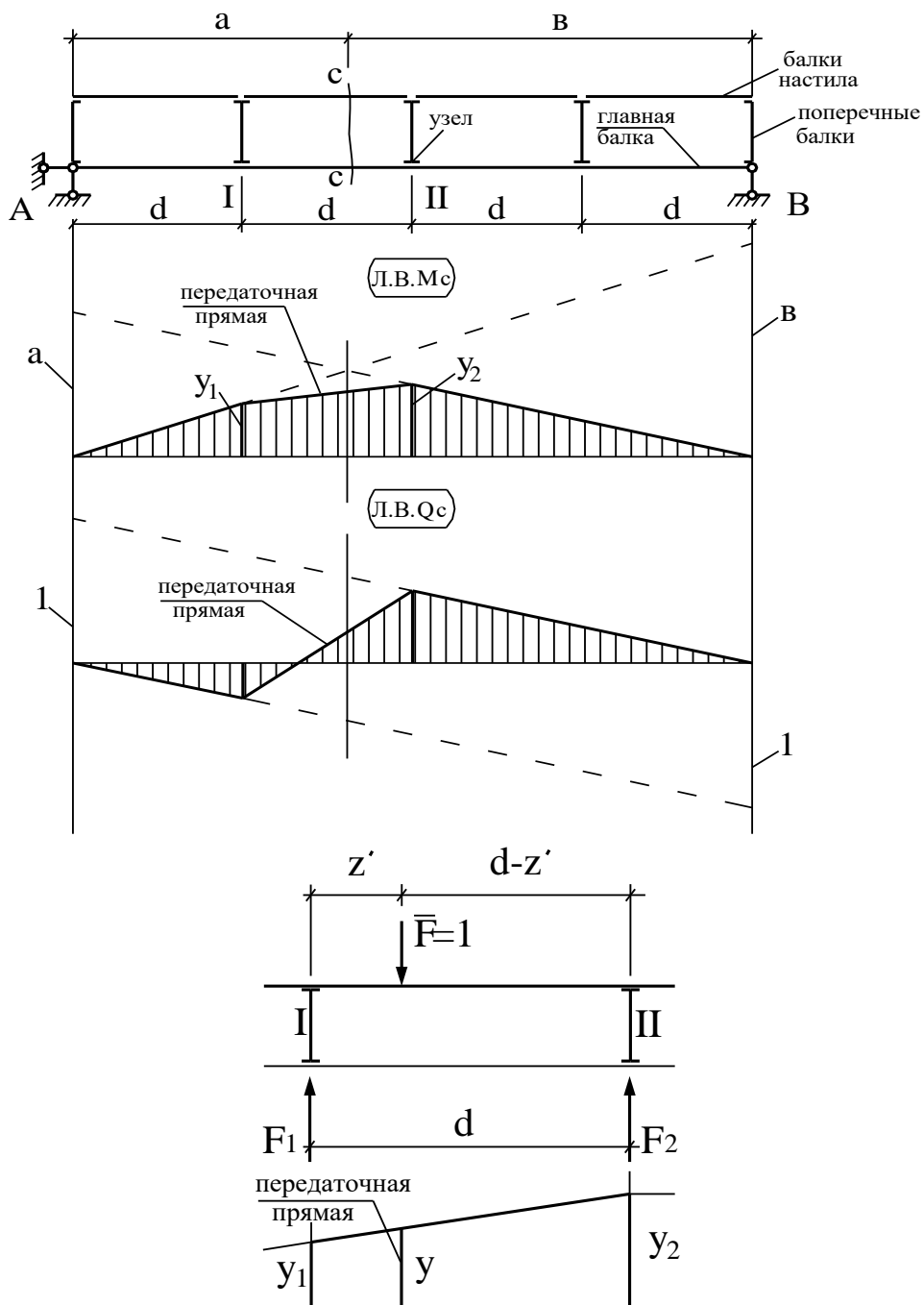


Рис. 2.7 – Схема к определению усилия по линии влияния при узловой передаче нагрузки

При движении единичного груза $\bar{F} = 1$ справа от разрезаемой панели

$$M_c = V_a a = \frac{L-z}{L} a$$

Таким образом, при узловой передаче нагрузки линия влияния M_c

вне пределов разрезаемой панели имеет очертание и ординаты такие же, как и при непосредственном действии единичного груза $\bar{F} = 1$ на главную балку.

Рассмотрим случай когда единичный груз $\bar{F} = 1$ находится в пределах разрезаемой панели.

$$\sum M_{(I)} = 0; \quad F_2 d - 1 \cdot z' = 0; \quad F_2 = \frac{z'}{d};$$

$$\sum M_{(II)} = 0; \quad F_1 d - 1(d - z') = 0; \quad F_1 = \frac{d - z'}{d}$$

Найдем усилие при движении груза в пределах разрезанной панели

$$\Phi_c = \bar{F} y = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

Подставим значения \bar{F}, F_1 и F_2 в полученное выражение, тогда

$$y = \frac{d - z'}{d} y_1 + \frac{z'}{d} y_2.$$

Т.е. последнее уравнение - уравнение линии влияния Φ_c в пределах разрезаемой панели.

Здесь d, y_1 и y_2 - const, а y и z' - переменные.

Тогда при $z' = 0, y = y_1$;

при $z' = d, y = y_2$.

Итак, при узловой передаче нагрузки линии влияния усилия Φ_c в пределах разрезанной панели представляет собой прямую, соединяющую вершины ординат, расположенные под узлами разрезанной панели и называется **передаточной**.

Правило построения линии влияния при узловой передаче нагрузки:

- 1) строят линии влияния исследуемого фактора в предположении, что единичный груз $\bar{F} = 1$ непосредственно действует на главную балку;
- 2) на полученной линии влияния отмечают ординаты под узлами разрезанной панели и соединяют их передаточной прямой.

2.5 Построение линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в стержнях плоских ферм

2.5.1. Вначале, рассмотрим в качестве примера задачу по определению усилий в стержнях ферм от заданной (не единичной) нагрузки:

Для фермы, представленной на Рис.2.6. а2, при нагрузке, показанной на Рис.2.6.а1, требуется определить усилия в стержнях : O1, D3, D4, V2, U4

1. Кинематический анализ: ферма представляет собой один диск, соединенный с землей 3 связями, которые не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, следовательно система геометрически неизменяема и статически определима.

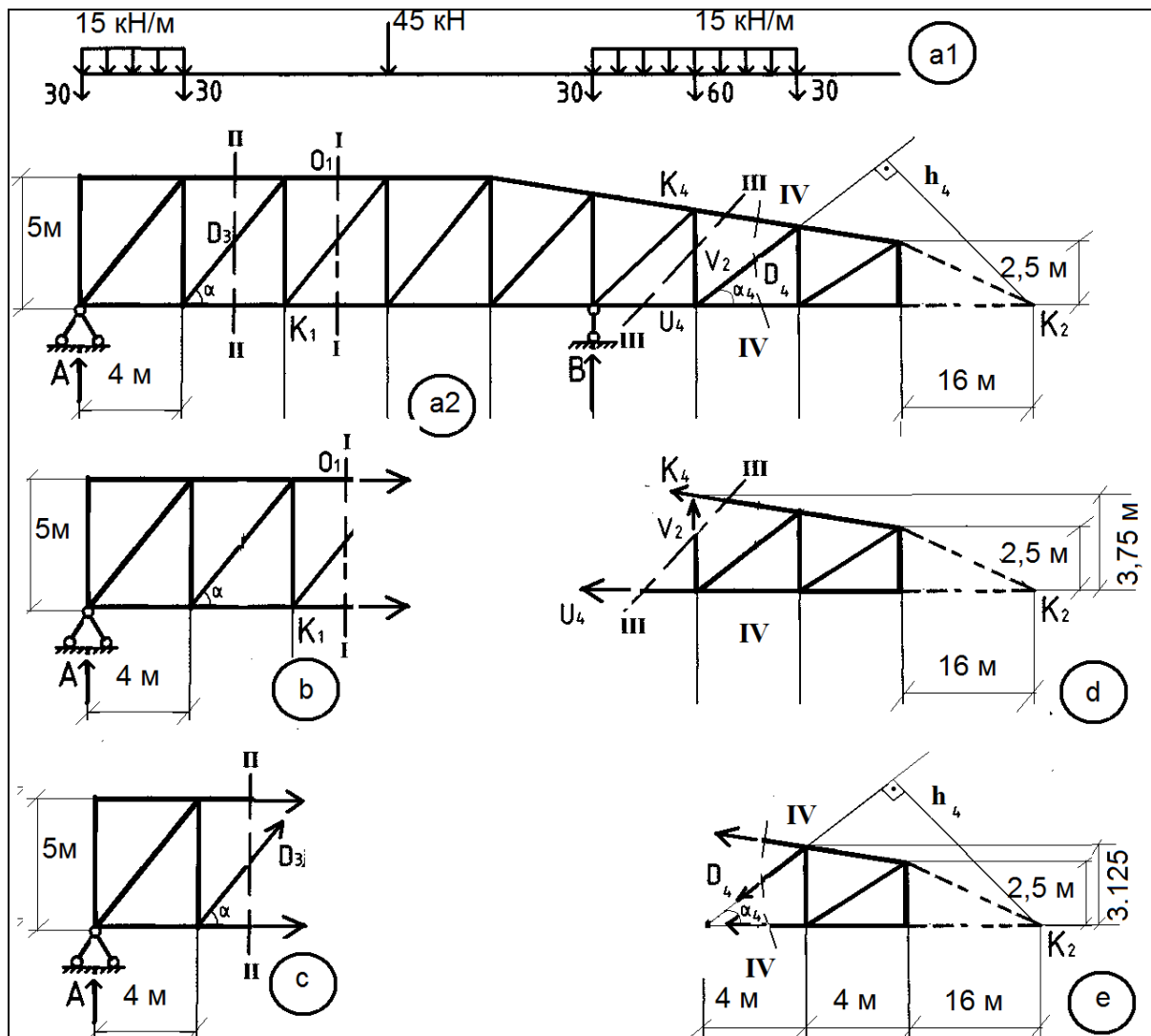


Рис. 2.6. К определению усилий в стержнях ферм: a1- нагрузка, включая разбивку распределённой нагрузки по узлам; a2 - расчетная схема фермы; b - отсеченная часть к определению усилия D_3 ; c - отсеченная часть к определению усилия O_1 ; d - отсеченная часть к определению усилия O_1 ; e - отсеченная часть к определению усилия D_4

2. Определяем опорные реакции.

$$\Sigma M_A = 30 \cdot 4 + 45 \cdot 12 + 30 \cdot 20 + 60 \cdot 24 + 30 \cdot 28 - B \cdot 20 = 0; \Rightarrow B = 177 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_B = 60 \cdot 4 + 30 \cdot 8 - 45 \cdot 8 - 30 \cdot 16 - 30 \cdot 20 + A \cdot 20 = 0; \Rightarrow A = 48 \text{ кН}$$

Проверка опорных реакций: $\Sigma F_y = A + B - 15 \cdot 4 - 45 - 15 \cdot 8 = 177 + 48 - 225 = 0$.

3. Определяем усилия в заданных стержнях. При определении усилий в стержнях ферм следует иметь в виду, что положительными считаются растягивающие усилия, а сжимающие – отрицательными. Усилия вычисляются

ся из уравнений равновесия. Чтобы их составить, необходимо выбрать начальное направление каждого усилия. Если оно выбрано верно – результат получится положительным. Отрицательное значение говорит о том, что на самом деле усилие направлено в противоположную сторону, противоположную первоначальному направлению. После того, как установлено истинное направление усилия, можно приписать ему соответствующий знак.

Для упрощения расчета рекомендуется **всегда** направлять усилия сначала так, чтобы они вызывали растяжение. Тогда знак будет указывать на характер действия усилия – растягивает оно (+) или сжимает стержень (-).

3.1 Определим усилие 0_1 . Рассмотрим равновесие левой отсеченной части (сечение I-I, Рис.2.6. b). Неинтересующие нас в данный момент усилия (в раскосе и нижнем пояском стержне) пересекаются в точке K_1 , которая будет являться моментной точкой; относительно неё мы и составляем сумму моментов, которую приравняем к нулю (используем метод моментных точек):

$$\Sigma M_{K1}^{\text{лев.с.}} = A*8 - 30*4 - 30*8 + 0_1*5 = 0; \Rightarrow 0_1 = -4.8 \text{ кН} \quad (\text{начальное растягивающее направление – неверное, происходит сжатие})$$

3.2. Определим усилие D_3 . Рассмотрим равновесие левой отсеченной части (сечение II-II, Рис. 2.6 c). Неинтересующие нас в данный момент усилия (в верхнем и нижнем пояском стержне) параллельны друг другу и перпендикулярны вертикальной оси «у», поэтому для определения D_3 составим сумму проекций всех сил, приложенных к левой отсеченной части, на ось у, и приравняем её к нулю (используем метод Риттера):

$$\text{tg } \alpha = 5/4; \quad \alpha = 51.34^\circ; \quad \sin \alpha = 0.781;$$

$$\Sigma F_y^{\text{лев.с.}} = 48 - 30 - 30 + D_3 * \sin \alpha = 0 \Rightarrow D_3 = (60 - 48) / 0.781 = 15.48 \text{ кН}$$

3.3. Определим усилие V_2 . Рассмотрим равновесие правой отсеченной части (сечение III-III, Рис. 2.6.d), которая будет являться моментной точкой; относительно неё мы и составляем сумму моментов, которую приравняем к нулю (используем метод моментных точек):

$$\Sigma M_{K3}^{\text{пр.с.}} = -30*20 + 24*V_2 - 24*60 = 0; \Rightarrow V_2 = 85 \text{ кН}$$

3.4. Определим усилие U_4 . Рассмотрим равновесие правой отсеченной части (сечение III-III, Рис. 2.6 d), которая будет являться моментной точкой; относительно неё мы и составляем сумму моментов, которую приравняем к нулю (используем метод моментных точек):

$$\Sigma M_{K4}^{\text{пр.с.}} = U_4*3.75 + 30*4 = 0; \Rightarrow U_4 = -120/3.75 = -32 \text{ кН}$$

3.5. Определим усилие D_4 . Рассмотрим равновесие левой отсеченной части (сечение IV-IV, Рис. 2.6 e). Неинтересующие нас в данный момент усилия (в верхнем и нижнем поясных стержнях) пересекаются в точке K_2 , которая будет являться моментной точкой; относительно неё мы и составляем сумму моментов, которую приравняем к нулю (используем метод моментных точек): $\text{tg } \alpha_4 = 3.125/4 = 0.78125; \quad \alpha_4 = 38^\circ; \quad \sin \alpha_4 = 0.616;$

$$\Sigma M_{K2}^{\text{лев.с.}} = -D_4*24* \sin \alpha_4 - 30*20 = 0; \Rightarrow D_4 = 40.61 \text{ кН}$$

2.5.2. Для построения линии влияния усилий в стержнях ферм также как для аналитического определения усилий, применяется метод сечений, позволяющий для отсеченной части фермы составить уравнения равновесия и из них определить усилия в зависимости от положения на ферме единичного груза $\bar{F} = 1$.

При перемещении нагрузки по ферме усилие в каждом стержне меняется по величине, а не редко и по знаку. Чтобы выяснить закон изменения и наибольшее значение усилий в стержнях ферм при подвижной нагрузке используют линии влияния.

После того, как построены линии влияния для усилий во всех стержнях фермы, эту ферму можно загрузить произвольной нагрузкой и наглядно увидеть, какая нагрузка для каждого из стержней наиболее "опасна".

Построение ведут в следующем порядке.

1. построение линии влияния опорных реакций (см. Рис. 2.8, б, в).

$$0 \leq z \leq 6d$$

$$\sum M_{(B)} = 0; V_A \cdot 6d - 1 \cdot (6d - z) = 0;$$

$$V_A = \frac{6d - z}{6d} = 1 - \frac{z}{6d}$$

$$\sum M_{(A)} = 0; V_B 6d - 1z = 0;$$

$$V_B = \frac{z}{6d}$$

$$\text{при } z = 0 \begin{cases} V_A = 1; \\ V_B = 0 \end{cases} \quad \text{при } z = 6d \begin{cases} V_A = 0; \\ V_B = 1 \end{cases}$$

2. Построение линии влияния усилия N_{6-7} (см. Рис. 2.8, г).

Груз **справа от перерезанной панели** (сечения I-I)

$$\sum M_{(2)} = 0; N_{6-7} r_{6-7} + V_A 2d = 0;$$

$$N_{6-7} = -\frac{V_A 2d}{r_{6-7}} = -\frac{M_2^{\text{лев}}}{r_{6-7}} = -\left(1 - \frac{z}{6d}\right) \cdot \frac{2d}{r_{6-7}} = \left(\frac{z}{6d} - 1\right) \cdot \frac{2d}{r_{6-7}}$$

Груз **слева от перерезанной** панели (сечения I-I)

$$\sum M_{(2)} = 0; N_{6-7} r_{6-7} + V_B 4d = 0;$$

$$N_{6-7} = -\frac{V_B 4d}{r_{6-7}} = -\frac{M_2^{прав}}{r_{6-7}} = -\frac{z}{6d} \cdot \frac{4d}{r_{6-7}} = -\frac{2z}{3r_{6-7}}$$

$$0 \leq z \leq 6d$$

$$\text{При } z = 0 \left\{ \begin{array}{l} N_{6-7}^{лев} = -\frac{2d}{r_{6-7}}; \\ N_{6-7}^{прав} = 0 \end{array} \right. \quad \text{при } z = 6d \left\{ \begin{array}{l} N_{6-7}^{лев} = 0; \\ N_{6-7}^{прав} = -\frac{4d}{r_{6-7}} \end{array} \right.$$

Из полученных выражений следует, что построение линия влияния усилия N_{6-7} аналогично построению линии влияния балочного момента в сечении простой балки, соответствующем узлу 2 фермы

$$\text{при } z = 2d \left\{ \begin{array}{l} N_{6-7}^{лев} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{d}{r_{6-7}}; \\ N_{6-7}^{прав} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{d}{r_{6-7}} \end{array} \right.$$

Для построения линии влияния N_{6-7} в пределах разрезанной панели отмечают вершины ординат, расположенных под узлами 6 и 7 на построенной линии влияния N_{6-7} и соединяют их передаточной прямой $6' - 7'$ (см. Рис. 2.8, г).

З а м е ч а н и е. Если усилие в стержне определяется способом моментной точки, то правая и левая прямые пересекаются под моментной точкой, где бы она не находилась.

3. Построение линии влияния усилия N_{2-6} (см. Рис. 2.8, д).

Груз справа от перерезанной панели (сечения I-I)

$$\sum M_{(K)} = 0; \quad N_{2-6} r_{2-6} - V_A \cdot c = 0;$$

$$N_{2-6}^{лев} = \frac{V_A \cdot c}{r_{2-6}} = \left(1 - \frac{z}{6d}\right) \cdot \frac{c}{r_{2-6}}$$

Груз слева от перерезанной панели (сечения I-I)

$$\sum M_{(K)} = 0; \quad N_{2-6} \cdot r_{2-6} + V_B (c + 6d) = 0;$$

$$N_{2-6}^{прав} = -\frac{V_B (c + 6d)}{r_{2-6}} = -\frac{z}{6d} \cdot \frac{(c + 6d)}{r_{2-6}}$$

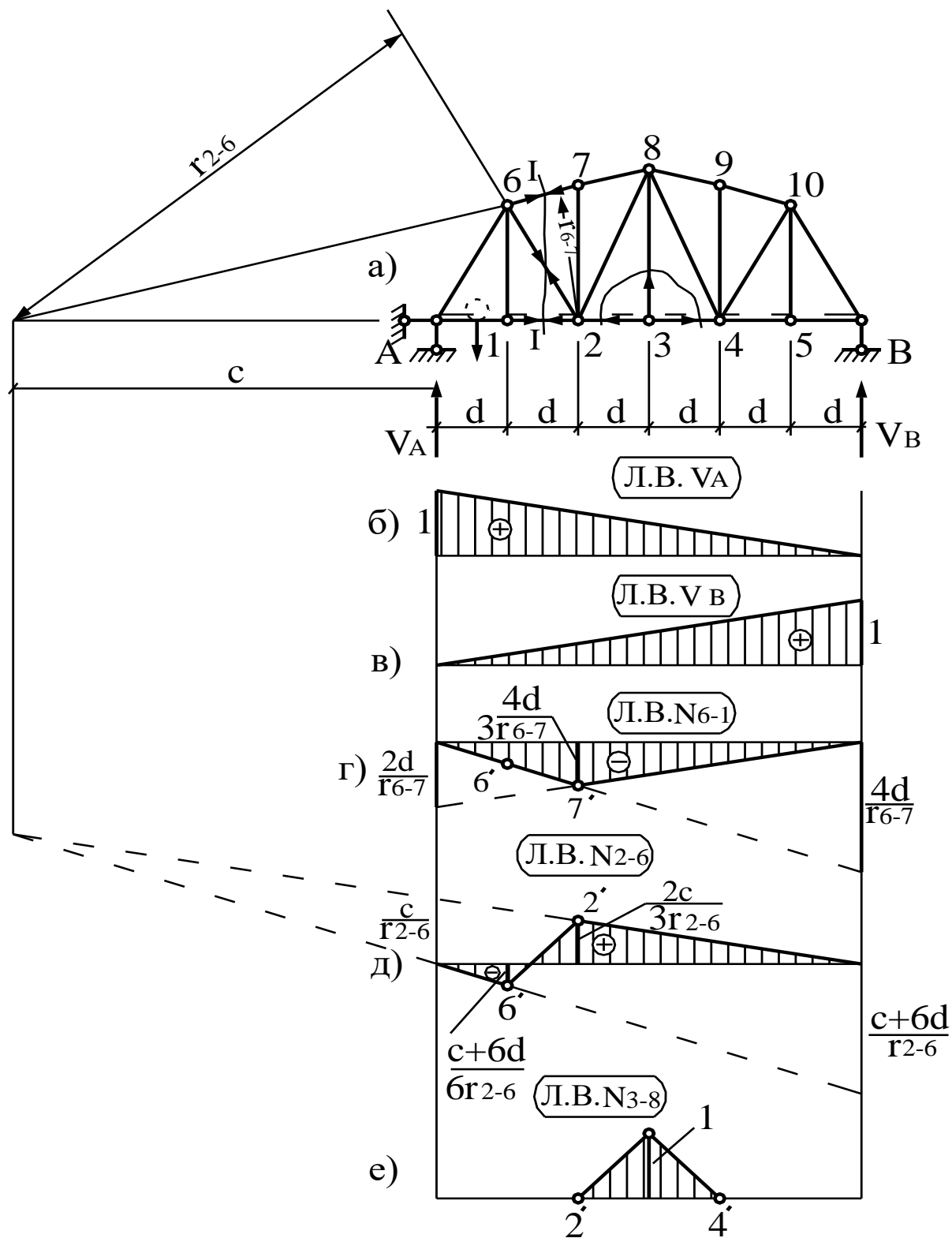


Рис. 2.8 – Построение линии влияния опорных реакций (б, в) и продольных усилий (г, д, е) в стержнях фермы (а)

$$0 \leq z \leq 6d$$

$$\text{при } z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{2-6}^{лев} = -\frac{c}{r_{2-6}}; \\ N_{2-6}^{прав} = 0 \end{array} \right. \quad \text{при } z = 6d \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{2-6}^{лев} = 0; \\ N_{2-6}^{прав} = -\frac{c + 6d}{r_{2-6}} \end{array} \right.$$

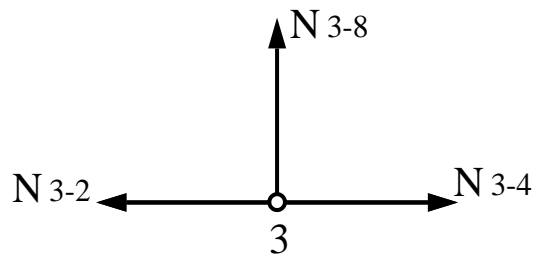
$$\text{при } z = d, \quad N_{2-6}^{прав} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(c + 6d)}{r_{2-6}} = y_6$$

$$\text{при } z = 2d, \quad N_{2-6}^{лев} = \left(1 - \frac{2d}{6d}\right) \cdot \frac{c}{r_{2-6}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{c}{r_{2-6}} = \frac{2c}{3r_{2-6}} = y_2$$

4. Построение линии влияния N_{3-8} (см. Рис. 2.8, е).

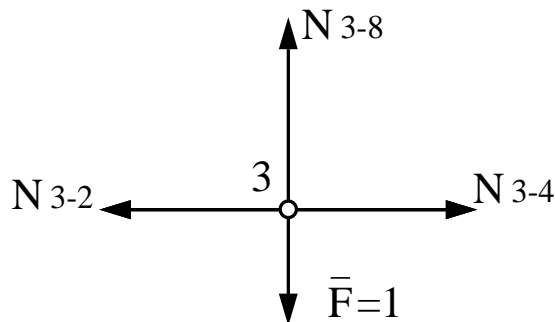
Так как через стойку 3-8 нельзя провести сечение, пересекающее три стержня, то для составления уравнения равновесия вырежем узел 3. При этом рассматриваем движение груза вне узла и положение груза в узле.

Положение груза левее и правее разрезанных панелей 2-3 и 3-4, т.е. вне узла:



$$\sum z = 0; \quad N_{3-8} = 0$$

Положение груза в узле 3



$$z = 3d$$

$$\sum z = 0; \quad N_{3-8} - 1 = 0; \quad N_{3-8} = 1$$

Следовательно, когда груз $\bar{F} = 1$ приложен в узлах 1,2,4,5, усилие $N_{3-8} = 0$. Когда груз $\bar{F} = 1$ приложен в узле 3, то $N_{3-8} = 1$. Соединяя полученные ординаты в узловых точках получим линии влияния усилия N_{3-8}

(см. Рис. 2.7, е).

Можно также составить уравнение моментов в пределах панели 2-3 или 3-4 ($0 \leq z \leq d$). Стойка работает на местную нагрузку.

П р и м е ч а н и е. Если стержень находится на консоли, то независимо от положения груза $\bar{F} = 1$ рационально рассматривать равновесие консольной части.

2.6 Определение невыгоднейшего положения нагрузки на сооружении

2.6.1 Общий критерий невыгодного положения нагрузки на сооружении для ломаной линии влияния

Выясним, как надо расположить заданную нагрузку на сооружении, чтобы заданное усилие приняло максимальное положительное или минимальное отрицательное значение.

Очевидно, что при движении только одного сосредоточенного груза

Φ_{\max} (или Φ_{\min}) возникает при совпадении груза с ординатой линии влияния y_{\max} (или y_{\min}), причем $\Phi_{\max} = Fy_{\max}$; $\Phi_{\min} = Fy_{\min}$

Также очевидно, что для определения по линии влияния F_{\max} (или F_{\min}) от системы грузов надо стремиться к тому, чтобы наиболее тяжелые грузы были расположены над y_{\max} (или y_{\min}).

При небольшом числе грузов данная задача может быть решена подбором с помощью пробных установок заданной системы грузов.

Выполнив ряд установок системы грузов и определив усилия Φ от каждой установки строят график зависимости $\Phi = f(z)$ (см. Рис. 2.9).

То положение подвижной нагрузки, при котором значение исследуемого фактора принимает наибольшее (в алгебраическом смысле) значение ($\Phi = \Phi_{\max}$) называется **невыгоднейшим** или **"опасным"**.

Указанный путь отыскания невыгоднейшего положения нагрузки является громоздким и поэтому не применяется.

Решение поставленной задачи упрощается при помощи теоремы, устанавливающей критерий невыгоднейшего положения на сооружении системы сосредоточенных грузов.

Теорема: невыгодное положение системы сосредоточенных грузов относительно линии влияния, имеющей очертание ломаной линии, возможно только при условии нахождения одного из грузов над к.-л. вершиной линии влияния.

При $z = z_1$ значение усилия Φ составит

$$\Phi = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 \quad (2.1)$$

Пусть при $z = z'$ нагрузка займет невыгодное положение, т.е. $\Phi = \Phi_{\max 1}$ (достигнет местного максимума). При этом в общем случае будут иметь место следующие соотношения, известные из математики и выражающие собой достаточные условия существования \max и \min функции:

а) если при $z < z_1$ (смещение грузов влево на dz)

$$d\Phi/dz > 0, \text{ а при } z > z_1 \text{ (смещение грузов вправо на } dz)$$

$$d\Phi/dz < 0, \text{ то при, } z = z_1, \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max 1};$$

б) если при $z < z_1$ $d\Phi/dz < 0$, а при $z > z_1$ $d\Phi/dz > 0$,

то при $z = z_1, \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max 1}$

положения нагрузки, сводится к определению производной $d\Phi/dz$ и отысканию условия, при котором она меняет свой знак с " \oplus " на " \ominus " или наоборот.

Сдвинем систему грузов вправо на dz , так чтобы ни один из грузов не переместился из своего участка в соседний. При этом усилие Φ составит $\Phi + d\Phi = R_1(y_1 + dy_1) + R_2(y_2 + dy_2) + R_3(y_3 + dy_3)$ (2.1)

Вычитая почленно из (2.2) выражение (2.1), получим

$$d\Phi = R_1 dy_1 + R_2 dy_2 + R_3 dy_3 \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Из рисунка видно, что:} \\ dy_1 = dz \cdot \operatorname{tg} \alpha_1; \\ dy_2 = dz \cdot \operatorname{tg} \alpha_2; \\ dy_3 = dz \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Здесь $dy_1 > 0$, так как $dz > 0$ и $\alpha_1 > 0$;

$dy_2 < 0$, и $dy_3 < 0$, так как $dz > 0$ и $\alpha_2 < 0, \alpha_3 < 0$

Подставим (2.4) в (2.3)

$$d\Phi = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 dz + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 dz + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 dz$$

$$d\Phi = (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3) dz,$$

$$\text{откуда } \frac{d\Phi}{dz} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3.$$

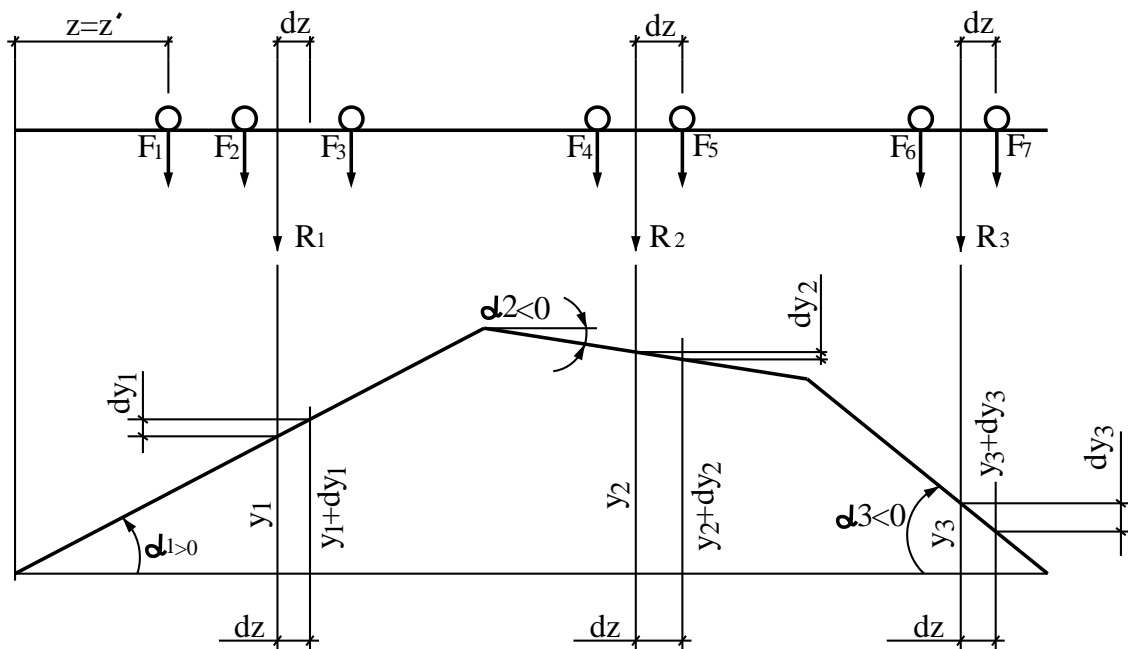


Рис. 2.9 – График к выбору определения "опасного" положения подвижной нагрузки

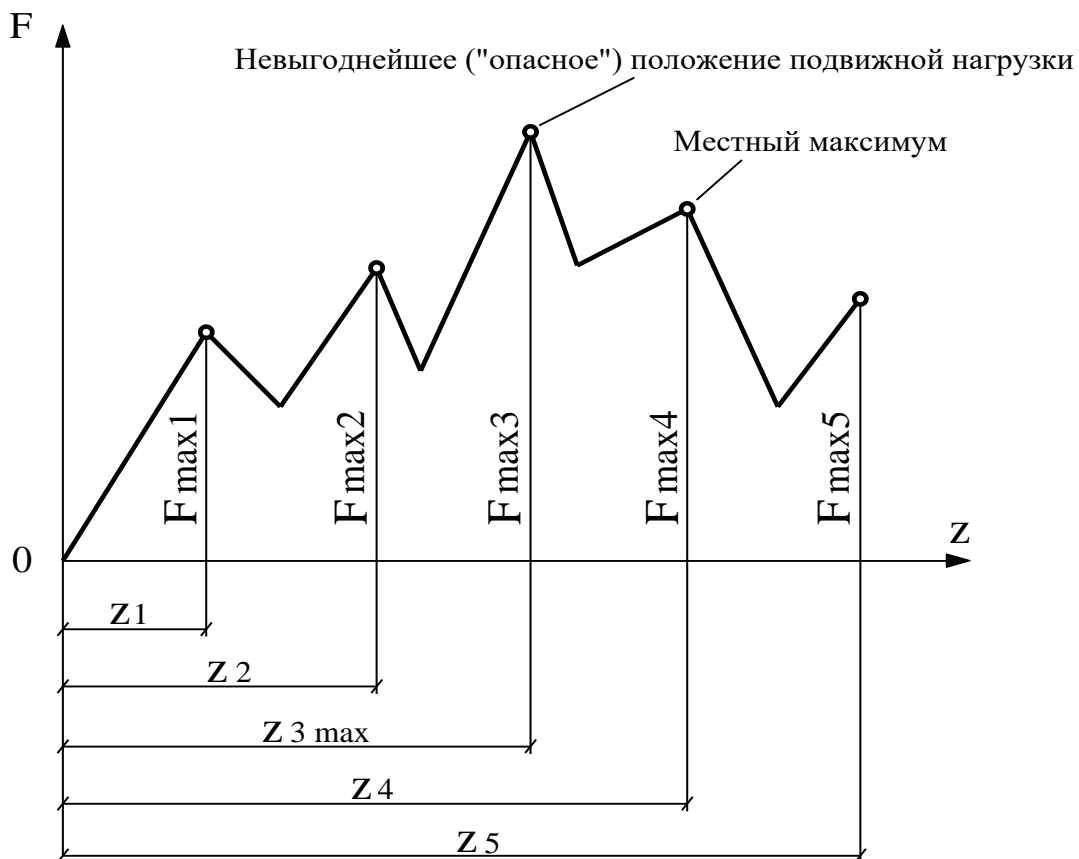


Рис. 2.10 – Схема к определению опасного положения подвижной нагрузки при ломаном очертании линии влияния

Распространяя данный вывод на линии влияния с числом узлов n ,

получим

$$\frac{d\Phi}{dz} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + R_i \operatorname{tg} \alpha_i + \dots + R_n \operatorname{tg} \alpha_n,$$

или

$$\frac{d\Phi}{dz} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$$

Аналитические условия существования $S_{\max 1}$ и $S_{\min 1}$ запишем в следующем виде:

а) если $z < z_1$ (смещение влево)

$$\overleftarrow{\sum} R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0 \quad (2.5)$$

И при $z > z_1$ (смещение вправо)

$$\overrightarrow{\sum} R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0, \quad (2.6)$$

то при $z = z_1$ $\Phi = \Phi_{\max 1}$;

б) если при $z < z_1$ $\overleftarrow{\sum} R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0$, (2.7)

а при $z > z_1$ $\overrightarrow{\sum} R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0$, (2.8)

то при $z = z_1$ $\Phi = \Phi_{\min 1}$.

Изменение величины производной $\frac{d\Phi}{dz} = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ и ее знака воз-

можны только за счет изменения значения равнодействующих R_1, R_2, \dots, R_n , что в свою очередь возможно лишь в результате перемещения хотя бы одного груза из одного участка линии влияния в другой. В этом случае всегда существует такое положение груза, при котором он располагается над одной из вершин линии влияния, что и требовалось доказать.

Таким образом, задача, связанная с нахождением невыгодного положения системы связанных грузов решена.

Груз, установленный над вершиной линии влияния, которому соот-

ответствует невыгодное положение нагрузки ($\Phi = \Phi_{extr}$) называют **критическим** (F_{cr}).

Данная теорема устанавливает лишь необходимый, но недостаточный критерий невыгодного положения нагрузки, т.к. она не дает указания какой именно груз и над какой вершиной линии влияния должен быть установлен, чтобы вся система грузов занимала невыгодное положение. Окончательное решение этого вопроса выполняется способом последовательных пробных установок нагрузки.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть отыскиваем Φ_{max} и при первой установке получили, что условия (2.5) и (2.6) не удовлетворяются:

а) если при смещении влево $\overleftarrow{\sum} R_i tg \alpha_i < 0$,

то нагрузку перемещают влево до тех пор пока $\overleftarrow{\sum} R_i tg \alpha_i > 0$;

б) если при смещении вправо $\overrightarrow{\sum} R_i tg \alpha_i > 0$,

то нагрузку перемещают вправо пока $\overrightarrow{\sum} R_i tg \alpha_i < 0$.

2. Пусть требуется найти Φ_{min} и при первой установке условия (2.7) и (2.8) не удовлетворяются:

а) если при смещении влево $\overleftarrow{\sum} R_i tg \alpha_i > 0$,

то нагрузку перемещают влево пока $\overleftarrow{\sum} R_i tg \alpha_i < 0$;

б) если при смещении вправо $\overrightarrow{\sum} R_i tg \alpha_i < 0$

то нагрузку перемещают вправо пока $\overrightarrow{\sum} R_i tg \alpha_i > 0$.

Если линия влияния имеет не одну, а несколько вершин (Рис. 2.10), то сначала надо найти невыгодное положение нагрузки для каждой из них, поочередно располагая над ними грузы и выполняя проверку условий (2.5)

и (2.6) или (2.92) и (2.7). Затем соответственно найденным невыгодным положениям нагрузки вычисляют, Φ_{\max} , $\Phi_{\min 2}$, ... и из всех этих значений принимают Φ_{\max} , соответствующее невыгоднейшему ("опасному") положению нагрузки.

2.6.2 Определение критического груза для линии влияния треугольного очертания

Выражение для производной имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dz} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2,$$

где R_1, R_2 – равнодействующие групп сил над левой и правой ветвями линии влияния. Критическим грузом будет тот, при сдвиге которого с вершины линии влияния на величину dz влево или вправо выполняются условия (2.5), (2.6) или (2.7), (2.8).

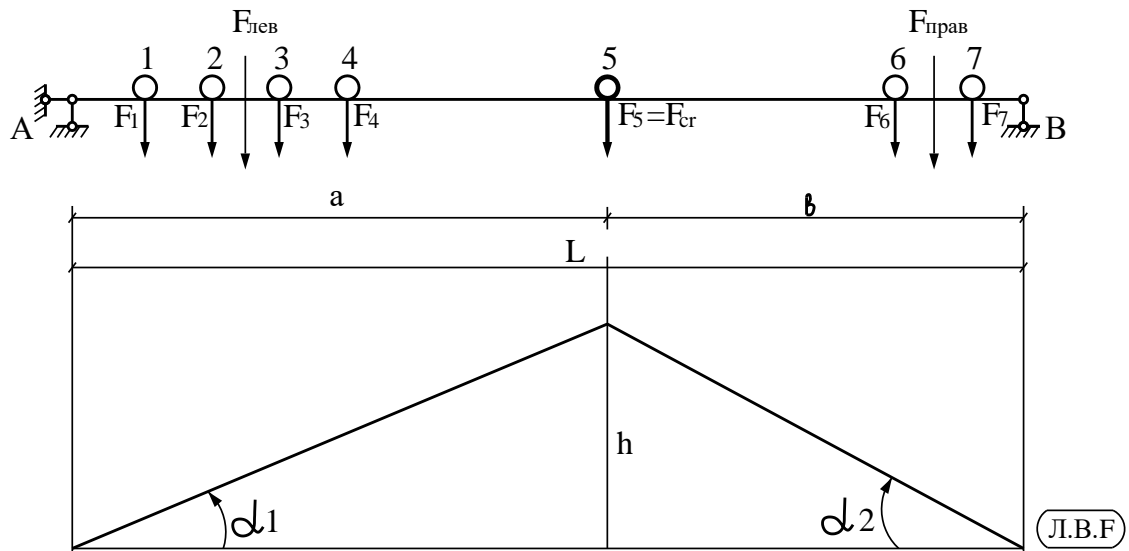


Рис. 2.11 – Схема к определению опасного положения подвижной нагрузки при треугольном очертании линии влияния

Пусть F_{cr} сдвинут влево:

$$R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 > 0,$$

где $R_1 = R_{лев} + F_{cr}$; $R_2 = R_{прав}$,

здесь $R_{лев}$ и $R_{прав}$ – равнодействующие сил, находящиеся левее и правее F_{cr} .

Тогда
$$(R_{лев} + F_{cr}) \operatorname{tg} \alpha_1 + R_{прав} \operatorname{tg} \alpha_2 > 0,$$

Но $tg\alpha_1 = h/a$ и $tg\alpha_2 = -h/a$.

Тогда $(R_{лев} + F_{cr})h/a - R_{np}h/v > 0$

Или $(R_{лев} + F_{cr})/a > R_{np}/v$. (2.9)

При смещении F_{cr} вправо будем иметь

$$R_1 = R_{лев}; R_2 = R_{np} + F_{cr}.$$

При этом должно быть

$$R_1 tg\alpha_1 + R_2 tg\alpha_2 < 0, \text{ или } R_{лев}h/a - (R_{np} + F_{cr})h/v < 0$$

и $R_{лев}/a < (R_{np} + F_{cr})/v$. (2.10)

Преобразуем выражения (2.9) и (2.10), для чего прибавим к обеим частям выражения (2.9) по $(R_{лев} + F_{cr})/v$,

тогда

$$(R_{лев} + F_{cr})/a + (R_{лев} + F_{cr})/v > (R_{np} + R_{лев} + F_{cr})/v,$$

$$(R_{лев} + F_{cr})/(v+a)/(av) > R/v,$$

$$(R_{лев} + F_{cr})/a > R/L,$$

$$R_{лев} + F_{cr} > R \frac{a}{L}. \quad (2.11)$$

Где: $R = R_{np} + R_{лев} + F_{cr}$ – равнодействующая всех сил, расположенных над линией влияния.

К обеим частям (2.10) прибавим по $R_{лев}/v$

$$R_{лев}/a + R_{лев}/v < (R_{np} + F_{cr})/v + R_{лев}/v,$$

$$R_{лев} < R \frac{a}{L}. \quad (2.12)$$

Неравенства (2.9) и (2.11) показывают, что критическим будет тот груз, который, складываясь с суммой левых грузов (т.е. тех, которые расположены левее F_{cr}), делает левую часть неравенства больше произведения их средней погонной пролетной нагрузки R/L на длину a левого участка линии влияния, а сумму одних левых грузов – меньше того же произведения $R \frac{a}{L}$.

Применительно к (2.10) и (2.12): критическим грузом будет тот, который в сумме с нагрузкой справа делает среднюю нагрузку на правом участке больше средней нагрузки левого участка и наоборот.

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

3.1 Работа внешних сил

Определение перемещений необходимо при расчете конструкций на жесткость. Кроме того, с определением перемещений тесно связан расчет статически неопределимых систем (С.Н.С.). Поэтому изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из важных задач строительной механики.

Работа силы F равна (см. Рис. 3.1, а)

$$A = FAA_2 = F(AA_1 \cos \alpha) = F\Delta$$

Работа момента M составляет (см. Рис. 3.1, б)

$$A = M\varphi$$

Если направление поворота совпадает направлением момент M , то работа считается положительной ($A > 0$).

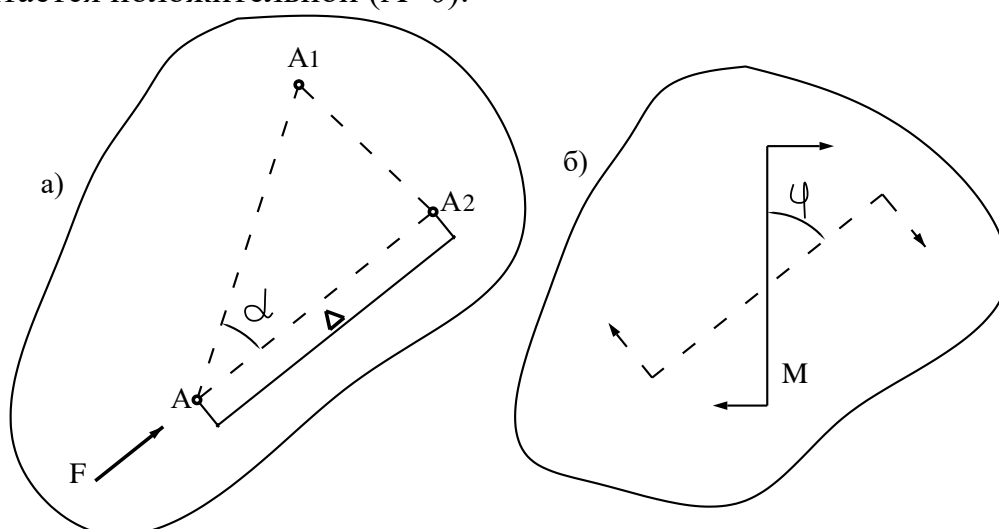


Рис. 3.1 – Схемы к определению работы силы F (а) и момента M (б)

При деформировании конструкции ее точки перемещаются. Перемещаются также точки приложения внешних сил. В результате этого внешние силы совершают работу (см. Рис. 3.2).

Элементарная работа внешней силы

$$dA = (F + dF)d\Delta \approx Fd\Delta.$$

Полная работа обобщенной силы

$$A = \int_{\Delta} Fd\Delta. \quad (3.1)$$

Для линейно деформируемых систем справедлив закон Гука

$$\Delta = F\delta_{FF}, \quad (3.2)$$

где δ_{FF} – перемещение, вызванное единичной силой $\bar{F} = 1$.

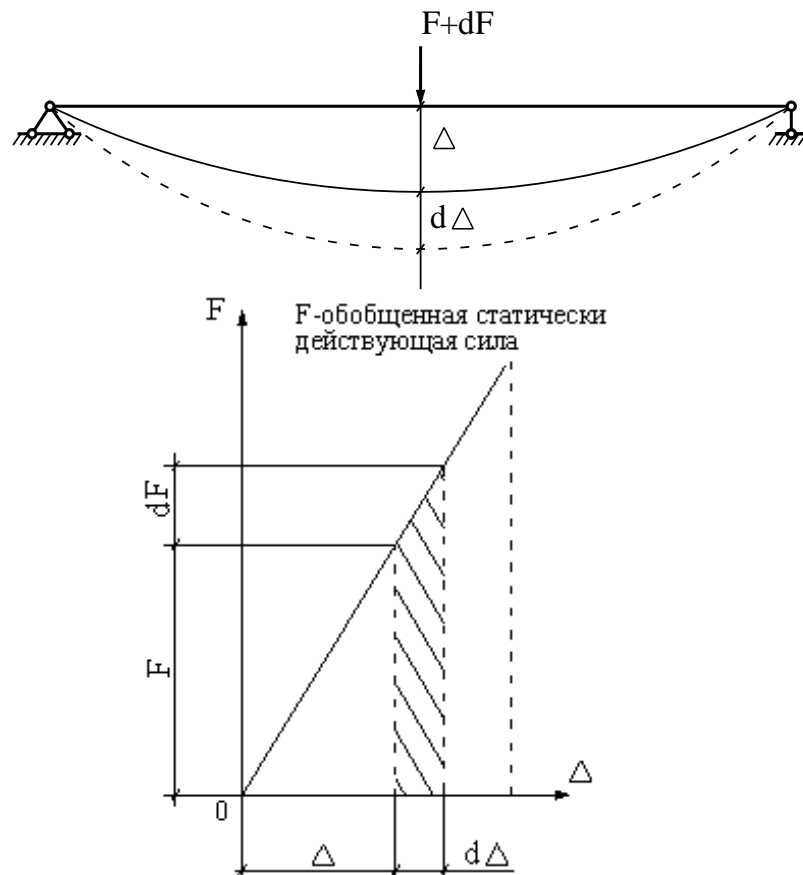


Рис. 3.2 – Схемы к определению работы силы F

Продифференцируем выражение (3.2)

$$d\Delta = dF \delta_{FF},$$

и подставив в (3.1), получим

$$A = \delta_{FF} \int_0^F F dF = \frac{\delta_{FF} F^2}{2}.$$

Учитывая (3.2) найдем

$$A = \frac{\delta_{FF} F^2}{2} = \frac{F\Delta}{2} \quad (3.3)$$

Таким образом, действительная работа при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего ей обобщенного перемещения (теорема Клапейрона).

В случае статического действия нескольких сил работа составляет

$$A = \frac{1}{2} = \sum F_i \Delta_i$$

и не зависит от порядка нагружения системы.

Работу называют **действительной**, если ее совершают данные силы в процессе деформирования сооружения на перемещениях, вызванных этими же силами.

Работу называют **возможной**, если ее совершают действующие на сооружение силы постоянной величины и неизменного направления на перемещениях, созданных другими силами или иными причинами (см. Рис. 3.3.).

При достижении силой F_1 конечного значения она совершит на перемещении Δ_{11} действительную работу (см. Рис. 3.3, а)

$$A_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2.$$

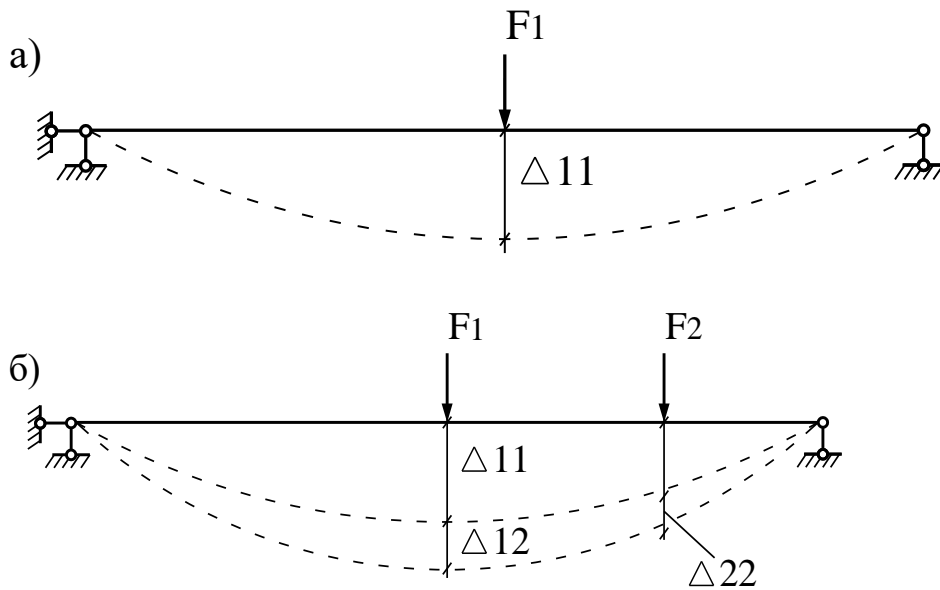


Рис. 3.3 – Схемы к определению действительной (а) и возможной (б) работы силы

Если к балке приложить F_2 , то по направлению F_1 возникает дополнительное перемещение Δ_{12} , на котором F_1 , оставаясь постоянной (то есть перемещение Δ_{12} не зависит от F_1), совершит дополнительную работу

$$A_{12} = F_1 \Delta_{12}.$$

Таким образом, A_{12} является возможной работой F_2 на перемещении, вызванном по ее направлению F_2 .

Изменим порядок приложения сил. В этом случае возможная работа A_{21} силы F_2 на перемещении по ее направлению, вызванном F_1 составит

$$A_{21} = F_2 \Delta_{21}.$$

3.2 Работа внутренних сил

Рассмотрим два состояния системы («а» и «б») и определим работу внутренних сил состояния «а» на перемещениях состояния «б» (Рис. 3.4).

3.2.1 Применение начала возможных перемещений к упругим системам

Начало возможных перемещений, являясь общим принципом механики, имеет важнейшее значение для теории упругих систем: *если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равна нулю то есть*

$$\sum F_i \Delta_{ik} + A_{ik} = 0,$$

где $\sum F_i \Delta_{ik}$ – работа внешних сил;

A_{ik} – работа внутренних сил.

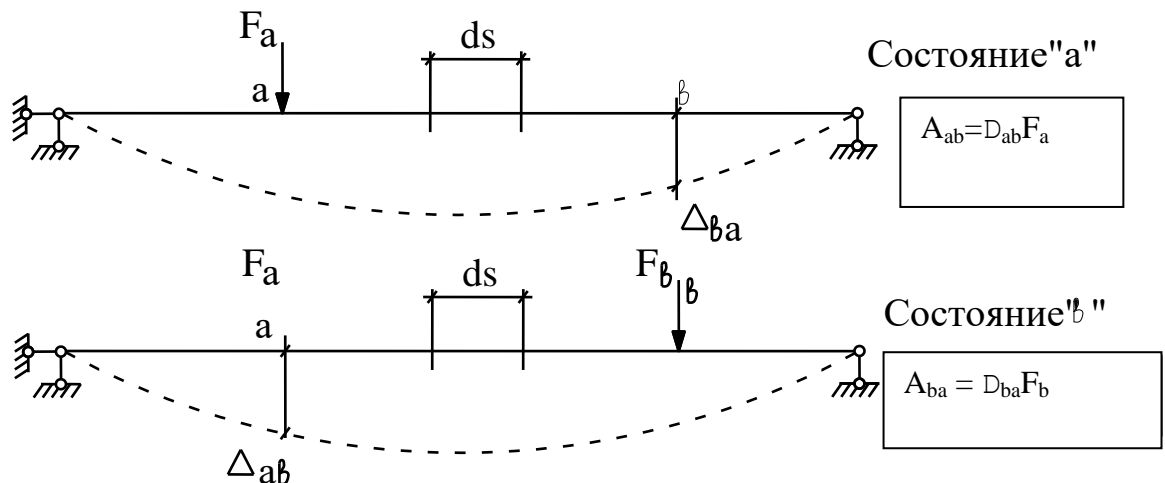


Рис. 3.4 – Схемы к определению работы на возможных перемещениях

Внутренние силы препятствуют развитию деформации, вызываемой внешними силами, равны им по величине и обратны по направлению (штриховые линии, см. Рис. 3.5).

Учитывая направления внутренних сил по отношению к деформации, вызванной внешними силами, можно утверждать, что при нагружении тела суммарная работа внутренних сил всегда отрицательна.

Усилия N , Q и M являются внутренними по отношению к целому стержню, а для выделенного элемента внешними. Поэтому работа A может быть получена как интегральная сумма работ, совершенных статически возрастающими усилиями N , Q и M на соответствующих деформациях элемен-

тов dS . Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элементы dS .

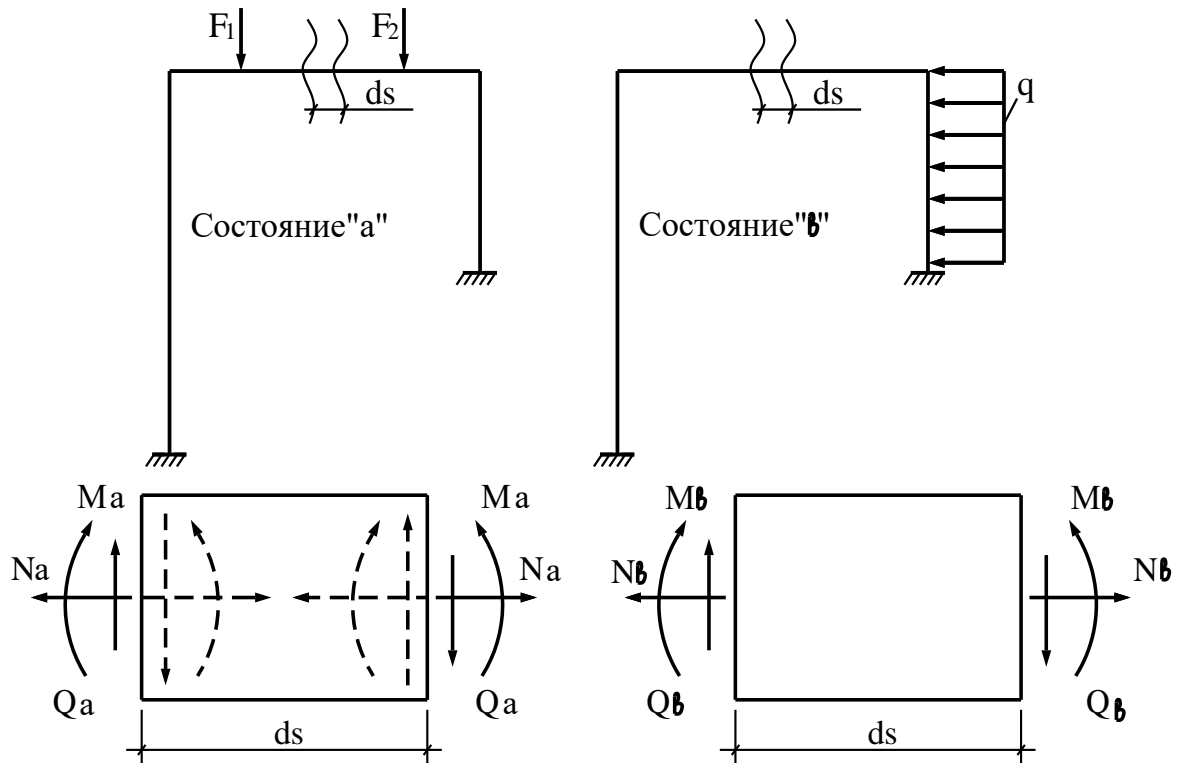


Рис. 3.5 – Схемы к определению работы внутренних сил

3.2.2 Возможная работа внутренних продольных сил

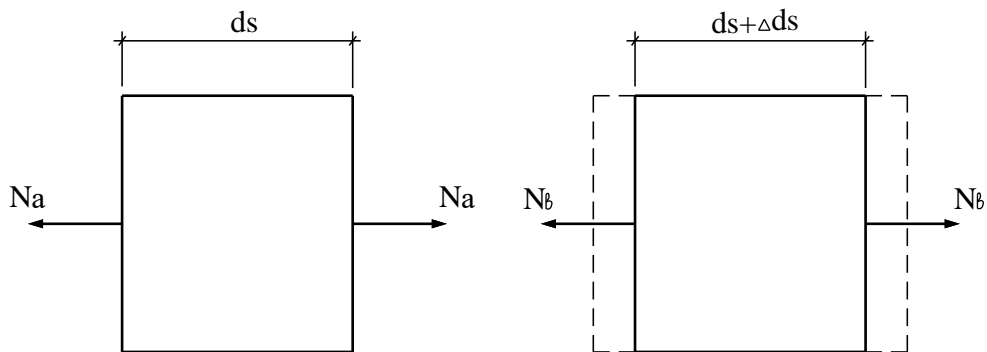


Рис. 3.6 – Схемы к определению работы внутренних продольных сил

Удлинение элемента от действия усилия N_e составит (Рис.3.6):

$$(\Delta dS)_e = \frac{N_e dS}{EA}$$

Элементарная возможная работа внутренних продольных сил N_a в состоянии «а» на возможных перемещениях ΔdS состояния «в»:

$$dA_{av}^N = -\frac{N_a N_\epsilon}{EA} dS = -N_a (\Delta dS)_\epsilon.$$

3.2.3 Возможная работа внутренних изгибающих моментов

Внешнему моменту M_ϵ , действующему на элемент dS в состоянии «в», соответствует перемещение поперечных сечений, определяемое углом их взаимного поворота

$$(d\phi)_\epsilon = \frac{dS}{\rho} = \frac{M_\epsilon dS}{EI}.$$

Элементарная возможная работа внутренних моментов M_a на возможном перемещении $d\phi$ равна

$$dA_{av}^M = -M_a \frac{M_\epsilon dS}{EI} = -M_a (d\phi)_\epsilon.$$

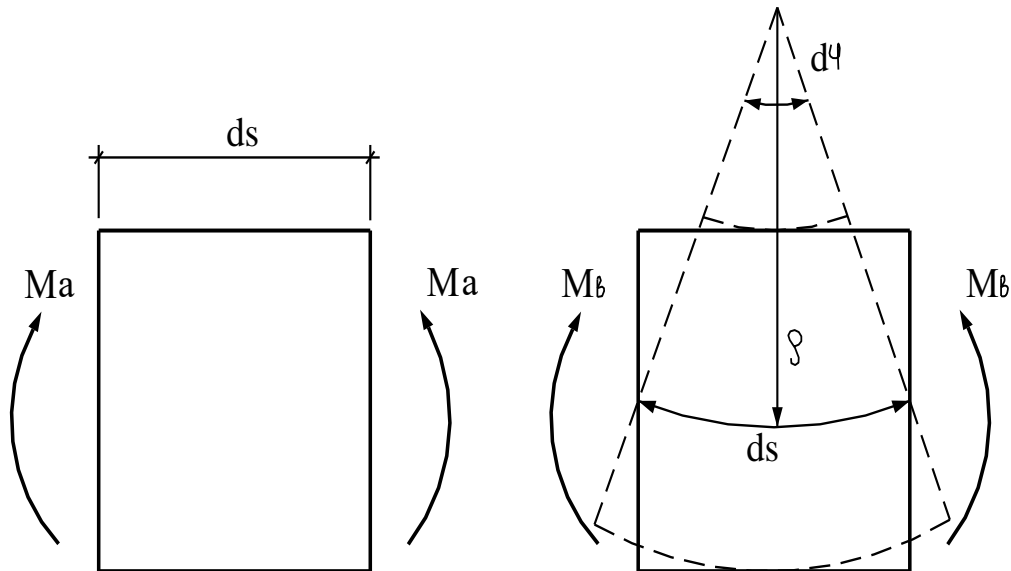


Рис. 3.7 – Схемы к определению работы внутренних изгибающих моментов

3.2.4 Возможная работа внутренних поперечных сил

На Рис.3.8 Q_ϵ – равнодействующая касательных напряжений: τdA .

Внешней силе Q_ϵ , действующей на элемент dS в состоянии «в», соответствует перемещение сдвига, определяемое углом γ .

Внутреннее усилие в состоянии «а» на части поперечного сечения выделенного элемента dS заштрихованной элементарной площадке

$$\tau_a dA = \frac{Q_a S}{eI} dA,$$

где S – статический момент части поперечного сечения, расположенной выше исследуемого уровня, относительно нейтральной линии (Н.Л.);
 e – ширина сечения в исследуемом уровне;
 I – момент инерции всего поперечного сечения относительно Н.Л.

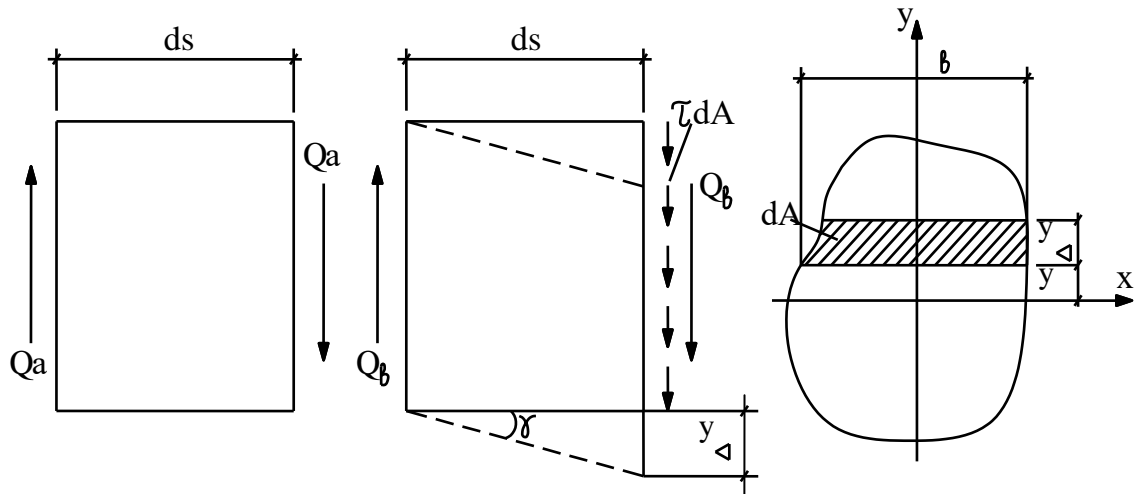


Рис. 3.8 – Схемы к определению работы внутренних поперечных сил
 Линейные перемещения этой площади в состоянии «в» (взаимный сдвиг граней элемента от Q_e ,)

$$\Delta_y = (\gamma dS)_e = \frac{\tau_e}{G} dS = \frac{Q_e S}{eIG} dS.$$

Возможная работа внутренних сил Q_a , действующих на выделенной площадке, на перемещениях состояния «в»

$$dA_{as}^Q = -\tau_a dA \Delta_y = -\frac{Q_a S dA}{eI} \cdot \frac{Q_e S}{G e I} dS = -\frac{Q_a Q_e dS}{G} \cdot \frac{1}{I^2} \cdot \frac{S^2}{e^2} dA.$$

или

$$dA_{as}^Q = -\eta \frac{Q_a Q_e}{GA} dS,$$

где η – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по поперечному сечению, равный

$$\eta = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{e^2} dA.$$

Например, для прямоугольного сечения площадь поперечного сечения, осевой момент инерции и статический момент площади соответственно равны

$$A = e \cdot h; \quad I = e h^3 / 12; \quad S = \frac{e}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{2} - y^2 \right)$$

Тогда для прямоугольного сечения $\eta = 1, 2$;

При одновременном действии на элемент dS усилий N , Q и M работа каждой из этих сил на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Поэтому полная работа составит

$$dA = -dA_{av}^N - dA_{av}^M - dA_{av}^Q = -N_a \frac{N_\varepsilon}{EA} dS - M_a \frac{M_\varepsilon}{EI} dS - Q_a \frac{Q_\varepsilon}{GA} \eta dS.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах длины L каждого стержня, а затем, суммируя по всем стержням, получим выражение для вычисления полной возможной работы всех внутренних сил системы

$$A_{av} = -\sum \int_0^L N_a \cdot \frac{N_\varepsilon}{EA} dS - \sum \eta \int_0^L Q_a \frac{Q_\varepsilon}{GA} dS - \sum \int_0^L M_a \frac{M_\varepsilon}{EI} dS.$$

В данном случае применим принцип суперпозиции.

3.3 Действительная работа внутренних сил. Потенциальная энергия

Если внешние силы действуют статически, то вызванные ими внутренние силы возрастают от нуля. Когда внутренние силы состояния «а» производят работу на перемещениях того же состояния, их величина в процессе деформации системы также увеличивается постепенно от нуля до конечных значений N_a , Q_a и M . Поэтому выражение действительной работы внутренних сил должно иметь в знаменателе 2.

Принимая $N_a = N_\varepsilon$, $Q_a = Q_\varepsilon$, $M_a = M_\varepsilon$ и вводя множитель $\frac{1}{2}$ получим значение действительной работы внутренних сил

$$A_{aa} = \sum \int_0^L \frac{N_a^2}{2EA} dS + \sum \eta \int_0^L \frac{Q_a^2}{2GA} dS + \sum \int_0^L \frac{M_a^2}{2EI} dS.$$

На основании закона сохранения энергии можно считать, что вся работа A внешних сил равна потенциальной энергии деформации системы W

(W накапливается в теле по мере роста деформаций, вызванных действием нагрузки; упругое тело как бы обладает способностью запастись энергией, создаваемую внешними силами; в процессе разгрузки тела W проявляется в виде работы, совершаемой внутренними силами:

N , Q и M), то есть

$$A = -W.$$

Подставив в это равенство выражение A получим:

$$W = \sum \int_0^L \frac{N_a^2}{2EA} dS + \sum \eta \int_0^L \frac{Q_a^2}{2GA} dS + \sum \int_0^L \frac{M_a^2}{2EI} dS.$$

К потенциальной энергии деформации системы W неприменим закон

независимости действия сил, поскольку она является квадратичной формой относительно внутренних силовых факторов:.

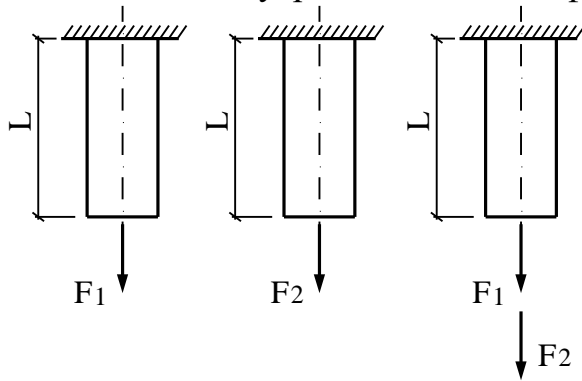


Рис. 3.9 – Схемы к определению потенциальной энергии системы

$$W_1 = \frac{F_1^2 L}{2EA}; \quad W_2 = \frac{F_2^2 L}{2EA};$$

$$W_3 = \frac{(F_1 + F_2)^2 L}{2EA} = \frac{F_1^2 L}{2EA} + \frac{F_2^2 L}{2EA} + \frac{F_1 F_2 L}{EA}$$

Тогда

$$W_1 + W_2 \neq W_3,$$

так как

$$W_3 = W_1 + W_2 + \frac{F_1 F_2 L}{EA}$$

Слагаемое $\frac{F_1 F_2 L}{EA}$ представляет собой дополнительную работу силы

F_1 на перемещении по ее направлению, вызванной F_2 .

Потенциальная энергия деформации системы W не зависит от последовательности нагружения.

Пример 1. Определить величину W для балки $b \times h$.

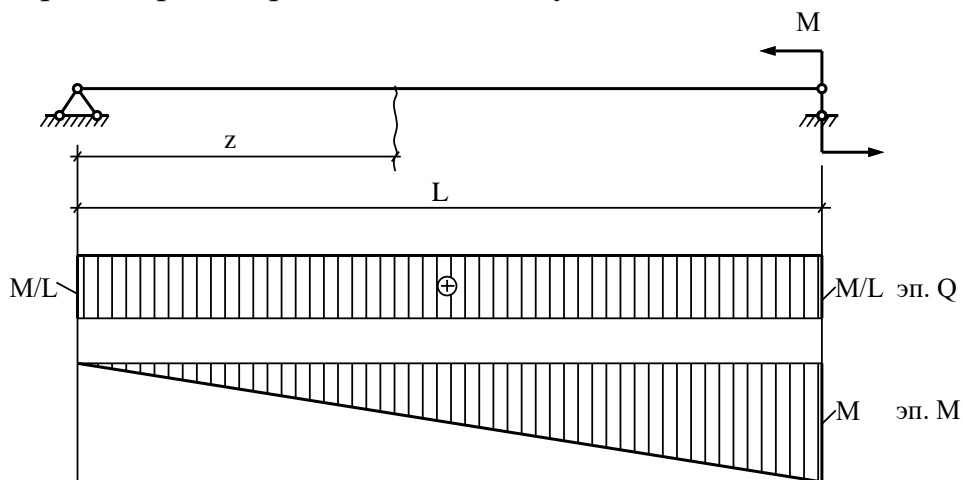


Рис. 3.10 – Схемы к определению потенциальной энергии балки

Подставим значения N, Q и M , в выражение для W

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dz + \int_0^L \eta \frac{Q^2}{2GA} dz + 0 = \frac{M^2}{2L^2 EI} \int_0^L z^2 dz + \frac{M^2}{2LGE} \eta \int_0^L dz =$$

$$= \frac{M^2}{2L^2} \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{\eta L}{GA} \right) = \frac{M^2}{2L} \cdot \left(\frac{L^2}{3EI} + \frac{\eta}{GA} \right).$$

Определим, насколько существенно влияние поперечных сил Q на W , для чего подставим $G = 0,4E$, $A = b \times h$, $I = bh^3 / 12$ и $\eta = 1,2$:

$$W = \frac{M^2}{2L} \left(\frac{L^2}{3E \cdot bh^3 / 12} + \frac{1,2}{0,4E \cdot bh} \right) = \frac{2M^2 L}{Ebh^3} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right].$$

Второй член в квадратных скобках характеризует влияние Q ; чем больше h/L , тем это влияние существеннее. При $h/L = 1/5$ (большее отношение встречается редко)

$$W = \frac{2M^2 L}{Ebh^3} (1 + 0,03),$$

то есть влияние Q оценивается в 3%. При обычно встречающихся размерах балок это влияние еще меньше.

3.4 Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Теорема: *Возможная работа группы сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных группой сил второго состояния, равна возможной работе группы сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных группой сил первого состояния.*

Приложим сначала к балке статически действующую на нее силу F_1 .

Эта сила совершит на перемещении Δ_{11} действительную работу

$$A_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2.$$

Затем к уже изогнутой балке статически приложим F_2 . Прогиб под F_2 возрастет на Δ_{22} . При этом F_2 совершит действительную работу

$$A_{22} = F_2 \Delta_{22} / 2.$$

В то же время F_1 , оставаясь постоянной, совершит возможную работу на перемещении Δ_{12}

$$A_{12} = F_1 \Delta_{12}.$$

Полная работа сил F_1 и F_2 будет равна

$$A' = A_{11} + A_{22} + A_{12} = F_1 \Delta_{11} / 2 + F_2 \Delta_{22} / 2 + F_1 \Delta_{12}.$$

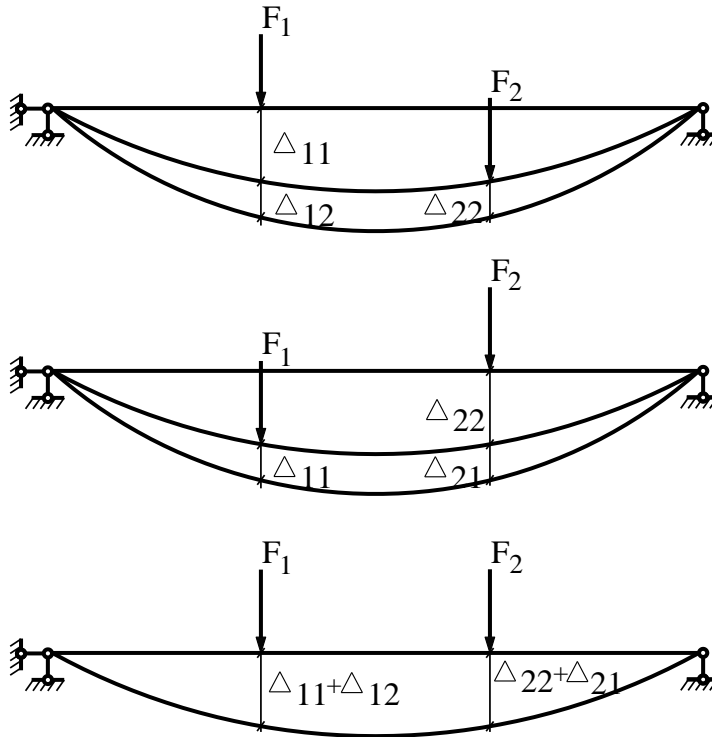


Рис. 3.11 – Схемы к доказательству теоремы о взаимности работ

Изменив порядок приложения F_1 и F_2 найдем

$$A'' = F_2 \Delta_{22} / 2 + F_1 \Delta_{11} / 2 + F_2 \Delta_{21}$$

Полную работу сил F_1 и F_2 можно найти и следующим образом

$$A''' = F_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12}) / 2 + F_2 (\Delta_{22} + \Delta_{21}) / 2$$

Так как от порядка приложения сил величина полной работы не меняется, то приравниваем $A' = A'' = A'''$

$$\frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_1 \Delta_{12} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + F_2 \Delta_{21},$$

Откуда

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}$$

Или

$$A_{12} = A_{21}.$$

3.5 Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла)

Теорема: Перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению

второй единичной силы, вызванному первой силой.

Рассмотрим два единичных состояния системы.

Перемещения, вызванные единичными силами (F или M) обозначим через δ .

На основании теоремы о взаимности работ

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21},$$

но так как $F_1 = F_2 = 1$

то $\delta_{12} = \delta_{21}$.

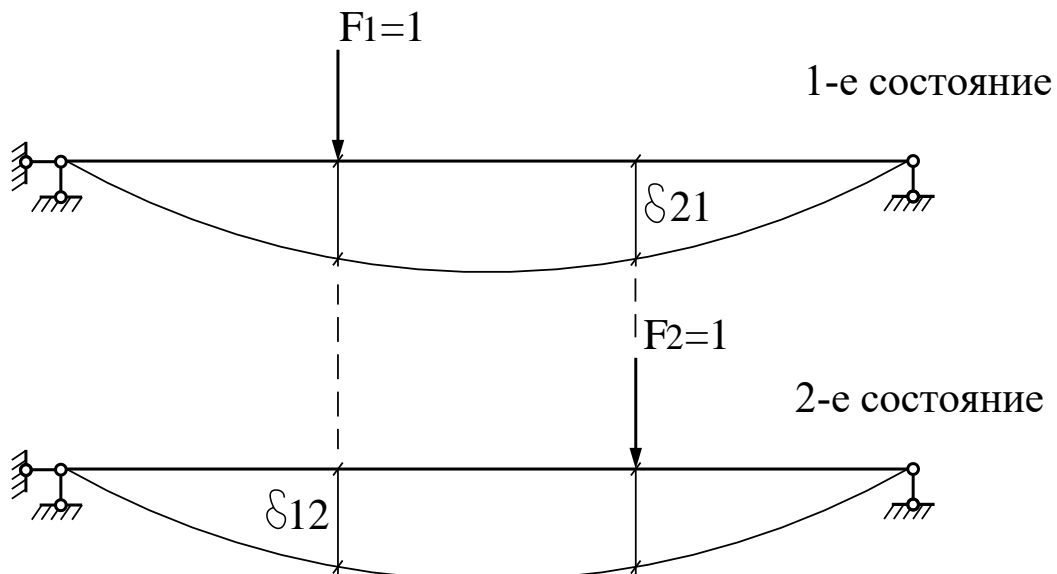


Рис. 3.12 – Схемы к доказательству теоремы о взаимности перемещений

Ниже будут доказаны и другие основные теоремы – теоремы Рэлея.

3.6 Формула для определения перемещений в стержневых системах (строка О. Мора)

Пусть требуется найти вертикальное перемещение произвольного сечения балки от силы F_F (см. Рис. 3.13).

Сила \bar{F}_i совершит возможную работу A_{iF} на перемещении Δ_{iF} по ее направлению, вызванное F_F

$$A_{iF} = \bar{F}_i \Delta_{iF} = 1 \cdot \Delta_{iF} = \Delta_{iF}.$$

Выразив A_{iF} через внутренние усилия в стержнях системы (в балке), получим

$$\Delta_{iF} = A_{iF} = \sum \int_0^L \bar{N}_i \frac{N_F}{EA} dS + \sum \int_0^L \eta \bar{Q}_i \frac{Q_F}{GA} dS + \sum \int_0^L \bar{M}_i \frac{M_F}{EI} dS,$$

где N_F, Q_F и M_F – N, Q и M в рассматриваемом сечении от заданной нагрузки;

\bar{N}_i, \bar{Q}_i и \bar{M}_i – N, Q и M в рассматриваемом сечении от единичной нагрузки ($\bar{F}_i = 1$ или $\bar{M}_i = 1$), приложенной по направлению искомого перемещения.

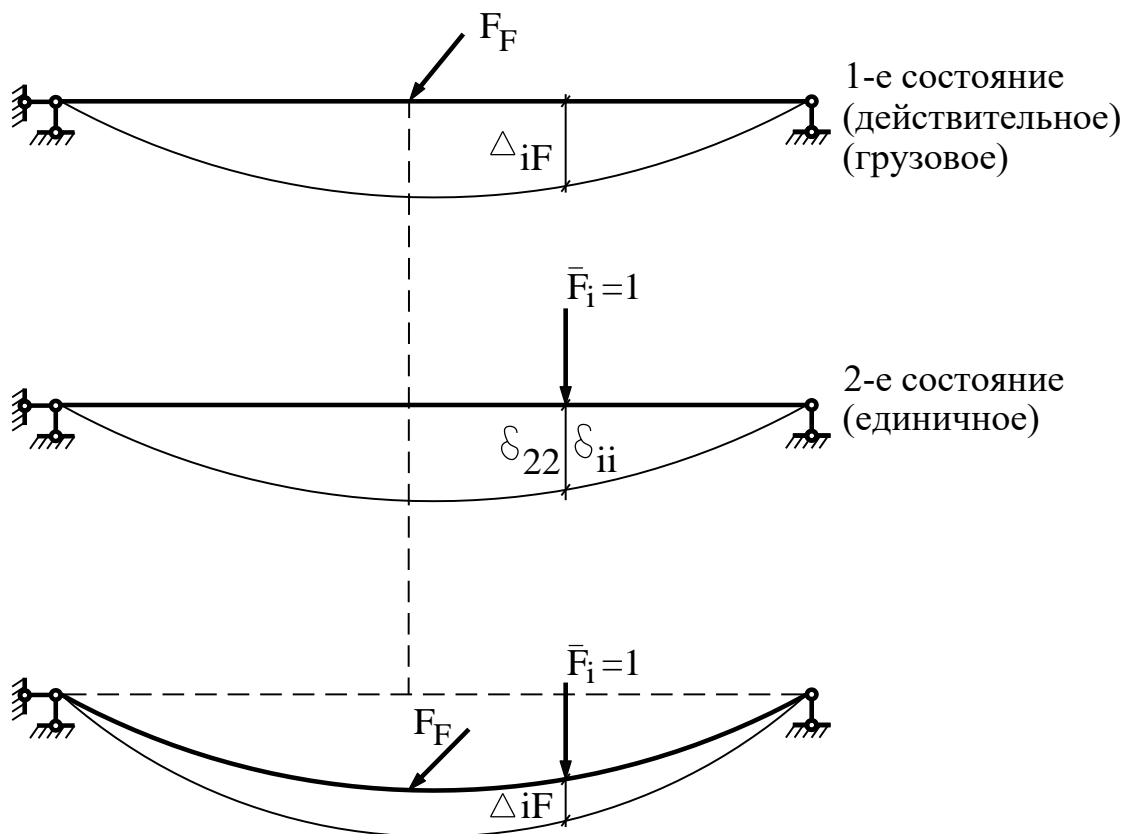


Рис. 3.13 – Схема к выводу формулы О. Мора

Перемещения в системах с преобладанием изгиба определяют по формуле

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^L \bar{M}_i \frac{M_F}{EI} dS.$$

Влиянием N и Q на перемещения в данных системах пренебрегают в виду их незначительности.

Для шарнирно–стержневых систем (ферм), в элементах которых возникают лишь продольные силы N , формула перемещений принимает вид:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^L \bar{N}_i \frac{N_F}{EA} dS = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \frac{N_F}{EA} L_i .$$

Так как в пределах каждого стержня фермы и продольное усилие N жесткость поперечного сечения EA постоянны, то можно записать^

$$\Delta_{iF} = \sum_{K=1}^n \left(\bar{N}_i \frac{N_F}{EA} L \right)_K .$$

Строка О. Мора справедлива также и для арок малой кривизны (радиус кривизны больше десятикратной высоты поперечного сечения). При этом влиянием поперечных сил (Q) на перемещения пренебрегают.

Порядок вычисления перемещений системы по формуле Мора

1. Рассматривают грузовое состояние системы - находят выражения усилий N_F , Q_F и M_F в произвольных сечениях грузовых участков каждого элемента системы как функции координаты Z этих сечений при действии заданной нагрузки.

2. Рассматривают единичное состояние – по направлению искомого перемещения прикладывают соответствующую ему единичную «силу»:

а) если определяют перемещение одной точки по какому либо направлению, то прикладывают $\bar{F}_i = 1$ по направлению этого перемещения;

б) если определяют угол поворота какого-либо сечения, то прикладывают $\bar{M}_i = 1$ в этом сечении;

в) при определении взаимного перемещения двух точек по какому либо направлению прикладывают две противоположно направленные силы $\bar{F}_i = 1$ в соответствующих сечениях по линии искомого перемещения (см. Рис.3.14,а);

г) при определении взаимного угла поворота двух сечений прикладывают два противоположно направленных момента $\bar{M}_i = 1$ в соответствующих сечениях (см. Рис. 3.14, б).

д) Находят выражения усилий \bar{N}_i , \bar{Q}_i и \bar{M}_i как функции координат Z произвольного сечения.

4. Найденные выражения усилий $N_F, Q_F, M_F, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ и \bar{M}_i подставляют в формулу Мора и интегрированием по участкам в пределах всего сооружения определяют искомое перемещение Δ_{iF} .

Примечание. !!! Если искомое перемещение Δ_{iF} положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы $\bar{F}_i = 1$ ($\bar{M}_i = 1$).

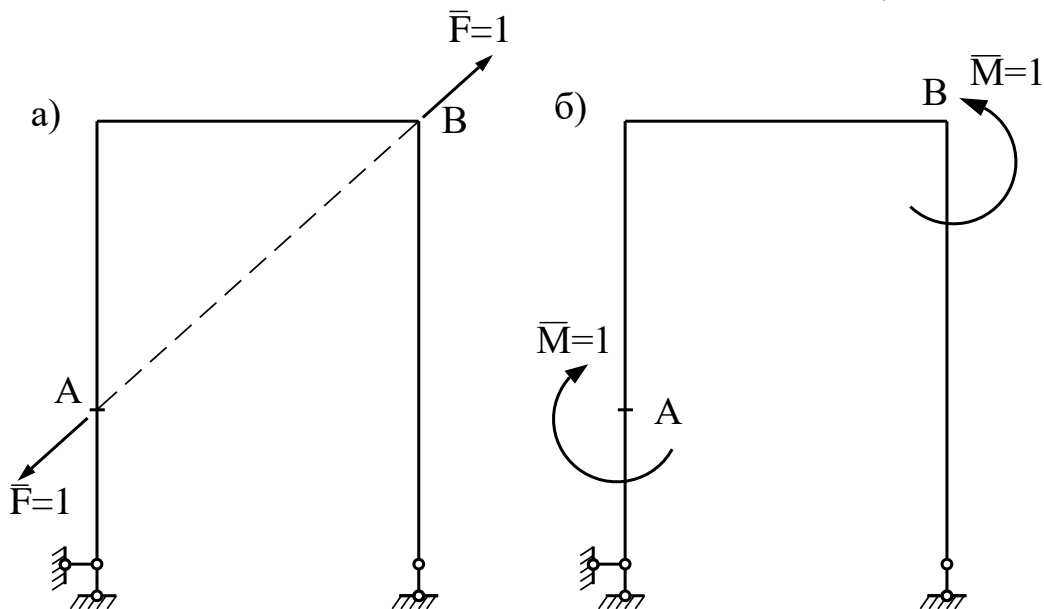


Рис. 3.14 – Схема к определению взаимного перемещение двух точек (а) и взаимного угла поворота двух сечений (б)

Пример 2. Для заданной рамы определить горизонтальное перемещение точки "С".

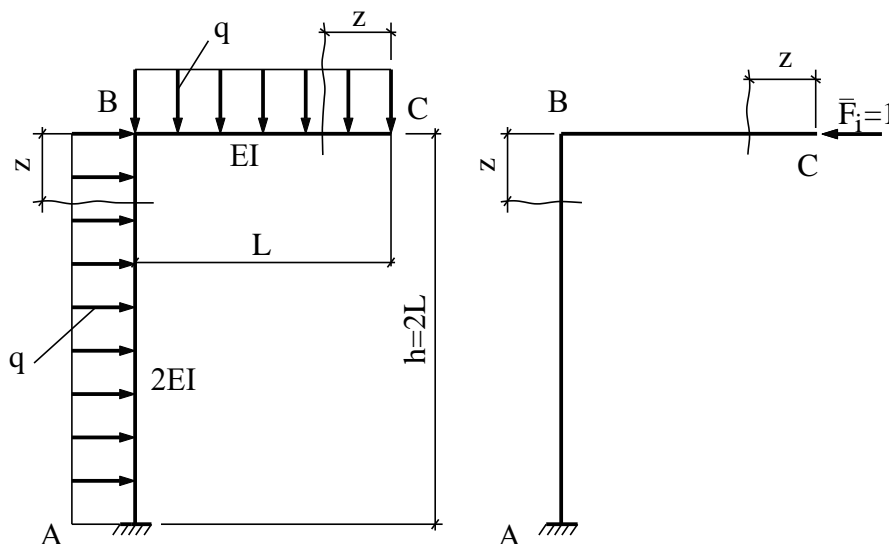


Рис. 3.15 – Расчётные схемы к примеру 2

Расчет ведут в следующем порядке.

1. Составляют для каждого участка выражение M_F :

$$M_F^{BC} = -\frac{qz^2}{2}; \quad M_F^{AB} = -\frac{qL^2}{2} - \frac{qz^2}{2}.$$

2. Прикладывают по направлению искомого перемещения горизонтальную единичную силу (см. Рис. 3.15).

3. Составляют выражения для \bar{M}_i (\bar{M}_2)

$$\bar{M}_i^{BC} = 0; \quad \bar{M}_i^{AB} = 1 \cdot z = z.$$

4. Находят искомое перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} = z_c &= \frac{1}{EI} \int_0^L 0 \cdot \left(-\frac{qz^2}{2} \right) dz + \frac{1}{2EI} \int_0^h z \cdot \left(-\frac{qL^2}{2} - \frac{qz^2}{2} \right) dz = \\ &= 0 - \frac{qL^2}{4EI} \int_0^{2L} z dz - \frac{q}{4EI} \int_0^{2L} z^3 dz = -\frac{qL^2}{4EI} \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^{2L} - \frac{q}{4EI} \left| \frac{z^4}{4} \right|_0^{2L} = -\frac{3qL^4}{2EI} \end{aligned}$$

Примечание. Знак "-" указывает на то, что перемещение направлено в сторону, противоположную направлению единичной силы !!! т.е. влево.

3.7 Практические приемы определения интеграла Мора $\int_{L_i} \bar{M}_i M_F dz$

Интегрирование строки О. Мора может выполняться непосредственно (предыдущий пример) или специальными приемами.

1. С п о с о б А. Н. В е р е щ а г и н а (способ перемножения эпюр).

Этот способ был предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А.Н. Верещагиным.

Правило А.Н. Верещагина: если одна из перемножаемых эпюр (\bar{M}_i или M_F) ограничена прямой, а другая имеет произвольное очертание, то интеграл $\int_{L_i} \bar{M}_i M_F dz$ можно вычислить как произведение площади эпюры произвольного очертания на ординату прямолинейной эпюры, взятую под центром тяжести эпюры произвольного (например, криволинейного очертания) (см. Рис. 3.16).

Это правило можно сформулировать и таким образом:

Интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, равен произведению площади криволинейной эпюры на ординату линейной, которая расположена под центром криволинейной

Второе доказательство А.Верещагина:

Если одну из подынтегральных функций можно представить как сумму двух функций, к каждому из получающихся интегралов можно применить правило А.Верещагина

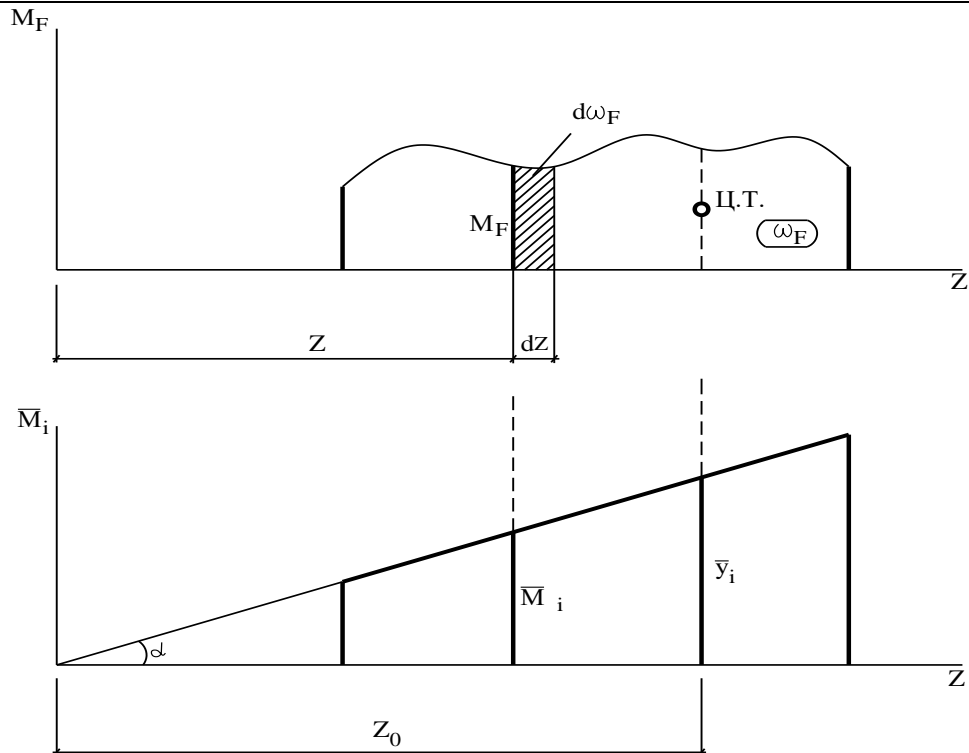


Рис. 3.16 – Расчетная схема к выводу формулы А.Н. Верещагина

Выразим ординату единичной эпюры \bar{M}_i через произвольную абсциссу z

$$\bar{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда

$$\int_{L_i} M_F \bar{M}_i dz = \int_{L_i} M_F z \operatorname{tg} \alpha dz = \operatorname{tg} \alpha \int_{L_i} z M_F dz.$$

Здесь $M_F dz = d\omega_F$ – площадь элементарной площадки $d\omega_F$ эпюры M_F (см. Рис. 3.16);

$z \cdot M_F dz = z \cdot d\omega_F = ds$ – элементарный статический момент площадки $d\omega_F$ относительно вертикальной оси.

Следовательно:
$$\int_{L_i} z M_F dz = S = \omega_F z_0,$$

где S – статический момент площади ω_F эпюры M_F относительно вертикальной оси.

Теперь
$$\int_{L_i} M_F \bar{M}_i dz = \text{tg} \alpha \cdot \omega_F \cdot z_0 = \omega_F \bar{y}_i.$$

Окончательно имеем:
$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_i}{EI} dz = \sum \frac{1}{EI} \omega_F \bar{y}_{ci},$$

где ω_F – площадь криволинейной (ломаной) эпюры на участке;

\bar{y}_c – ордината эпюры \bar{M}_i под центром тяжести (Ц.Т.) криволинейной (ломаной) эпюры.

П р и м е ч а н и е. Правило справедливо для бруса с прямолинейной осью, а жесткость поперечного сечения в пределах отдельных участков должна быть постоянной.

Если учитываются и другие силовые факторы, то выражение принимает вид

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\omega_F^M y_{ci}^M}{(EI_x)_i} + \sum \eta_i \frac{\omega_F^Q y_{ci}^Q}{(GA)_i} + \sum \frac{\omega_F^N y_{ci}^N}{(EA)_i},$$

где ω_F^M , ω_F^Q , ω_F^N – площади нелинейных эпюр M , Q и N ;

y_{ci}^M , y_{ci}^Q , y_{ci}^N – ординаты линейных эпюр M , Q и N , взятые под Ц.Т. нелинейных эпюр M , Q и N .

Пример 3. Определить прогиб балки, представленной на Рис.3.17, в середине пролета.

Решение:

1. Строим грузовую эпюру от заданной нагрузки
2. Прогибом называется, как известно, перемещение точки оси стержня в перпендикулярном к оси направлении, поэтому: Строим единичную эпюру от силы равной единице, приложенной в середине пролета перпендикулярно оси балки – по вертикали.
3. Вычисляем перемещение (прогиб) по правилу Верещагина:

При этом в соответствии со вторым доказательством Верещагина эпюру на левом участке разбиваем на параболический сегмент и «треугольник»

Площадь параболического сегмента = $b \times h \times 2/3$

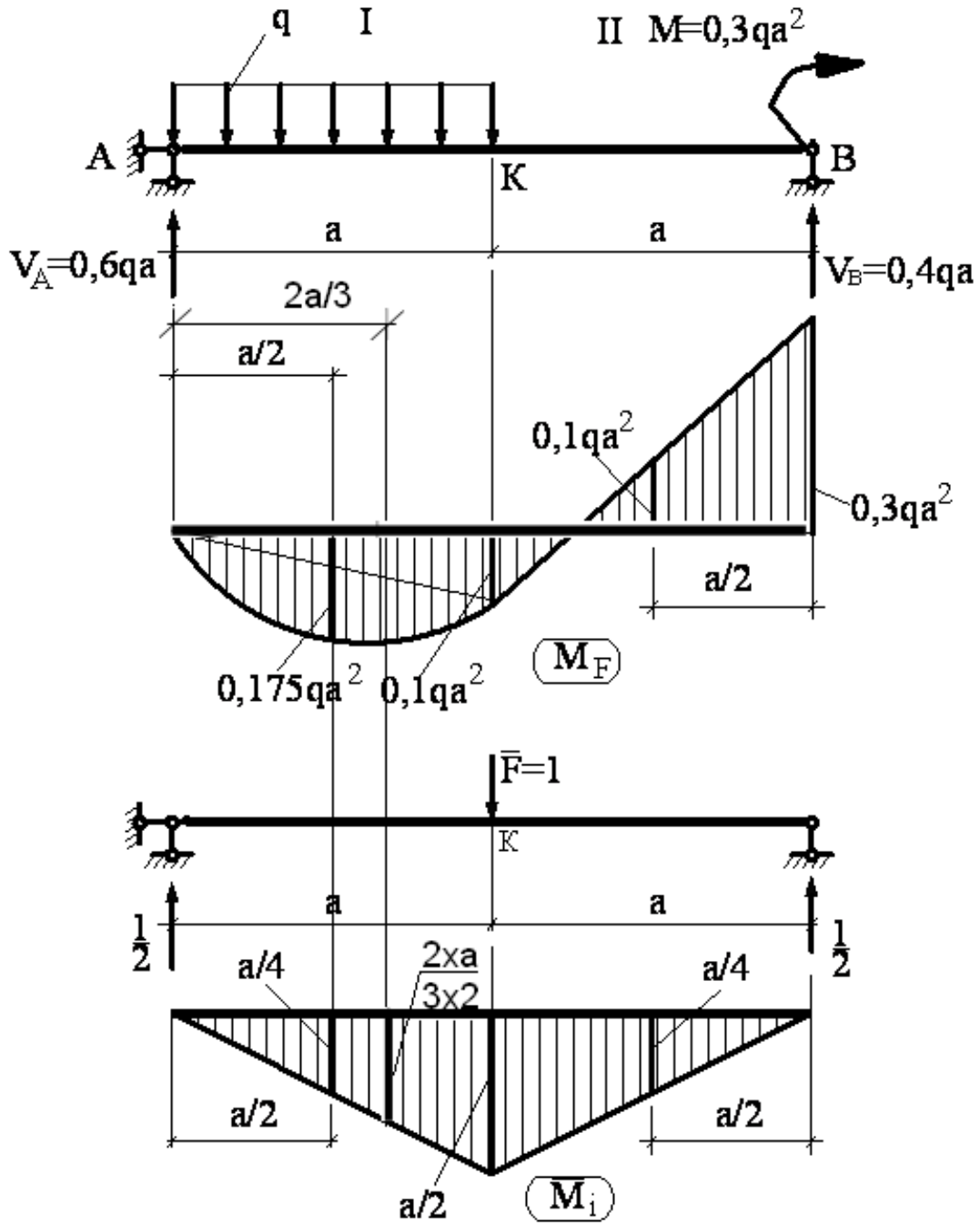


Рис. 3.17 – Расчетная схема к примеру 3

$$\Delta_{KF} = (\bar{M}_K, M_F) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a \left[\left(\frac{2}{3} \times 0,1qa^2 - \frac{1}{3} \times 0,3qa^2 \right) + \right] \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a \left(\frac{2}{3} \times 0,1qa^2 \right) + \frac{2}{3} \times a \times \frac{qa^2}{8} \times \frac{1}{2} \right] = 0,0292 \frac{qa^4}{EI_x}$$

2. Способ численного интегрирования (способ Симпсона-Корноухова).

Данный способ не требует разбиения эпюр и применим если:

- 1) ось стержня в пределах каждого участка прямолинейна, а жесткость постоянна ($EI_x = const$);
- 2) криволинейная эпюра описана функцией не выше второго порядка (нагрузка не сложнее равномерно распределенной);
- 3) на перемножаемом участке обе функции непрерывны;
- 4) в пределах участка единичная эпюра \bar{M}_i – прямолинейна.

$$\Delta_{iF} = \int_0^L \frac{M_F \bar{M}_i}{EI_x} dz = \frac{L}{6EI_x} \left[M_F(0) \bar{M}_i(0) + 4M_F\left(\frac{L}{2}\right) \bar{M}_i\left(\frac{L}{2}\right) + M_F(L) \bar{M}_i(L) \right]$$

В данном случае необходимо знать три значения M_F и \bar{M}_i :

- 1) $M_F(0)$, $\bar{M}_i(0)$ – в начале участка, $z=0$;
- 2) $M_F(L/2)$, $\bar{M}_i(L/2)$ – в середине, $z=L/2$;
- 3) $M_F(L)$, $\bar{M}_i(L)$ – в конце участка, $z=L$.

Пример 4. Определить прогиб балки в сечении К–К (см. Рис. 3.17). Расчет ведут в следующем порядке.

1. Строят грузовую M_F и единичную \bar{M}_i эпюры.
2. Вычисляют значения M_F и \bar{M}_i посередине каждого участка:

$$M_F^I(a/2) = V_A \cdot \frac{a}{2} - q \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 0,175qa^2;$$

$$M_F^{II}(a/2) = V_B \cdot \frac{a}{2} - 0,3qa^2 = -0,1qa^2.$$

1. По приведенной формуле определяют прогиб

$$y^{K-K}(a) = \frac{a}{6EI_x} \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,175qa^2 \cdot \frac{a}{4} + 0,1qa^2 \cdot \frac{a}{2} \right]^I + \frac{a}{6EI_x} \left[0,1qa^2 \cdot \frac{a}{2} + 4 \cdot (-0,1qa^2) \cdot \frac{a}{4} + (-0,3qa^2) \cdot 0 \right]^{II} = 0,0292 \frac{qa^4}{EI_x}.$$

Полученный результат совпал со значением, вычисленным в Примере 3 при помощи правила Верещагина.

4 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

4.1 Степень статической неопределимости

Статически неопределимыми называются такие системы, для которых реакции связей и внутренние усилия в элементах не могут быть определены с помощью только одних уравнений статики. При этом требуется составление дополнительных уравнений совместности деформаций.

Для статически неопределимых систем присущи «лишние» связи.

Лишние связи – это связи, при отбрасывании которых статически неопределимая система (С.Н.С) становится статически определимой и геометрически неизменяемой.

Степень статической неопределенности равна числу «лишних» связей или разности между числом неизвестных усилий и числом независимых уравнений статики.

Расчет статически неопределимых систем начинают с установления степени статической неопределенности по формуле

$$n = 2Ш + 3Ж + C_0 - 3Д ,$$

где : Ш – количество простых шарниров;

Ж – количество жестких заделок;

C_0 – количество шарнирно-подвижных опор.

Эту формулу можно записать более компактно:

$$n = C - 3Д, \quad (*)$$

где Д – количество дисков в системе, а



С – общее количество связей, наложенных на эти диски.

Для рам удобнее пользоваться другой формулой, однако она неконструктивна и ведет к сложностям при выборе основной системы:

$$n = 3К - Ш \quad (**)$$

где К – число замкнутых контуров (в предположения полного отсутствия шарниров);

Ш – общее число простых и приведенных к ним кратных (сложных) шарниров, при этом следует считать:

 – один простой шарнир;  – два простых шарнира.

Рассмотрим несколько примеров.

Различают внешне и внутренне статически неопределимые системы (см. Рис. 4.1).

Система называется **внешне** статически неопределимой, если уравнений статики недостаточно для определения реакций опор, являющихся внешними силами (или говорят, что эта система статически неопределима относительно опорных реакций)(см. Рис. 4.1, а, б).

Внутренне статически неопределимой плоской системой называют систему, обладающую лишними силами, введенными для взаимного со-

единения частей системы. Такая система соединена с землей лишь тремя опорными стержнями (см. Рис. 4.1, в).

При этом системы могут быть одновременно внешне и внутренне статически неопределимыми (см. Рис. 4.1, г).

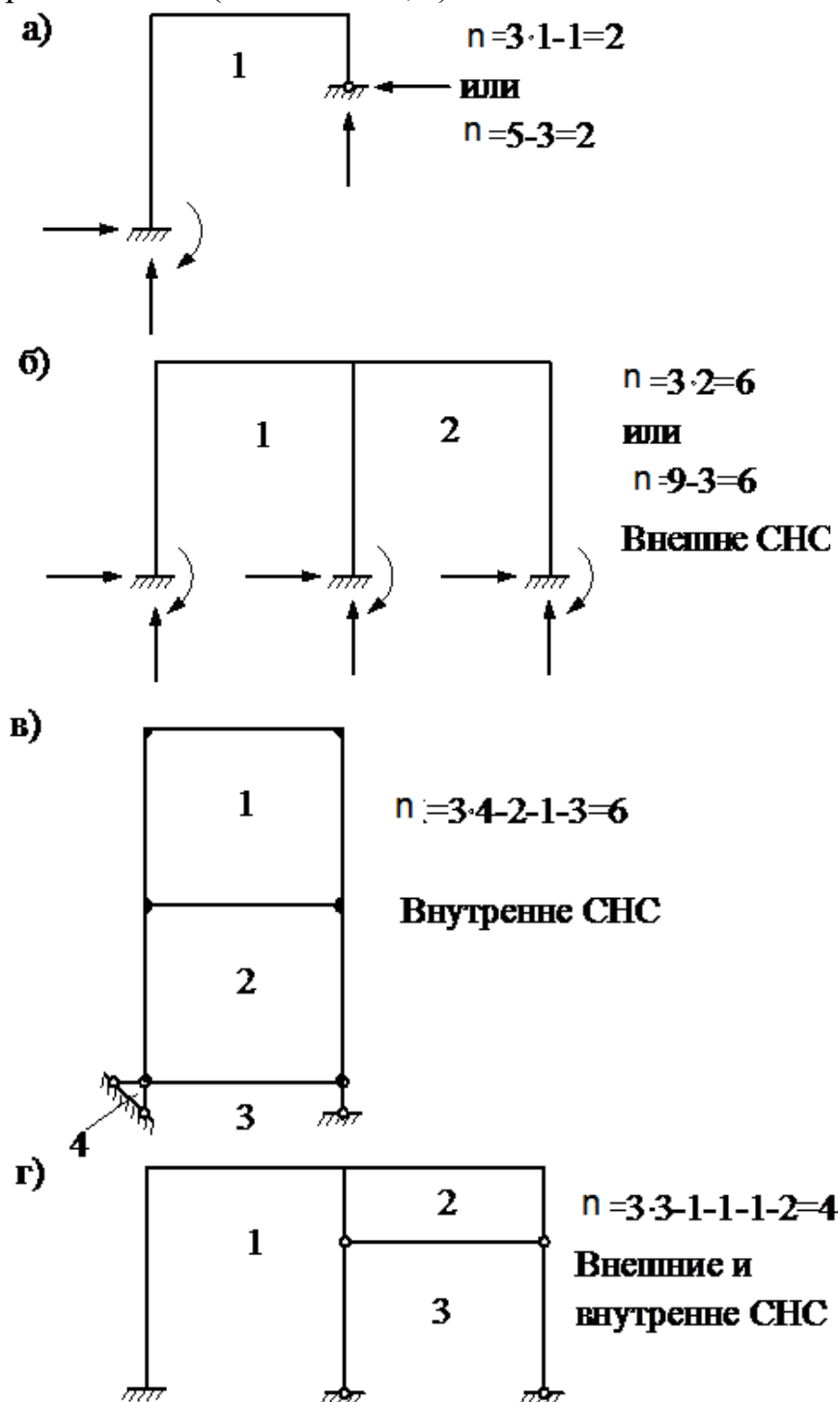
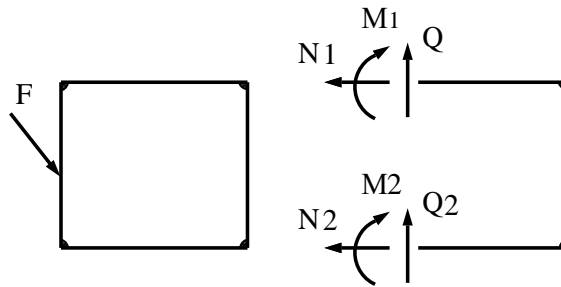


Рис. 4.1 – Примеры определения степени статической неопределимости рам: а, б – внешне статически неопределимые системы; в – внутренние; г – внешне и внутренние статически неопределимые системы

З а м е ч а н и я:

1. Одиночный шарнир устраняет одну связь и снижает стержень статической неопределимости системы n на единицу.
2. Любой замкнутый бесшарнирный контур трижды статически неопределим



3. Разрез по шарниру устраняет две связи

4.2 Свойства статически неопределимых систем

1. Статически неопределимые системы обладают большей жесткостью по сравнению со статически определимыми системами (С.О.С.), из которых они образованы.

2. Внутренние усилия в статически неопределимой системе меньше чем в статически определимой системе при той же нагрузке. Значит статически неопределимые системы более экономичны.

3. Распределение внутренних усилий в статически неопределимых системах зависит от физических (E, G) и геометрических (форма, очертание) свойств элементов сооружения.

4. Статически неопределимые системы более живучи, чем статически определимые системы (при нарушении одной из связей не разрушаются).

5. В статически неопределимых системах возникают дополнительные внутренние усилия в результате: а) неточности монтажа (изготовления); б) осадки опор; в) изменения температур.

4.3 Методы расчета статически неопределимых систем

Основными неизвестными являются те, зная которые можно определить все остальные неизвестные.

В качестве неизвестных выступают опорные реакции, внутренние усилия, перемещения.

1. Метод сил – основными неизвестными являются силы (реакции опор или внутренние усилия);

2. Метод перемещений – основными неизвестными являются перемещения.

3. Смешанный метод – основными неизвестными являются силы и перемещения совместно.

4.4 Метод сил. Основная идея метода сил

Основная идея метода сил состоит в том, что расчет статически неопределимой системы заменяют расчетом статически определимой системы, образованной из заданной путем удаления "лишних" связей. Удаление "лишних" связей компенсируется приложением по направлениям этих связей неизвестных сил – реакций этих связей, которые называют «ОСНОВНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДА СИЛ» и обозначают большими латинскими буквами X с добавлением нижнего индекса, который принимает значения, равные номеру соответствующего неизвестного, например: X_1 , X_2 и т.д. до n .

Далее, решение задачи сводится к формулированию условий эквивалентности заданной статически неопределимой системы и статически определимой основной системы метода сил. На этой основе необходимо построить расчетные уравнения относительно основных неизвестных метода сил, вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены этих уравнений. После этого надо решить эти расчетные уравнения и задача в принципе будет решена.

Ниже отдельные пункты этой методики рассматриваются подробнее:

4.4.1 Выбор основной системы метода сил

Основная система метода сил может быть образована:

- 1) удалением внешних связей (см. Рис. 4.2,а);
- 2) удалением внутренних связей (например, введением шарниров или устройством разреза по существующему шарниру или в любом месте конструкции, если это не приводит к образованию изменяемой или мгновенно изменяемой системы) (Рис. 4.2,б, 4.3 и 4.4);
- 3) комбинированным удалением "лишних" связей (внешних и внутренних) (Рис. 4.2,в).

Из полученных основных систем необходимо выбрать рациональную, т.е. ту, которая позволяет максимально упростить расчет заданной системы.

4.4.2 Условия эквивалентности заданной системы и основной метода сил

Эти системы будут работать одинаково (т.е. будут эквивалентны), если у них будут одинаковы перемещения, т.к. в линейных системах между нагрузками, внутренними силами и перемещениями существует взаимно-однозначное соответствие.

Условия эквивалентности следует формулировать для тех точек заданной системы, для которых известны перемещения – т.е. для тех точек, на которые наложены связи, по направлению которых перемещения равны нулю!

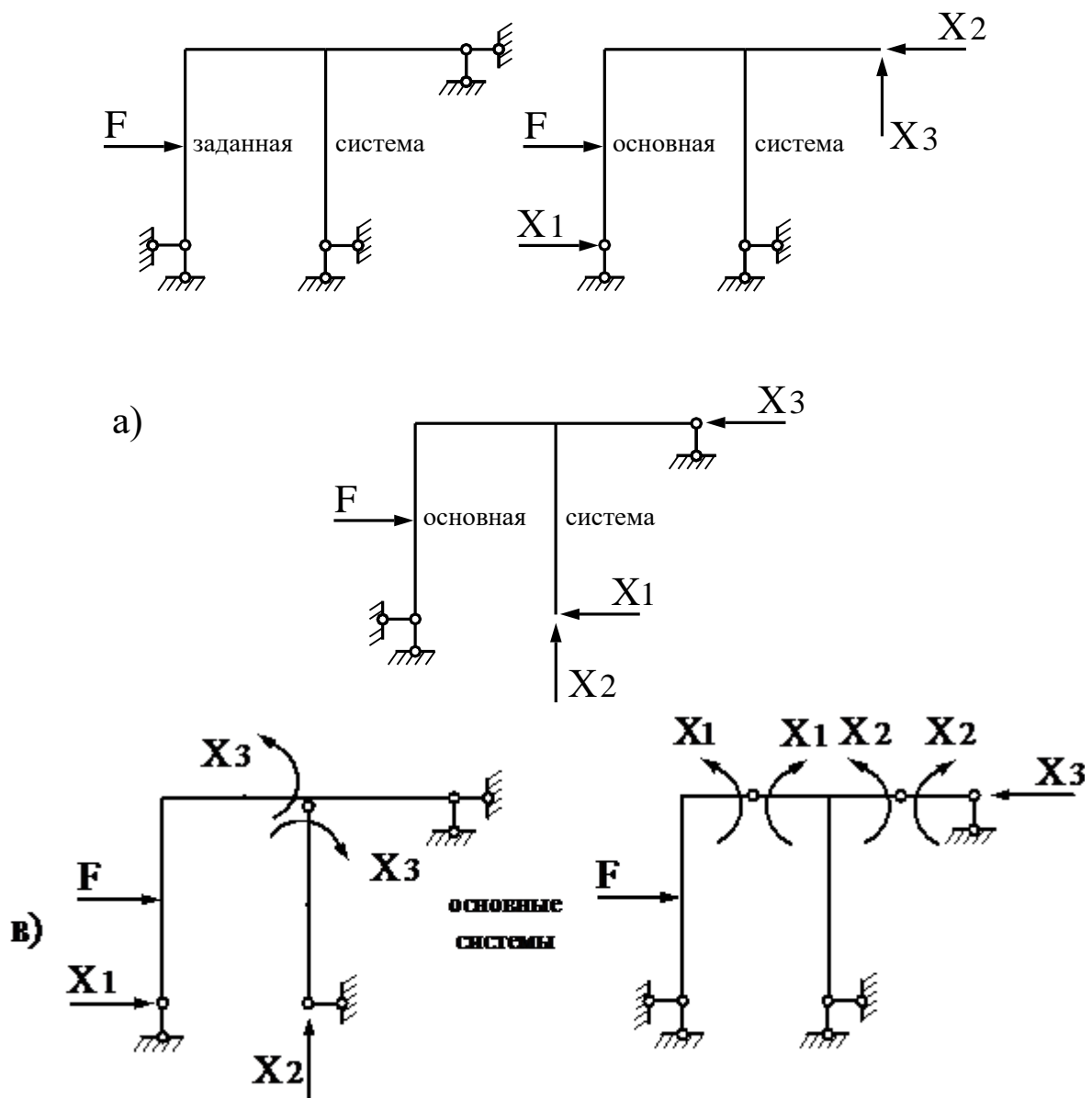


Рис. 4.2 – Схемы к выбору основной системы метода сил путем удаления внешних связей (а), введением шарниров (б) и комбинированным удалением связей (в)

4.4.3. Канонические уравнения метода сил

После выбора основной системы метода сил переходим к составлению расчетных уравнений для определения величин основных неизвестных.

Каждое из канонических уравнений метода сил отрицает перемещение по направлению соответствующей удаленной связи.

Число уравнений равно числу отброшенных связей, то есть степени статической неопределимости системы.

Уравнения перемещений для произвольной « n » раз статически неопределимой системы имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Уравнения перемещений, представленные в форме (4.1), носят название **канонических уравнений метода сил**.

Каноническими эти уравнения называются потому, что они составляются по одному и тому же правилу (канону) и их вид зависит только от степени статической неопределимости системы «n» и не зависит от конкретных особенностей системы.

Здесь δ_{11} – перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой силы вызванной единичной силой $X_1 = 1$;

$\delta_{11}X_1$ – перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное силой X_1 (действительной);

δ_{12} – перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой же силы, вызванное силой $X_2 = 1$

$\delta_{12} X_2$ – перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой же силы, вызванное силой X_2

Δ_{1F} – перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой же силы, вызванное заданной нагрузкой и т.д.

Рассмотрим пример, представленный на Рис.4.3.

В заданной системе по направлениям имеющихся связей (в том числе и тех, которые отброшены при переходе к основной системе ОС МС) перемещений быть не может. Поэтому в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю.

Математическим выражением сформулированного положения являются уравнения перемещений:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{X_1}(X_1, X_2, q) = 0; \\ \Delta_2 = \Delta_{X_2}(X_1, X_2, q) = 0. \end{cases}$$

где Δ_1 – полное перемещение точки А по направлению усилия X_1 от заданной нагрузки и "лишних" неизвестных усилий X_1, X_2 ;

Δ_2 – полное перемещение точки А по направлению усилия X_2 от тех же нагрузок.

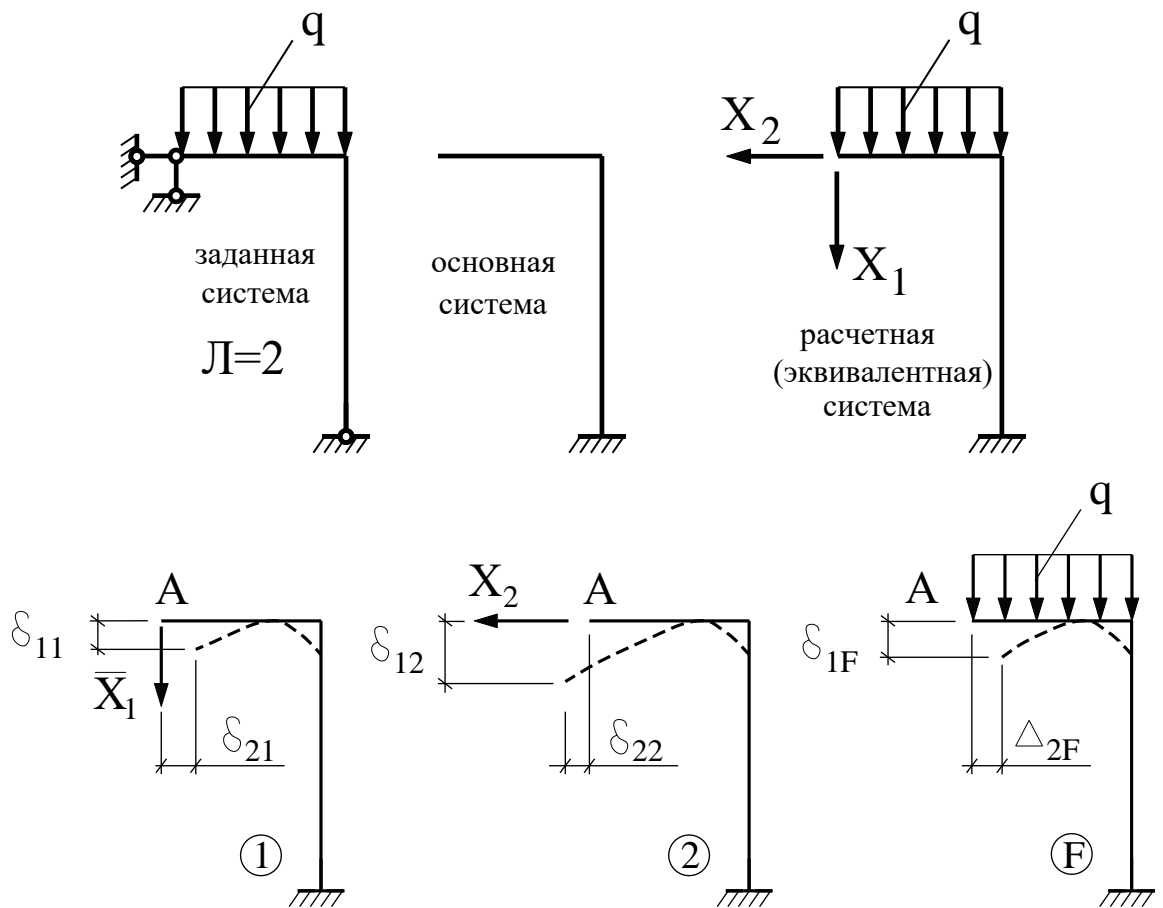


Рис. 4.3 – Схемы к составлению канонических уравнений метода сил

На основании принципа независимости действия сил, запишем выражения для перемещений Δ_1 и Δ_2 в виде сумм перемещений, вызванных отдельно каждой из сил X_1 , X_2 и q

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1F} = 0; \\ \Delta_2 = \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

Здесь Δ_{1X_1} – перемещение по направлению силы X_1 от силы X_1 ;

Δ_{1X_2} – перемещение по направлению силы X_1 от силы X_2 ;

Δ_{1F} – перемещение по направлению силы X_1 от заданной нагрузки

q

или в общем виде

$$\Delta_i = \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \Delta_{iX_3} + \dots + \Delta_{iX_i} + \dots + \Delta_{iX_n} + \Delta_{iF} = 0,$$

где Δ_i – перемещение по направлению i -той удаленной связи от заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий X_i .

Так как определение перемещений производится методом О. Мора, то перемещения Δ_{1X_1} , Δ_{1X_2} и т.д. удобно выразить через перемещения от единичных сил, приложенных взамен "лишних" неизвестных. Очевидно, что для рассматриваемых линейно деформируемых систем перемещение от некоторой силы X_i будет в X_i раз больше, чем от силы, равной единице и приложенной по направлению силы X_i , т.е. ^

$$\Delta_{1X_1} = X_1 \delta_{11}; \Delta_{1X_2} = X_2 \delta_{12}; \dots;$$

Таким образом, уравнения (4.5) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0 \end{cases} .$$

4.4.4 Энергетическое толкование системы канонических уравнений

Выражение потенциальной энергии системы имеет вид

$$U = \int \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

Данное выражение (Рис.4.4) зависит от неизвестных усилий X_1 , X_2 и X_3 , т.к. они входят в выражение для изгибающего момента M . Возьмем частные производные от U по X_1 , X_2 и X_3 и, соответственно, получим перемещения точек приложения неизвестных усилий (X_1 , X_2 и X_3) по направлению этих усилий (на основании теоремы Кастильяно)

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \Delta_1; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = \Delta_2; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = \Delta_3$$

В заданной системе перемещения по указанным направлениям отсутствуют

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0. \quad (4.2)$$

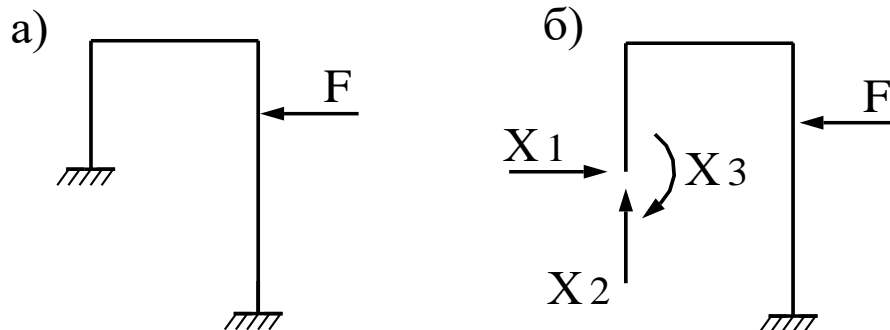


Рис. 4.4 – Заданная (а) и основная (б) системы

На основании той же теоремы вторые производные от U по обобщенной силе (X_1, X_2 и X_3) всегда положительны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \frac{\partial \Delta_3}{\partial X_3} = \delta_{33}. \quad (4.3)$$

Выражения (4.3) указывают на минимум потенциальной энергии.

Таким образом, *при загрузении статически неопределимой системы основные неизвестные имеют такие значения, при которых потенциальная энергия системы является минимальной*. В этом состоит так называемый **принцип наименьшей работы**.

При использовании этого принципа на практике порядок действия следующий:

- 1) выбирают основную систему и прикладывают к ней F и X_i ;
- 2) производят необходимые вычисления (получают выражения для M_F , \bar{M}_1 и \bar{M}_2 или строят их эпюры);
- 3) составляют общее выражение потенциальной энергии системы U всей системы;
- 4) записывают выражения (4.2), которые после алгебраических преобразований становятся эквивалентными системе канонических уравнений.

Такой прием в настоящее время в практике расчета стержневых систем распространения не имеет.

4.4.5 Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений метода сил

В системе канонических уравнений (4.1), в качестве коэффициентов при неизвестных стоят перемещения основной системы, вызываемые единичными силами, действующими по направлениям отброшенных связей.

Для определения перемещений строят эпюры изгибающих моментов M в основной системе отдельно от заданной нагрузки (M_F , состояние «F») и от каждой единичной силы (\bar{M}_1 , состояние \bar{X}_1 ; \bar{M}_2 , \bar{X}_2 и т.д.).

Единичные (удельные) перемещения, расположенные на побочных диагоналях δ_{ik} представляют собой перемещения по направлению i -той удаленной связи, по направлению которой действует k -тая сила и называются **побочными**:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dz + \sum \int \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k}{GA} \eta dz + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k}{EA} dz$$

Для рам при отношении высоты поперечного сечения к длине стержня

$$h/L < 1/5 \quad \delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dz$$

На основании теоремы о взаимности перемещений (теоремы Максвелла)

$$\delta_{ik} = \delta_{ki},$$

это упрощает расчет.

Они могут принимать значения: положительные $\delta_{ik} > 0$, равные нулю $\delta_{ik} = 0$ и отрицательные $\delta_{ik} < 0$ при $i \neq k$

Единичные (удельные) перемещения δ_{ii} , расположенные на главной диагонали системы канонических уравнений, имеющие два одинаковых индекса, называются **главными**

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} dz > 0$$

Свободные члены (грузовые перемещения) определяются как

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dz$$

Они могут принимать значения: положительные $\Delta_{iF} > 0$, равные нулю $\Delta_{iF} = 0$ и отрицательные $\Delta_{iF} < 0$.

4.4.6 Проверки коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений

Перед решением канонической системы уравнений, следует убедиться в правильности вычисления всех коэффициентов и свободных членов.

Для этого строят суммарную единичную эпюру \bar{M}_S суммируя единичные эпюры на основании принципа независимости действия сил²:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \dots + \bar{M}_n$$

Далее выполняют проверки:

1. **Универсальная** проверка коэффициентов при неизвестных

$$\delta_{SS} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik},$$

где
$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2 \cdot (\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) \quad , \quad \text{а}$$

² Строить эпюру \bar{M}_S от действия всех единичных сил $X_i=1$ не рекомендуется

$$\delta_{SS} = \sum_S \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI} dS$$

При этом погрешность вычисления коэффициентов не должна превышать

$$\sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{i\kappa} - \sum_S \int \frac{\bar{M}_S^2 dS}{EI} \leq 1\%$$

2. Если универсальная проверка не удовлетворяется, то производят **построчную (постолбцовую)** проверку для уточнения области, в которой расположена допущенная ошибка

$$\sum_S \int \frac{\bar{M}_S \bar{M}_i}{EI} dS = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \dots + \delta_{in} = \delta_{1i} + \delta_{2i} + \delta_{3i} + \dots + \delta_{ni}.$$

3. Проверка **свободных членов**

$$\Delta_{SF} = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{iF} + \Delta_{nF},$$

где $\Delta_{SF} = \sum_S \int \frac{\bar{M}_S M_F}{EI} dS.$

При этом погрешность не должна превышать $\Delta_{SF} - \sum \Delta_{iF} \leq 1\%$.

4.4.7 Решение системы канонических уравнений. Метод Гаусса

Решением системы канонических уравнений определяются основные неизвестные $X_1, X_2 \dots$ и X_n , что является *принципиальным* этапом решения задачи, так как в расчетной схеме все силы становятся известными.

Методы решения систем линейных уравнения делятся на 1) **прямые**, для которых можно заранее оценить трудоемкость решения, но допущенная ошибка в ходе решения распространяется далее, и 2) **непрямые (итерационные)** – методы последовательного приближения, трудоемкость которых зависит от точности начального приближения, но в которых допущенная ошибка незначительна, т.к. решение на каждом шаге (итерации) уточняется.

Рекомендуется решать систему канонических уравнений методом Гаусса (способ последовательного исключения неизвестных).

Пусть система канонических уравнений после подстановки в нее найденных значений единичных коэффициентов и свободных членов имеет вид

$$\begin{aligned} 3,45X_1 - 0,91X_2 - 2,64 &= 0; \\ -0,91X_1 + 2,58X_2 - 2,45X_3 - 3,54 &= 0; \\ -2,45X_2 + 3,52X_3 + 8,32 &= 0. \end{aligned}$$

Решим систему уравнений способом последовательного исключения неизвестных, используя сокращенный алгоритм Гаусса, в табличной форме с построчным контролем их решения.

Таблица 4.1

Решение системы канонических уравнений в табличной форме

№ уравнения	X ₁	X ₂	X ₃	Δ _{if}	Контроль решения уравнения	Порядок операций с уравнениями
1	2	3	4	5	6	7
1	3,45	-0,91	0	-2,64	$\sum -0,1/0,91 = -0,11$	
2	-0,91	2,58	-2,45	-3,54	$\sum -4,32/2,58 = -1,674$	
3	0	-2,45	3,52	8,32	$\sum 9,39/+2,45 = 3,833$	
4	3,791	-1	0	-2,901	$\sum -0,11$	$\boxed{1} : 0,91 \rightarrow \boxed{4}$
5	-0,353	1	-0,95	-1,372	$\sum -1,675$	$\boxed{2} : 2,58 \rightarrow \boxed{5}$
6	0	-1	1,437	3,396	$\sum 3,833$	$\boxed{3} : 2,45 \rightarrow \boxed{6}$
7	3,438	0	-0,95	-4,273	$\sum -1,785/3,438 = -0,519$	$\boxed{4} + \boxed{5} \rightarrow \boxed{7}$
8	-0,353	0	0,487	2,024	$\sum 2,158/0,353 = 6,113$	$\boxed{5} + \boxed{6} \rightarrow \boxed{8}$
9	1	0	-0,276	-1,243	$\sum -0,519$	$\boxed{7} : 3,438 \rightarrow \boxed{9}$
10	-1	0	1,38	5,734	$\sum 6,114$	$\boxed{8} : 0,353 \rightarrow \boxed{10}$
11	0	0	1,104	4,491	$\sum 5,595/1,104 = 5,068$	$\boxed{9} + \boxed{10} \rightarrow \boxed{11}$
12	0	0	1	4,068	$\sum 5,068$	$\boxed{11} : ,104 \rightarrow \boxed{12}$

Из 12-го уравнения $4,068 + X_3 = 0, \Rightarrow X_3 = -4,068$;

Из 6-го уравнения $3,396 + 1,437(-4,068) - X_2 = 0, \Rightarrow X_2 = -2,45$;

Из 10-го уравнения $5,734 + 1,38(-4,068) - X_1 = 0, \Rightarrow X_1 = -0,12$,

а можно

Из 9-го уравнения $-1,243 - 0,246(-4,068) + X_1 = 0, \Rightarrow X_1 = -0,12$;

Из 4-го уравнения $-2,901 - X_2 + 3,791 \cdot 0,12 = 0, \Rightarrow X_2 = -2,446 \approx -2,45$.

Найденные значения неизвестных подставляем в исходные уравнения системы и проверяем точность ее решения

$$3,45 \cdot 0,12 - 0,91(-2,45) - 2,64 = 0;$$

$$2,644 - 2,64 = 0,004$$

$$\text{Невязка } \frac{0,004}{2,64} \cdot 100\% = 0,15\% < 0,5\%$$

$$-0,91 \cdot 0,12 + 2,58(-2,45) - 2,45(-4,068) - 3,54 = 0;$$

$$3,536 - 3,54 = -0,004$$

$$\text{Невязка } \frac{0,004}{3,54} \cdot 100\% = 0,1\% < 0,5\%$$

$$- 2,45(- 2,45)+3,52(- 4,068)+8,32=0;$$

$$- 8,317+8,32=0,003$$

$$\text{Невязка } \frac{0,003}{8,32} \cdot 100\% = 0,04\% < 0,5\%$$

4.4.8 Построение расчетных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

1 – й с п о с о б. К основной системе прикладывается заданная внешняя нагрузка и найденные значения неизвестных сил "лишних" связей – не рекомендуется.

2 – й с п о с о б. Строят эпюры внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе путем суммирования эпюр от всех воздействий, для этого:

2.1 Строят исправленные эпюры изгибающих моментов

$$\bar{M}_1 X_1, \bar{M}_2 X_2, \dots, \bar{M}_i X_i,$$

а затем расчетную (окончательную³) эпюру:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i.$$

Правильность построения эпюры контролируется вырезанием узлов и соблюдением условий равновесия для них вида $\sum M = 0$.

2.2. Строят эпюру поперечных сил одним из возможных способов, основанных на использовании расчетной эпюры изгибающих моментов $M_{\text{расч}}$, опираясь на дифференциальную зависимость $dM / dz = Q = tg\alpha$ для прямолинейных участков

$$Q = (M^{\text{прав}} - M^{\text{лев}}) / L. \quad (*)$$

А.) При использовании дифференциальной зависимости для построения эпюры M на растянутых волокнах применяют следующее правило знаков:

Поперечная сила положительна $Q > 0$, если при кратчайшем совмещении элемента оси с касательной к эпюре M вращение его осуществляется по ходу часовой стрелки, если иначе – $Q < 0$, (см. Рис. 4.5а).⁴

³ Термин «окончательная» эпюра используется на практике, однако он не вполне точен, поскольку при ее построении использовались различные предпосылки, оказывающие некоторое влияние на величину перемещений, поэтому реальная эпюра будет отличаться от «окончательной», которую можно несколько уточнить, отказавшись от указанных упрощающих предпосылок, поэтому ее лучше называть «расчетной».

⁴ Эти же результаты можно получить непосредственно, приняв условно какие-то из продольных волокон «верхними», а другие – «нижними», считая $M > 0$, если он растягивает «нижние» волокна:

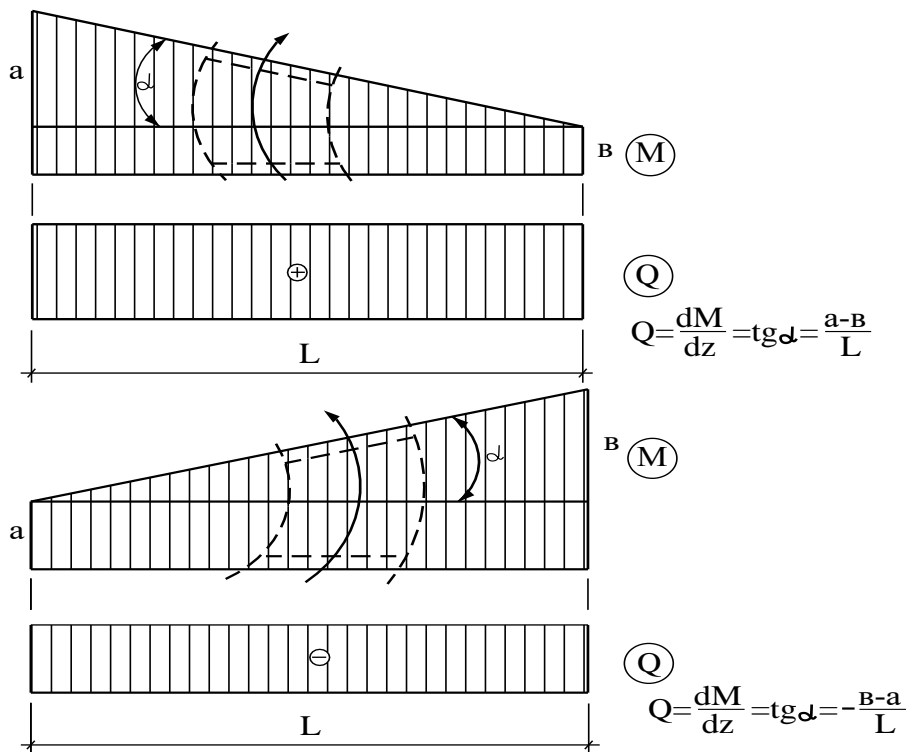


Рис. 4.5а. – Схема к определению поперечной силы по эпюре моментов – для участков с прямолинейным очертанием эпюры M

Для нагруженных участков полученное по формуле (*) число следует добавить к поперечным силам, определенным из условия равновесия участка:

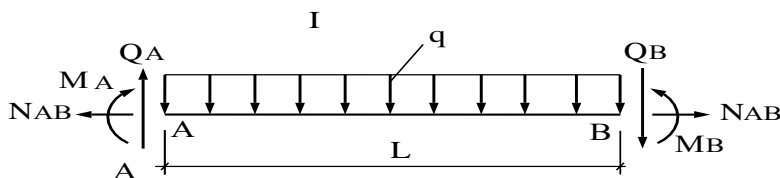


Рис. 4.5б. – Схема к определению поперечной силы по эпюре моментов – путем рассмотрения статического равновесия вырезанного участка рамы, нагруженного и внешними и внутренними силами (для участков с криволинейным очертанием эпюры M)

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad M_A + Q_B \cdot L + \frac{1}{2} qL^2 - M_B = 0; \quad Q_B^{прав} = -\frac{qL}{2} + \frac{M_B^{прав} - M_A^{лев}}{L}$$

$$Q = \frac{-b - (-a)}{L} = \frac{a - b}{L} > 0 \text{ (эюра сверху) или}$$

$$Q = \frac{-b - (-a)}{L} = \frac{a - b}{L} < 0 \text{ (эюра снизу)}$$

$$\sum M_{(B)} = 0; M_A - M_B + Q_A \cdot L - \frac{1}{2} qL^2 = 0; Q_A^{лев} = -\frac{qL}{2} + \frac{M_B - M_A}{L}$$

Б.) Но возможен и другой подход к построению расчетной эпюры поперечных сил, основанный на использовании следующей формулы, полученной таким же образом при помощи дифференциальной зависимости:

$$Q_{расч} = Q_0 + \frac{M^{прав} - M^{лев}}{L};$$

где: Q_0 – балочная поперечная сила, а дробь имеет прежний смысл.

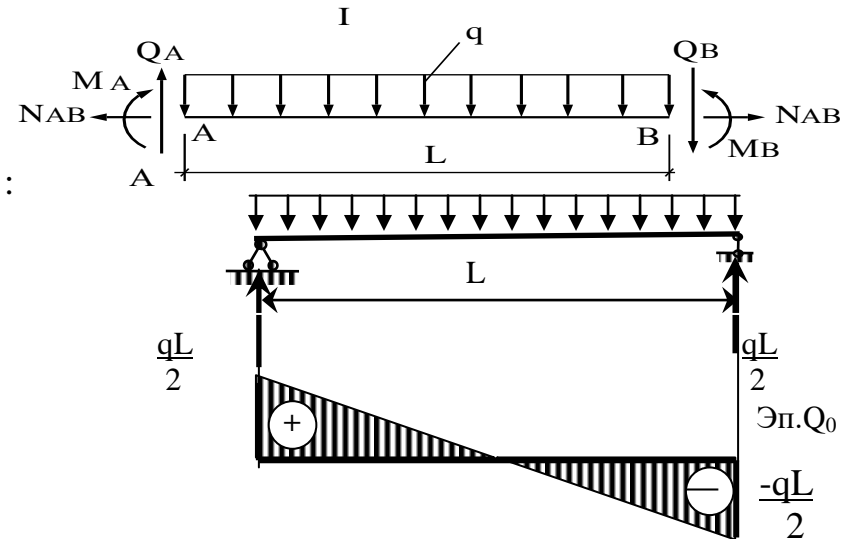


Рис. 4.5в.. – Схема к определению поперечной силы по эпюре моментов с

использованием формулы: $Q_{расч} = Q_0 + \frac{M^{прав} - M^{лев}}{L};$

Для того, чтобы построить «балочную» эпюру поперечных сил, рассматриваем данный участок как балку на двух шарнирных (Рис.4.5в):

- I. Представляем участок рамы как балку на двух шарнирных опорах
- II. Определяем опорные реакции
- III. Разбиваем балку на участки
- IV. Строим эпюру балочной поперечной силы Q_0 .
- V. Затем к вычисленным значениям балочной поперечной силы надо добавить величину дроби

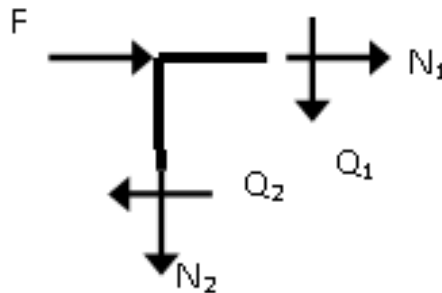
$$Q = (M^{прав} - M^{лев}) / L.$$

В результате этого вся эпюра балочных поперечных сил на данном участке сместится относительно оси либо вверх, если дробь положительна, либо вниз, если дробь отрицательна.

При использовании этой формулы знак поперечной силы получается авто-

матически верным, если выбрать какие-то продольные волокна стержня в качестве «верхних», а другие считать условно «нижними» и изгибающие моменты считать положительными, если они растягивают условно «нижние» продольные волокна (Рис.4.5 б) ($M_B=M^{\text{прав}}>$, $M_A=M^{\text{лев}}>0$).

2.3 Строим эпюру продольных сил, вырезая узлы и рассматривая условия их равновесия при найденных значениях M и Q . Начинать необходимо с тех узлов, которые объединяют в себе не более двух стержней. Продольные усилия определяют из условия равновесия вырезанного узла.

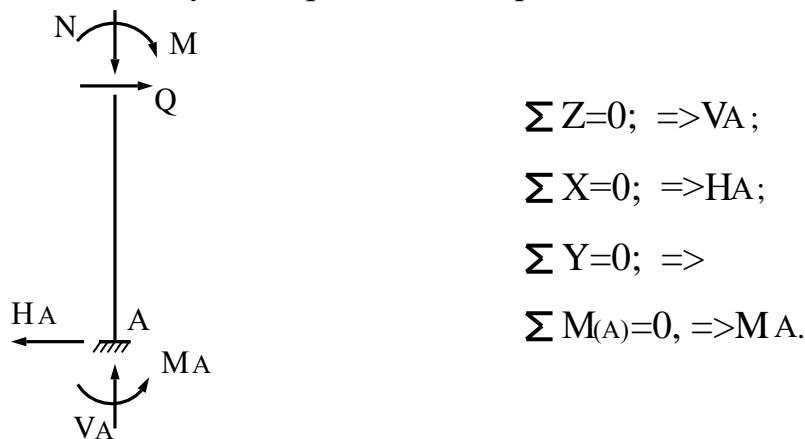


$$\sum F_z = F + N_1 + Q_2 = 0 \quad \Bigg| \quad \sum F_y = -N_2 - Q_1 = 0$$

Рис. 4.6 – Схема к определению продольных сил

4.4.8 Определение опорных реакций

Опорные реакции определяют из условия равновесия вырезанных опорных узлов, используя построенные эпюры M , Q и N .



$$\begin{aligned} \sum Z=0; & \Rightarrow V_A; \\ \sum X=0; & \Rightarrow H_A; \\ \sum Y=0; & \Rightarrow \\ \sum M_{(A)}=0, & \Rightarrow M_A. \end{aligned}$$

Рис. 4.7 – Схема к определению опорных реакций

4.4.9 Проверки расчетных эпюр $N_{\text{расч}}$, $Q_{\text{расч}}$, и $M_{\text{расч}}$

Статическая проверка заключается в проверке удовлетворения условий равновесия рамы в целом

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Вырезанные узлы рамы также должны находиться в равновесии.

Деформационная (кинематическая) проверка может быть проведена различными способами.

Зная, что при составлении канонических уравнений были использованы условия отсутствия суммарных перемещений от действия неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n и внешней нагрузки по направлению лишних неизвестных, то результат перемножения эпюр M и \bar{M}_S должен быть равен нулю

$$\sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_S}{EI} dS = 0.$$

Или перемещения, вычисленные по направлению каждой из удаленных связей, должны быть равны нулю

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dS = 0; \sum \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} dS = 0; \dots; \sum \int \frac{\bar{M}_n M}{EI} dS = 0.$$

Допускаемая погрешность должна быть не более 3% от суммы положительных или отрицательных слагаемых в уравнении.

П р и м е ч а н и е. Наиболее надежной проверкой правильности определения "лишних" неизвестных и построения эпюр внутренних усилий для заданной системы является ее повторное решение при другом выборе основной системы. Совпадение окончательных эпюр в результате двух указанных решений, является гарантией их правильности.

4.4.10 Порядок расчета статически неопределимых рам методом сил

1. Определяют степень статической неопределимости (количество "лишних" связей).
2. Выбирают основную систему (отбрасывая "лишние" связи), которая должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.
3. Заменяют действие отброшенных связей соответствующими усилиями – основными неизвестными метода сил X_1, X_2, \dots, X_n , прикладывают заданную внешнюю нагрузку.
4. Составляют канонические уравнения в общем виде.
5. Строят единичные $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \dots, \bar{M}_n$ и грузовую эпюры M_F , изгибающих моментов.
6. Определяют коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений.
7. Строят суммарную единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_S и выполняют проверки коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
8. Решают канонические уравнения, определяя значения усилий в "лишних" связях.
9. Проверяют правильность решения канонических уравнений.

10. Стоят исправленные эпюры изгибающих моментов

$$\bar{M}_1 X_1, \bar{M}_2 X_2, \dots, \bar{M}_n X_n.$$

11. Строят эпюры внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе:

а) расчетную эпюру изгибающих моментов

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n;$$

И выполняют ее проверки : статическую и деформационную (кинематическую) проверку.

б) эпюру $Q_{расч}$, используя построенную $M_{расч}$ и, например, формулу

$$Q_{расч} = Q_0 + \frac{M^{прав} - M^{лев}}{L};$$

в) эпюру $N_{расч}$, вырезая узлы и рассматривая условия их равновесия при найденных значениях Q .

12. Определяют опорные реакции, вырезая опорные узлы и рассматривая условия их равновесия при найденных значениях M , Q и N .

13. Выполняют общую статическую проверку.

4.5 Определение перемещений в статически неопределимой системе

Перемещения в стержневых системах из прямолинейных или слабо изогнутых стержней определяются с использованием строки Мора

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dS + \sum \eta \int \frac{\bar{Q}_i Q_F}{GA} dS + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} dS,$$

где M_F, Q_F, N_F - внутренние усилия в поперечных сечениях стержней при действии заданной нагрузки;

$\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - внутренние усилия в сечениях стержней при действии только единичной нагрузки $\bar{F}_i = 1$ (или $\bar{M}_i = 1$), приложенной в том сечении, где необходимо определить перемещение по заданному направлению.

Если сооружение состоит из длинных стержней ($L/h > 10$, где L - длина стержня, h - больший размер поперечного сечения), то влиянием Q и N на величину перемещений пренебрегают (балки, рамы)

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dS.$$

Для ферм ($M = 0, Q = 0$) строка О. Мора приобретает вид

$$\Delta_{iF} = \sum_{\hat{E}=1}^n \left(\frac{\bar{N}_i N_F}{EA} L \right)_{\hat{E}}$$

В статически неопределимой системе при определении перемещений возможны следующие варианты решения данной задачи.

1. Грузовые и единичные состояния рассматриваются для статически неопределимой системы, при этом статическую неопределимость приходится раскрывать дважды (см. Рис. 4.8).

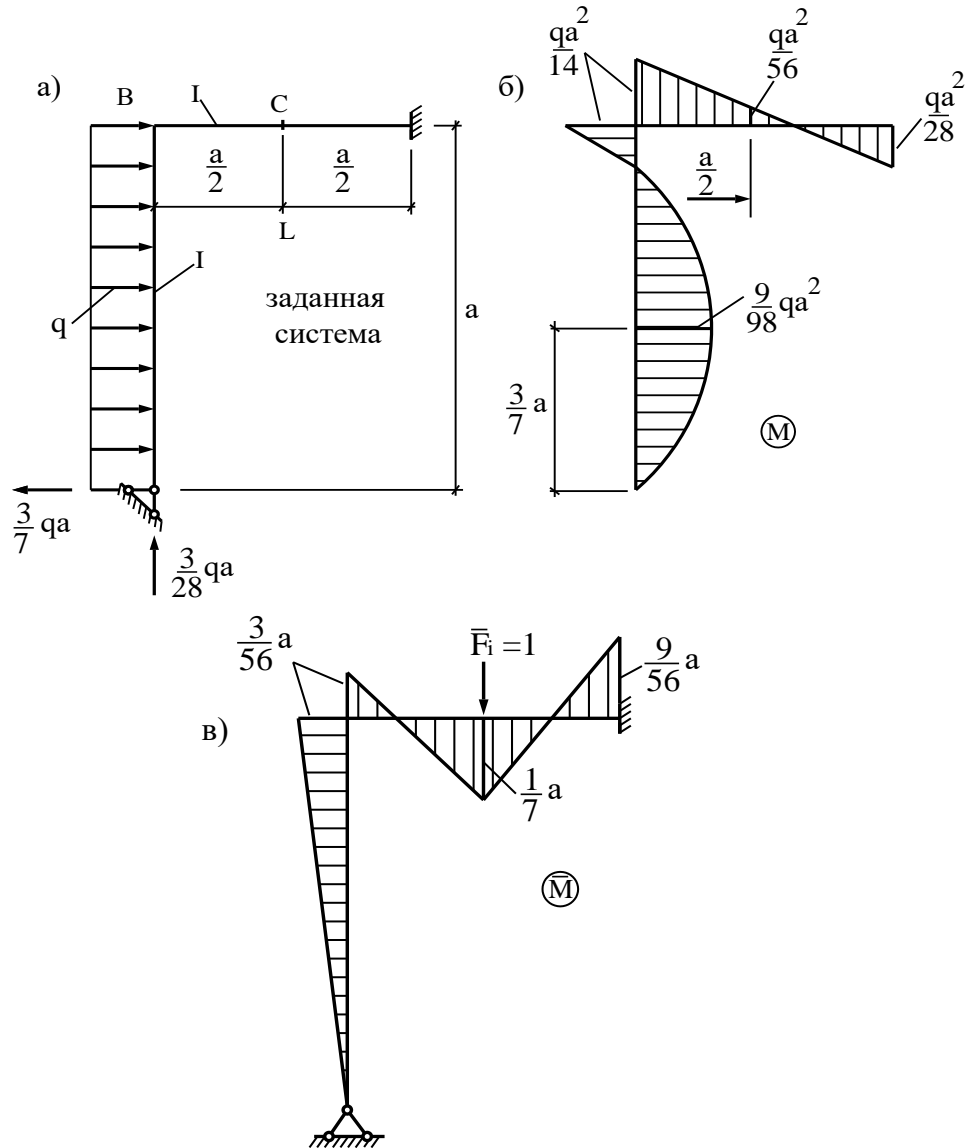


Рис. 4.8 – Определение перемещений при помощи грузового (б) и единичного (в) состояний в статически неопределимой системе

Перемещение точки "С" составит

$$\Delta_C = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_i}{EI} dS = -\frac{qa^4}{448EI}$$

2. Грузовое состояние рассматривается для статически неопределимой

системы (см. Рис.4.8,б), а единичное для любой статически определимой, по полученной, из заданной путем удаления "лишних" связей (см. Рис. 4.9,б). Статическая неопределимость раскрывается только для грузового состояния.

Превратим заданную статически неопределимую систему в статически определимую, приложив к ней внешнюю нагрузку и реакции отброшенных связей. В этом случае эпюра M ни чем не будет отличаться от эпюры M для заданной статически неопределимой системы.

Деформации обеих систем одинаковы. Поэтому перемещение Δ_C можно вычислить не в заданной статически неопределимой системе, а в полученной из нее статически определимой системе ^

$$\Delta_C = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_i}{EI} dS = -\frac{qa^4}{448EI}.$$

При этом может быть выбрана любая статически определимая система. В качестве статически определимой системы следует выбирать такую, чтобы единичная эпюра \bar{M}_i строилась наиболее просто, захватывала наименьшее количество участков и, по возможности, имела бы нулевые ординаты на тех участках, где эпюра M в статически неопределимой системе имеет наиболее сложное очертание.

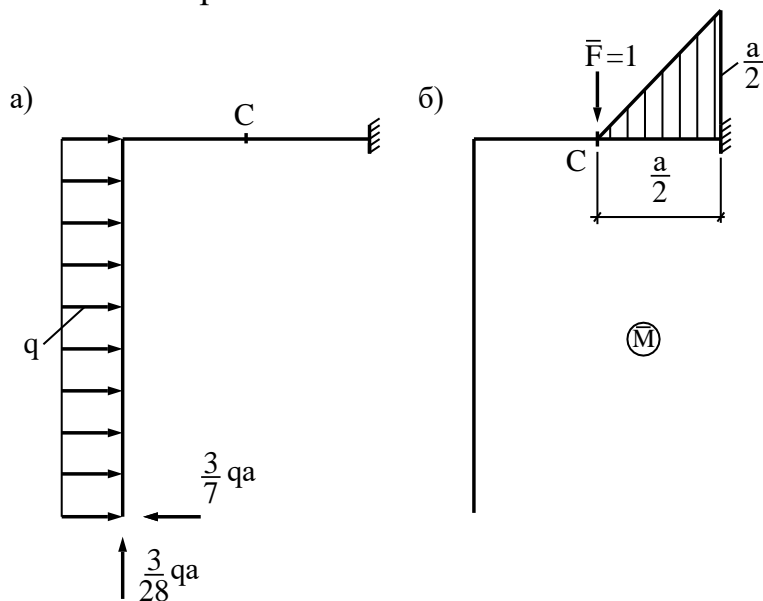


Рис. 4.9 – Определение перемещений при помощи грузового (а) в статически неопределимой системе и единичного (б) состояний статически определимой системы

3. Грузовое состояние рассматривается для любой статически определимой системы, образованной из заданной, а единичное – для статически неопределимой системы. Статическая неопределимость раскрывается только для единичного состояния.

При этом перемещение заданного сечения составит

$$\Delta_C = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_i}{EI} dS = -\frac{qa^4}{448EI}$$

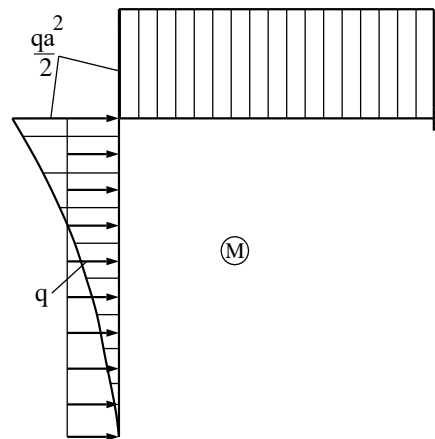


Рис. 4.10 – Определение перемещений при помощи грузового в статически определимой системе и единичного в статически неопределимой системе состояний

В зависимости от поставленных задач и имеющихся средств расчета используется один из трех изложенных вариантов, но поскольку расчетная эпюра от заданной нагрузки как правило уже построена, поэтому на практике реализуется именно второй вариант.

5 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

5.1 Основные допущения и основные неизвестные метода перемещений

Основные допущения метода перемещений:

Расчет ведется по недеформированному состоянию, то есть пренебрегают величинами перемещений по сравнению с размерами сооружения. Считается, что конфигурация системы не изменяется.

Концы стержней, сходящиеся в одном жестком узле, поворачиваются на один и тот же угол.

Углы поворота в виду их малости принимаются равными их тангенсу $tg\varphi \approx \varphi$.

Расстояние между узлами при деформации изгиба прямых стержней не изменяется.

Пренебрегают влиянием продольных (N) и поперечных (Q) сил на величину деформаций и перемещений узлов.

Как мы уже выяснили, при расчете статически неопределимой системы методом сил за «лишние» неизвестные принимаются усилия в «лиш-

них» связях (силы и моменты). Таким образом, сначала находят усилия, а потом уже перемещения.

Можно решать задачу иначе: сначала каким-либо путем найти перемещения, а потом установить соответствующее им распределение усилий. В этом заключается **идея метода перемещений**.

Установим, какие перемещения стержня необходимо и достаточно знать, чтобы можно было определить внутренние усилия в любом его сечении.

Любое положение стержня (A_1B_1) можно получить из начального в результате (см. Рис. 5.1):

1) поступательного (вертикального и горизонтального) перемещения точек стержня на различную величину ($\Delta V_A \neq \Delta V_B$, $\Delta H_A \neq \Delta H_B$);

2) поворота конца стержня на угол φ ;

3) перемещение точек оси стержня с двумя защемленными концами от действия заданной нагрузки;

4) перемещение одного из защемленных концов стержня в направлении перпендикулярном его оси.

Если удастся найти величины ΔV , ΔH и φ , то мы сможем определить внутренние усилия N , Q и M в произвольном сечении стержня.

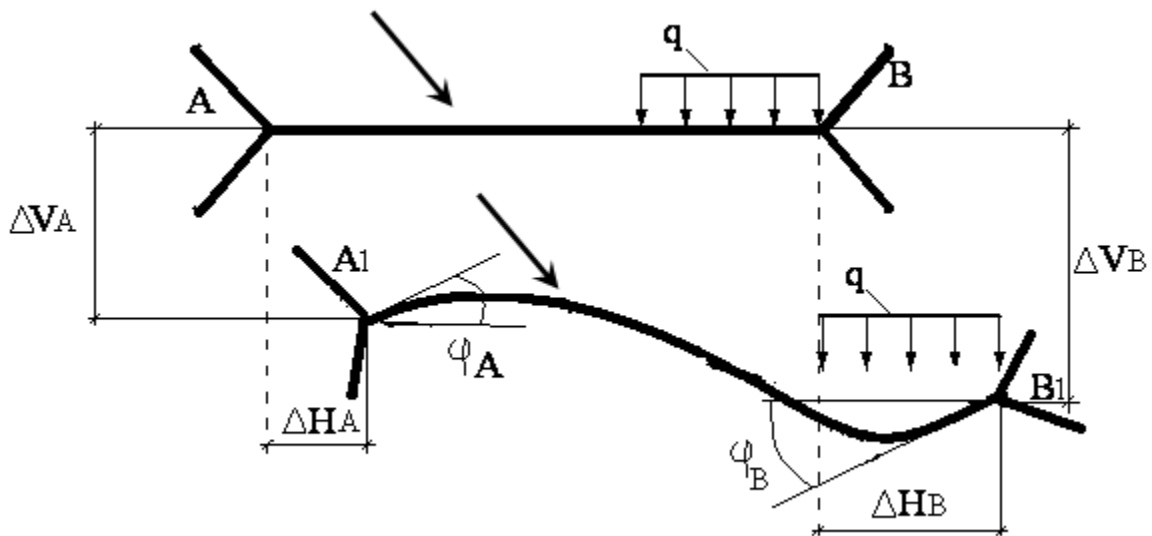


Рис. 5.1 - Линейные и угловые перемещения стержня, приобретаемые им в результате деформации

Поэтому за основные неизвестные при расчете статически неопределимой системы методом перемещений принимают углы поворотов жестких узлов и относительные линейные перемещения концов стержней перпендикулярно к продольной оси.

5.2 Определение числа неизвестных

Первоначально необходимо установить общее число неизвестных величин (степень кинематической неопределимости), подлежащих определению. **Степень кинематической подвижности (неопределимости)** – это число независимых параметров (линейных и угловых), определяющих деформированное состояние системы.

Если угловые и линейные перемещения нельзя найти с помощью одних только уравнений статики, то степень кинематической подвижности является **степенью кинематической неопределимости** и определяется как

$$n = n_y + n_l,$$

где n_y – число неизвестных угловых перемещений, определяемых подсчетом «жестких» узлов, способных поворачиваться.

n_l – число независимых линейных перемещений узлов системы, определяется как степень кинематической свободы шарнирной схемы (во все жесткие узлы, включая опорные, вводятся полные шарниры; консоли, как статически и кинематически определяемые элементы конструкции не учитываются)

$$n_l = Ш - 3К,$$

где Ш – количество простых шарниров (всех);

К – число замкнутых контуров.

Пр и м е ч а н и я:

1. При подсчете числа «жестких» узлов не включаются узлы, угловые перемещения которых заданы, например, жесткие закрепления, связывающие системы с «землей».

2. «Жестким» считается такой узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой Рис. 5.2.

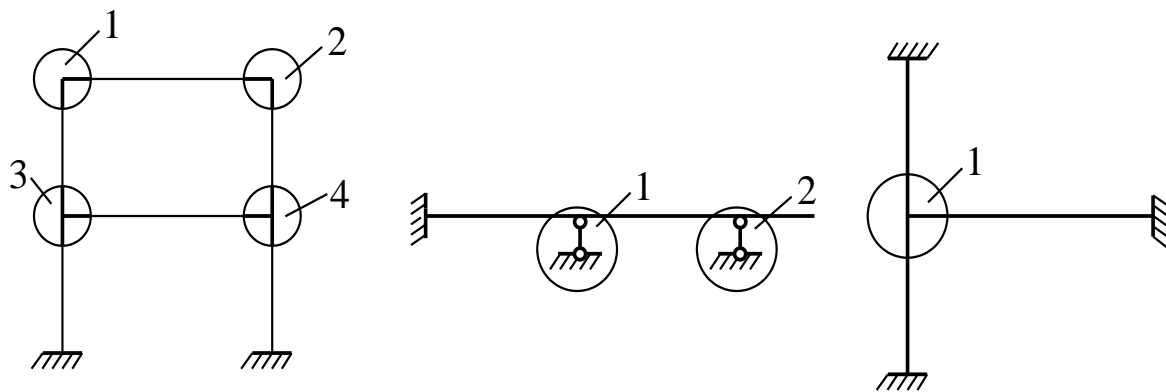
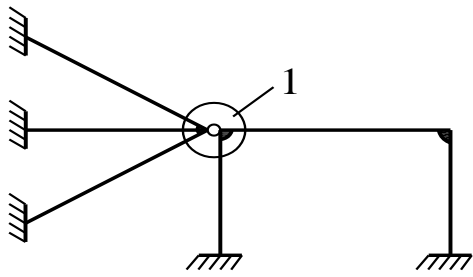
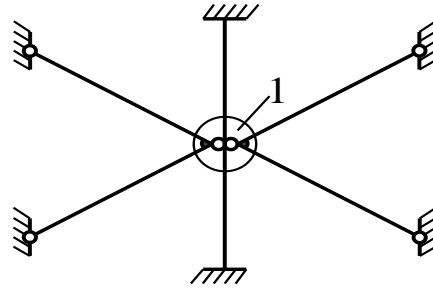


Рис. 5.2 - Схемы к понятию «жесткий» узел

Если стержни сходящиеся в каком-либо узле системы, соединены в несколько жестких групп, шарнирно связанных между собой, то такой узел имеет количество «жестких» узлов, равное числу групп, Рис. 5.3.



Два "жестких" узла



Три "жестких" узла

Рис. 5.3 - Схемы групп «жестких» узлов

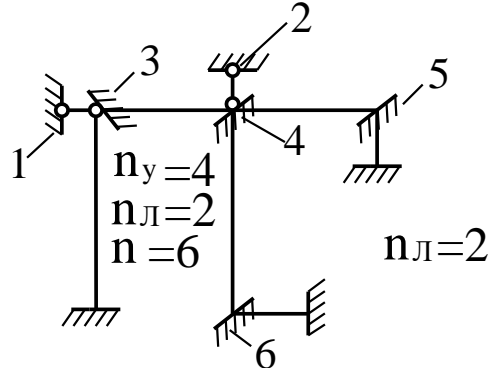
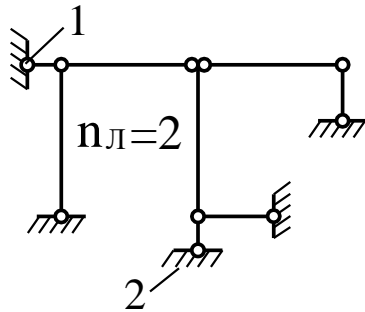
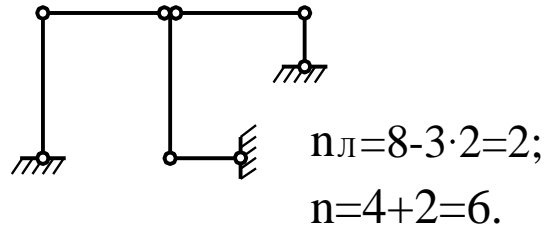
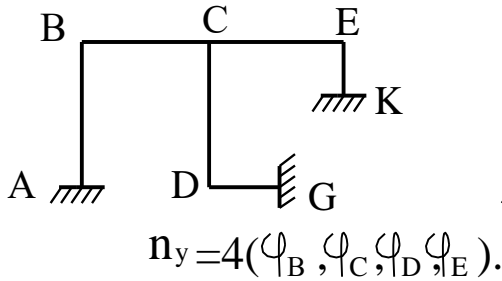
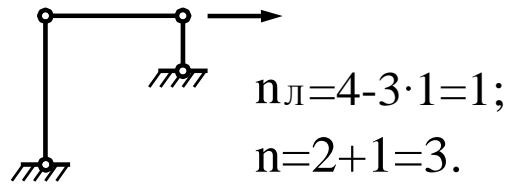
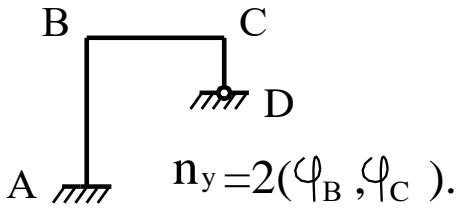


Рис. 5.4 - Примеры определения числа неизвестных угловых и линейных перемещений

Степень линейной неопределимости (n_L) может быть также определена как минимальное число связей (стержней с шарнирами по концам), которые необходимо ввести в шарнирную схему (иногда говорят «шарнирно-звеньевую» схему), чтобы все узлы были линейно неподвижны. В этом случае рекомендуется для упрощения анализа вводить шарниры не только во все жесткие узлы, но и в заделки. Примеры определения числа угловых и линейных неизвестных перемещений приведены на рисунке 5.4.

5.3 Выбор основной системы метода перемещений

Идея метода перемещений состоит в том, что расчет статически неопределимой системы (заданной) заменяется расчетом основной системы, полученной из заданной, путем наложения на нее (ввода) дополнительных связей. Вводом дополнительных связей заданная система разбивается на ряд однопролетных статически неопределимых балок, работающих независимо друг от друга. Усилия в балках возникают от нагрузок, приложенных непосредственно к этим балкам, а передача усилий с одной балки на соседние исключается. Предполагается, что результаты расчета статически неопределимых однопролетных балок на силовые и не силовые загрузки заранее известны (имеются табличные данные).

Основная система должна быть кинематически определимой и работать эквивалентно заданной. Это достигается загрузкой основной системы заданной нагрузкой и введением дополнительных связей двух типов:

а) **моментные связи**, которые препятствуют только угловым перемещениям и не стесняют линейных перемещений (возникает только реактивный момент) накладываются на все жесткие узлы

б) линейные связи (стержни с шарнирами по концам) – **силовые связи**, которые препятствуют только линейным перемещениям (возникает только сосредоточенная реактивная сила).

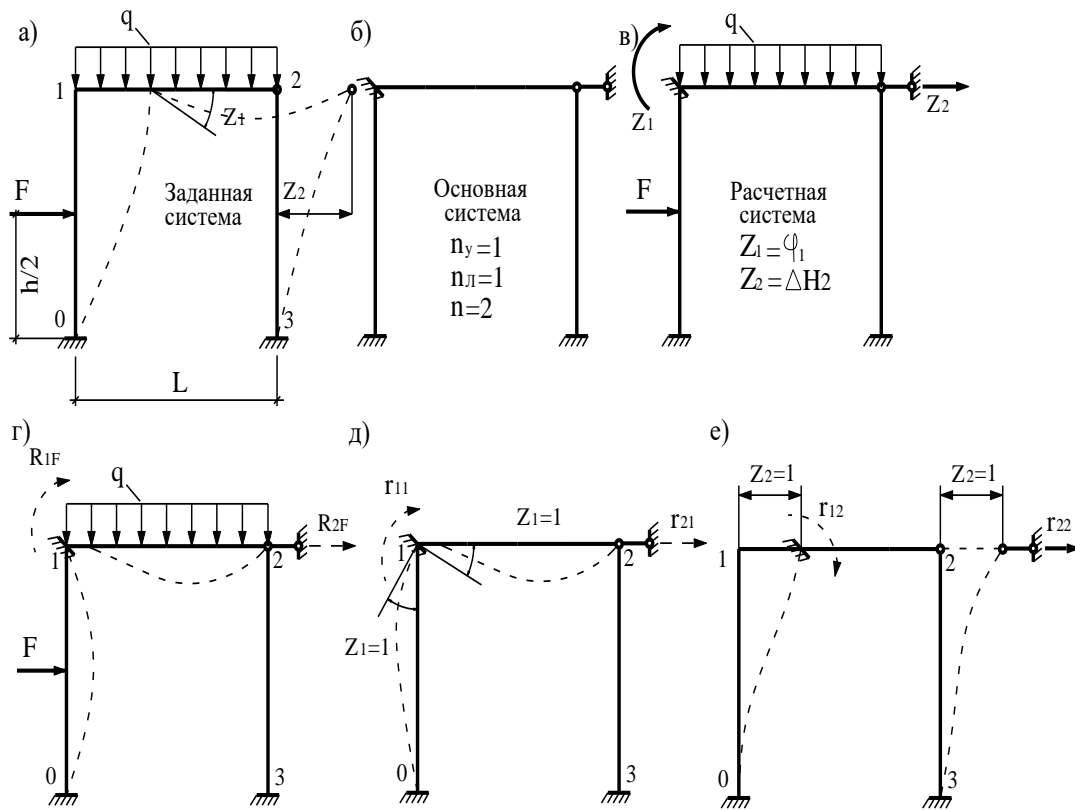
Таким образом, для получения основной системы метода перемещений необходимо:

- 1) в все «жесткие» узлы заданной системы наложить моментные связи, препятствующие повороту узлов;
- 2) ввести в заданную систему стержни, препятствующие линейным смещениям узлов.

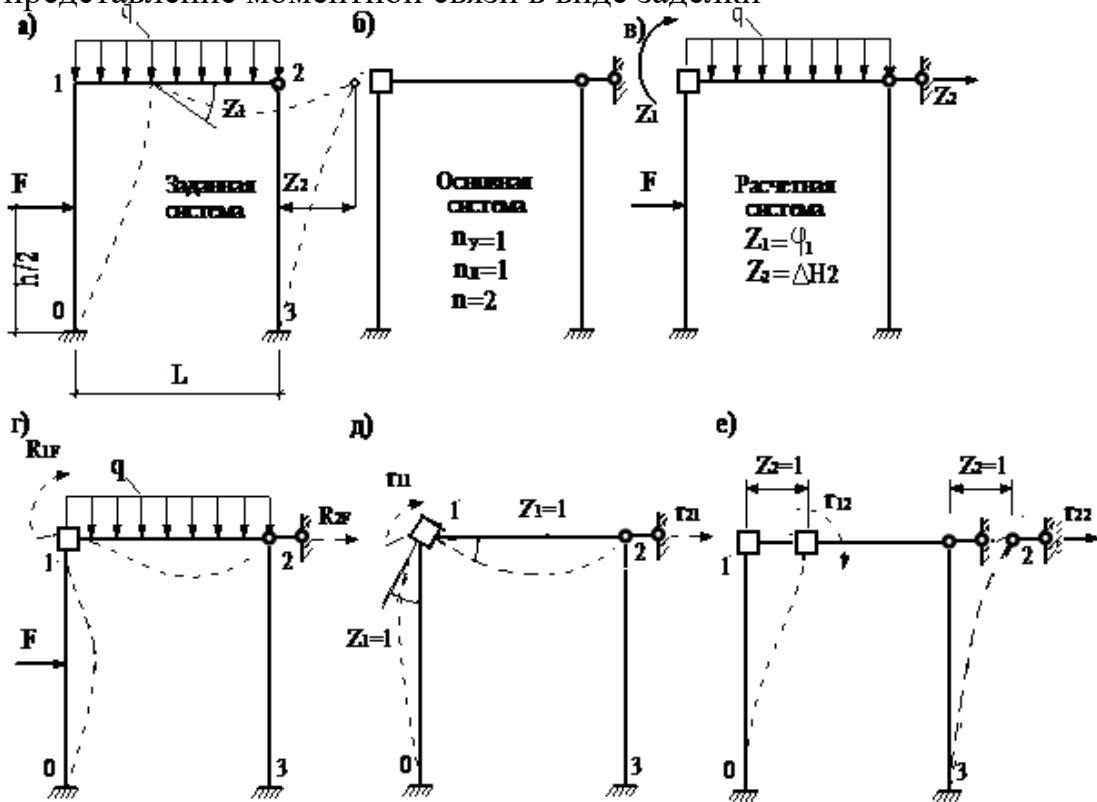
Количество и место ввода стержневых связей устанавливается в два этапа:

- 1) заданная система путем ввода шарниров во все узлы (включая опорные) превращается в шарнирно – звеньевую;
- 2) выполняется анализ образования полученной системы: если шарнирно-звеньевая система является геометрически неизменяемой, то постановки стержней не требуется, в противном случае ставится минимальное количество стержневых связей, чтобы превратить систему в геометрически неизменяемую (см. Рис. 5.4).

Примечание. Основная система метода перемещений может быть по существу получена единственным образом.



I - представление моментной связи в виде заделки



II – представление моментной связи в виде прямоугольника

Рис. 5.5 - Схемы рамы к составлению канонических уравнений метода перемещений: на частях I и II представлены возможные способы изображе-

ния моментных связей: I- в виде заделки или II – в виде прямоугольника; а - заданная система; б - основная система; в - расчетная система; г - деформация системы и реактивные усилия во введенных связях от заданной нагрузки; д - деформация системы и реактивные усилия во введенных связях от поворота узла; е - деформация системы и реактивные усилия во введенных связях от линейного смещения узлов 1 и 2.

5.4 Канонические уравнения метода перемещений

Для эквивалентности основной системы заданной кроме введения внешней нагрузки, надо повернуть жесткие заделки и сместить линейные связи на величины равные действительным поворотам узлов и их линейным смещениям, с тем, чтобы реактивные моменты и силы во введенных связях обратились в нуль. После этого деформации основной системы и усилия в ней будут равны деформациям и усилиям заданной системы. В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рисунке 5.5.

Тогда, уравнения метода перемещений можно представить так

$$R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_n = 0,$$

где R_1, R_2, R_n – реактивные моменты и усилия во введенных связях от действия заданной нагрузки, поворотов узлов и их линейных смещений.

Представим первое уравнение $R_1 = 0$; развернутом виде

$$R_{1F} + R_{11} + R_{12} = 0,$$

где R_{1F} – реактивный момент во введенной заделке от действия заданной нагрузки (q и F);

R_{11} – реактивный момент в заделке от поворота ее на угол Z_1 ;

R_{12} – реактивный момент в заделке от линейного смещения узлов 1 и 2 на величину Z_2

В свою очередь

$$R_{11} = Z_1 r_{11} \text{ и } R_{12} = Z_2 r_{12},$$

где r_{11} – реактивный момент в заделке от поворота ее на угол $Z_1=1$;

r_{12} – реактивный момент в заделке от смещения по горизонтали узла 2 на величину $Z_2 = 1$.

Тогда

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R_{1F} = 0.$$

Аналогично для второго уравнения

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2F} = 0,$$

где r_{21} – реактивное усилие в стержне от поворота заделки на угол $Z_1=1$;

r_{22} – реактивное усилие в стержне от линейного смещения узлов 1

и 2 на величину $Z_2 = 1$

R_{2F} – реактивное усилие в стержне от заданной нагрузки.

Смысл первого уравнения состоит в отрицании момента во введенной заделке, а второго в отрицании усилия во введенном стержне.

Коэффициенты (реакции) $r_{12}, r_{21}, \dots, r_{n\bar{k}}$ называют побочными, а свободные члены $R_{1F}, R_{2F}, \dots, R_{nF}$ – грузовыми реакциями. Как и в уравнениях метода сил, коэффициенты при неизвестных, расположенные симметрично относительно главной диагонали связаны между собой условием взаимности $r_{n\bar{k}} = r_{\bar{k}n}$.

Таким образом, уравнения метода перемещений – *статические*, так как это уравнения равновесия, а уравнения метода сил – *кинематические*, так как это уравнения перемещений.

Система канонических уравнений метода перемещений отличается от аналогичной системы метода сил тем, что вместо коэффициентов $\delta_{i\bar{k}}$ и грузовых членов Δ_{iF} , выражающих перемещения в основной системе, в нее входят коэффициенты $r_{n\bar{k}}$ и грузовые члены R_{nF} , выражающие реакции дополнительных закреплений в основной системе, а вместо неизвестных усилий X – неизвестные перемещения Z .

5.5 Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений

Предварительно необходимо построить грузовую M_F и единичные (\bar{M}_1, \bar{M}_2) эпюры моментов в основной системе метода перемещений. Эти эпюры строят с помощью табличных данных.

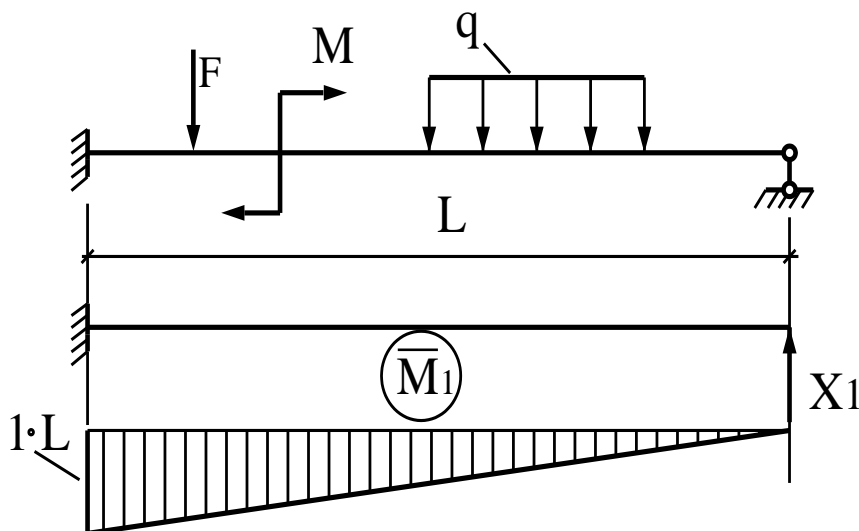


Рис. 5.6 - Однопролетная статически неопределимая балка

Перейдем к изучению элементов, из которых состоит основная система метода перемещений (см. Рис. 5.6).

При любом внешнем воздействии неизвестное X_1 определяется как

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0;$$

где:
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L = \frac{L^3}{3EI}.$$

Рассмотрим некоторые случаи возможного воздействия на балку.

1. Балка, нагружена равномерно распределенной нагрузкой (Рис. 5.7).

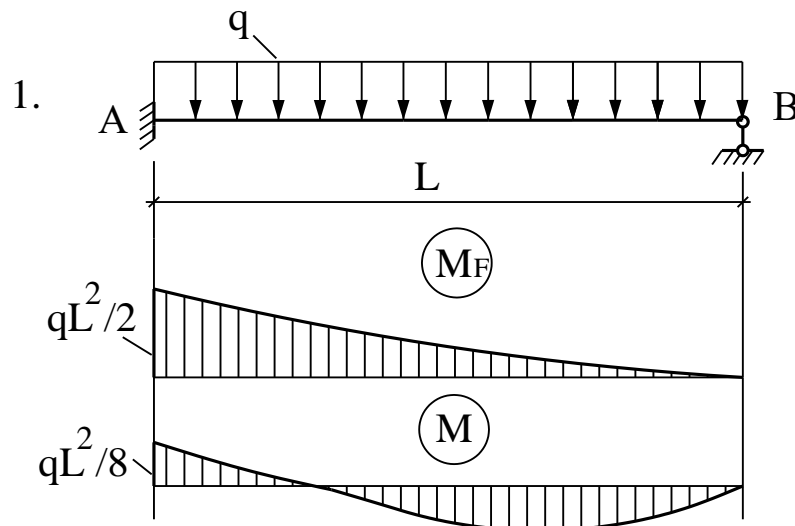


Рис. 5.7 - Однопролетная статически неопределимая балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

Для случая показанного на рисунке 5.7, значения опорных реакций составят

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qL^2}{2} L \cdot \frac{3}{4} L = -\frac{qL^4}{8EI};$$

$$X_1 = V_B = \frac{3qL}{8}; \quad \Rightarrow \quad V_A = qL - V_B = 5qL/8;$$

$$M_A = -\frac{qL^2}{8}.$$

2. Балка, нагруженная сосредоточенной силой (см. Рис. 5.8).

Перемещение Δ_{1F} получим, «умножив» эпюру M_F на эпюру \bar{M}_1

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fu^2L^2}{2EI} L \left(\frac{2}{3}u + v \right);$$

Так как $uL + vL = L$, то :: $v = 1 - u$.

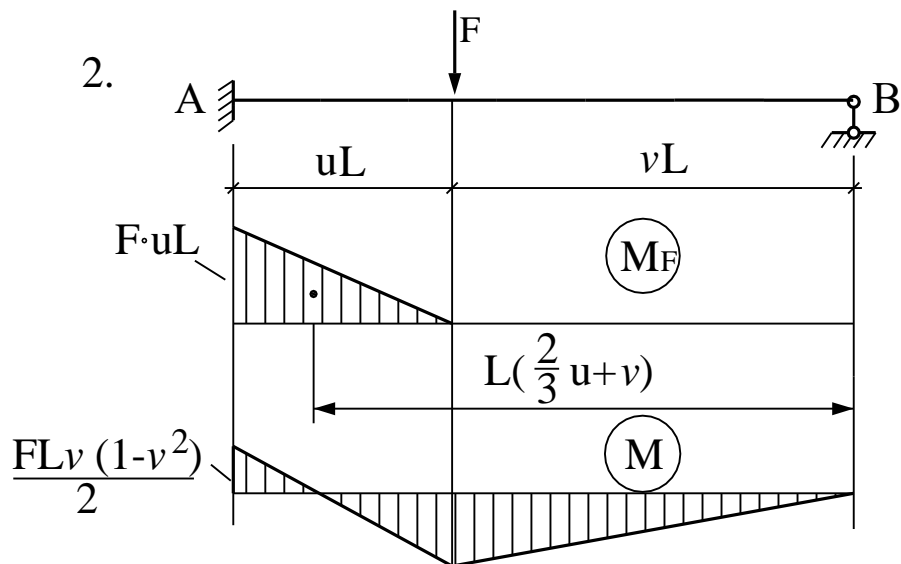


Рис. 5.8 - Однопролетная статически неопределимая балка, нагруженная сосредоточенной силой

В данном случае значения опорных реакций будут равны

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fu^2L^3}{6EI} (3 - U);$$

$$X_1 = V_B = \frac{Fu^2}{2} (3 - U); \quad \Rightarrow \quad V_A = F - V_B = \frac{Fv}{2} (3 - v^2);$$

$$M_A = -\frac{FLv}{2} (1 - v^2).$$

3. Перемещение заделки на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня (см. Рис. 5.9).

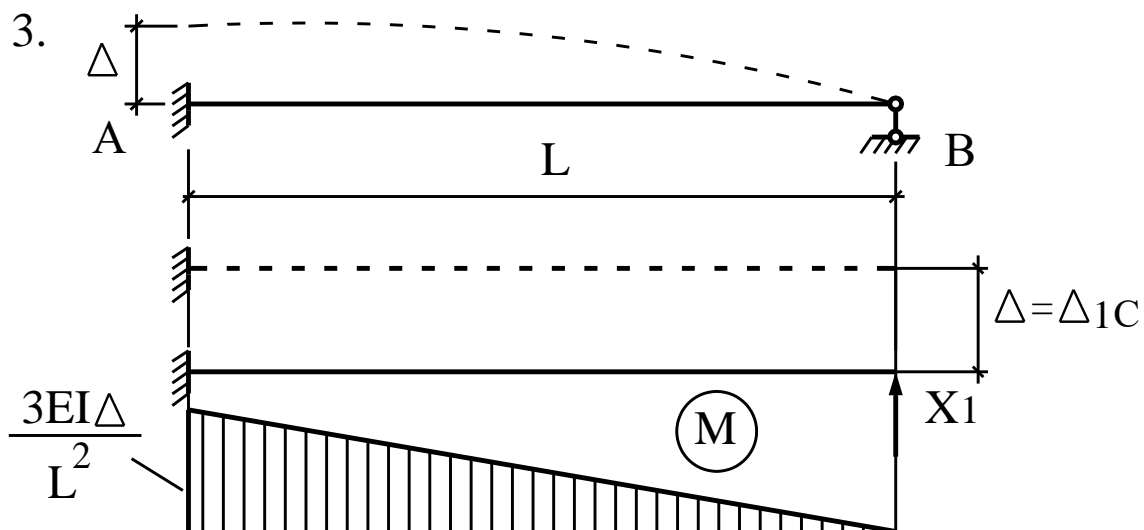


Рис. 5.9 - Перемещение заделки однопролетной статически неопределимой балки

В этом случае эпюра M в основной системе от смещения отсутствует.
Из уравнения найдем

$$X_1 \frac{L^3}{3EI} + \Delta_{1C} = 0, \Rightarrow X_1 = -\frac{3EI\Delta}{L^3};$$

Тогда значения опорных реакций составят

$$V_B = X_1 = -\frac{3EI\Delta}{L^3};$$

$$V_A = -X_1 = \frac{3EI\Delta}{L^3};$$

$$M_A = -\frac{3EI\Delta}{L^2}.$$

4. Поворот заделки на угол φ (см. Рис. 5.10).

Перемещение Δ_{1C} и опорные реакции для данного случая будут равны

$$\Delta_{1C} = -\varphi L;$$

$$X_1 = \frac{3EI\varphi}{L^2};$$

$$V_B = X_1 = \frac{3EI\varphi}{L^2}; \quad V_A = -X_1 = -\frac{3EI\varphi}{L^2};$$

$$M_A = \frac{3EI\varphi}{L}.$$

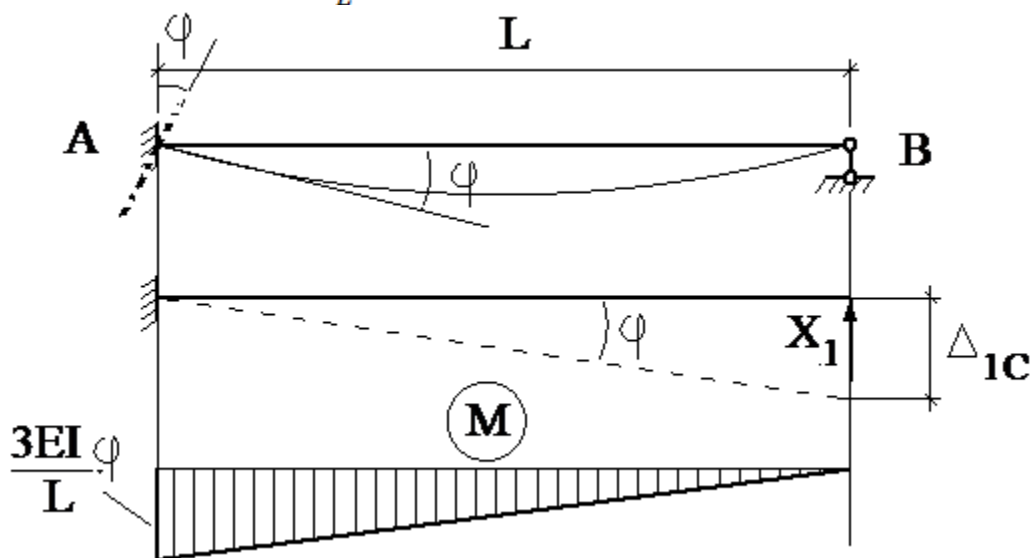


Рис. 5.10 - Поворот заделки однопролетной статически неопределимой балки

5. Действие неравномерного нагрева (см. Рис. 5.11).

Перемещение Δ_{1t} и опорные реакции определяются из выражений

$$\Delta_{1t} = -\alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{L^2}{2};$$

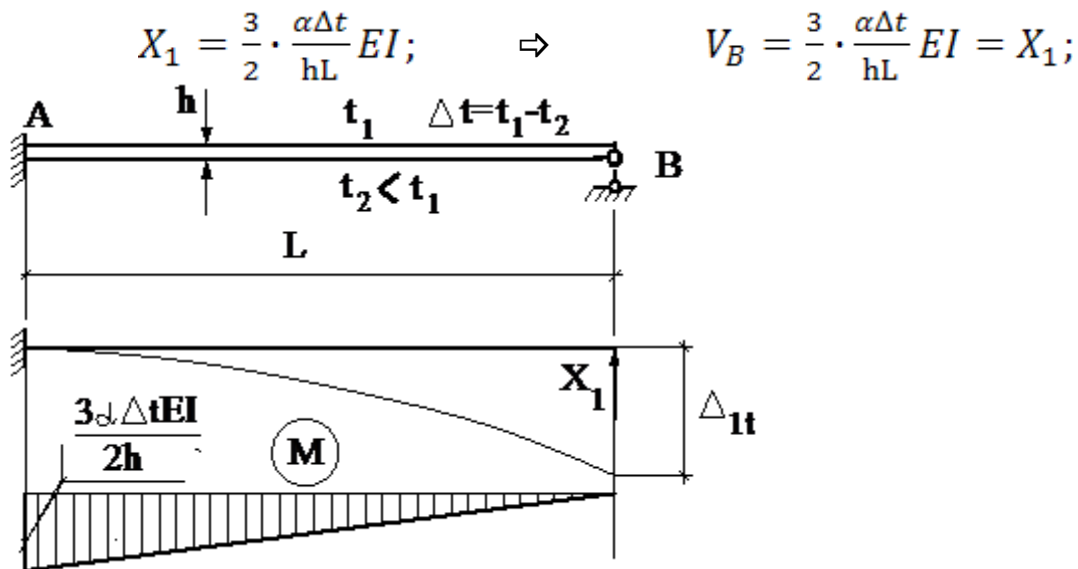


Рис. 5.11 - Неравномерный нагрев однопролетной статически неопределимой балки

$$V_A = -V_B;$$

$$M_A = -\frac{3\alpha\Delta t}{2h} EI.$$

Вид эпюр и значения их характерных ординат для других случаев загрузки балок могут быть получены аналогичным способом.

Используя табличные данные, строим грузовую (M_F) и единичные эпюры (\bar{M}_1, \bar{M}_2) изгибающих моментов в основной системе метода перемещений (см. Рис. 5.12). После этого можно перейти к определению коэффициентов при неизвестных (r_{nk}) и свободных членов (R_{nF}) канонических уравнений.

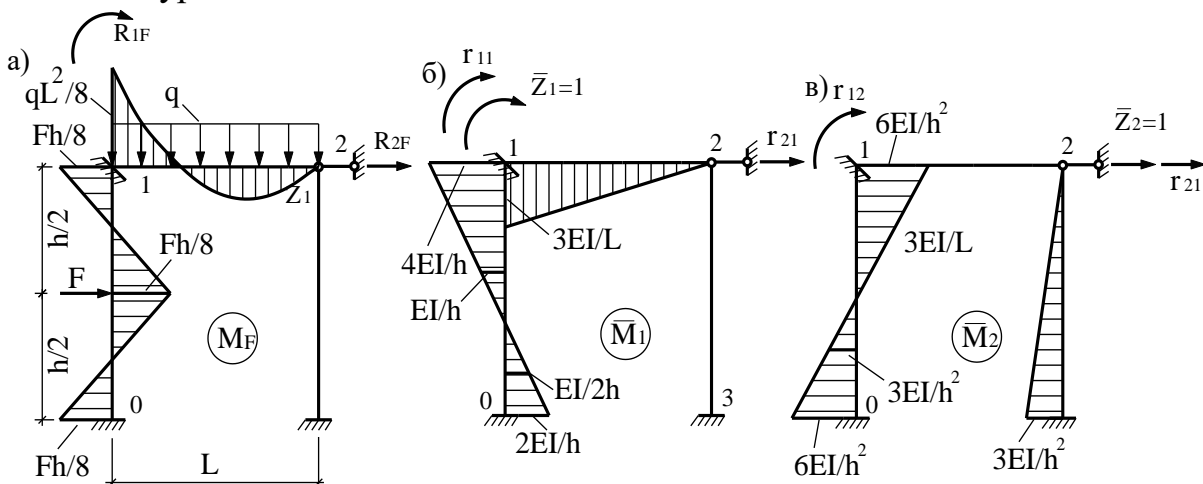


Рис. 5.12 - Грузовая (а) и единичные (б,в) эпюры изгибающих моментов, построенные с помощью табличных данных

Для определения коэффициентов можно использовать два способа:

1. Статический способ

Так как коэффициенты при неизвестных (r_{nk}) и свободные члены (R_{nF}) представляют собой реактивные моменты и сосредоточенные силы, то они могут быть определены из условий равновесия узлов и частей рамы. Предварительно разделим их на две группы:

а) r_{nk} и R_{nF} , представляющие реактивные моменты во введенных моментных связях, определяются вырезанием узлов (см. Рис. 5.13, а) и составлением уравнений равновесия вида $\sum M = 0$:

$$\begin{aligned} \sum M_{(1)} = 0; & \quad \sum M_{(1)} = 0; & \quad \sum M_{(1)} = 0; \\ R_{1F} + \frac{qL^2}{8} - \frac{Fh}{8} = 0; & \quad r_{11} - \frac{3EI}{L} - \frac{4EI}{h} = 0; & \quad r_{12} = -6EI/h^2 \\ R_{1F} = Fh/8 - qL^2/8. & \quad r_{11} = 3EI/L + 4EI/h. & \end{aligned}$$

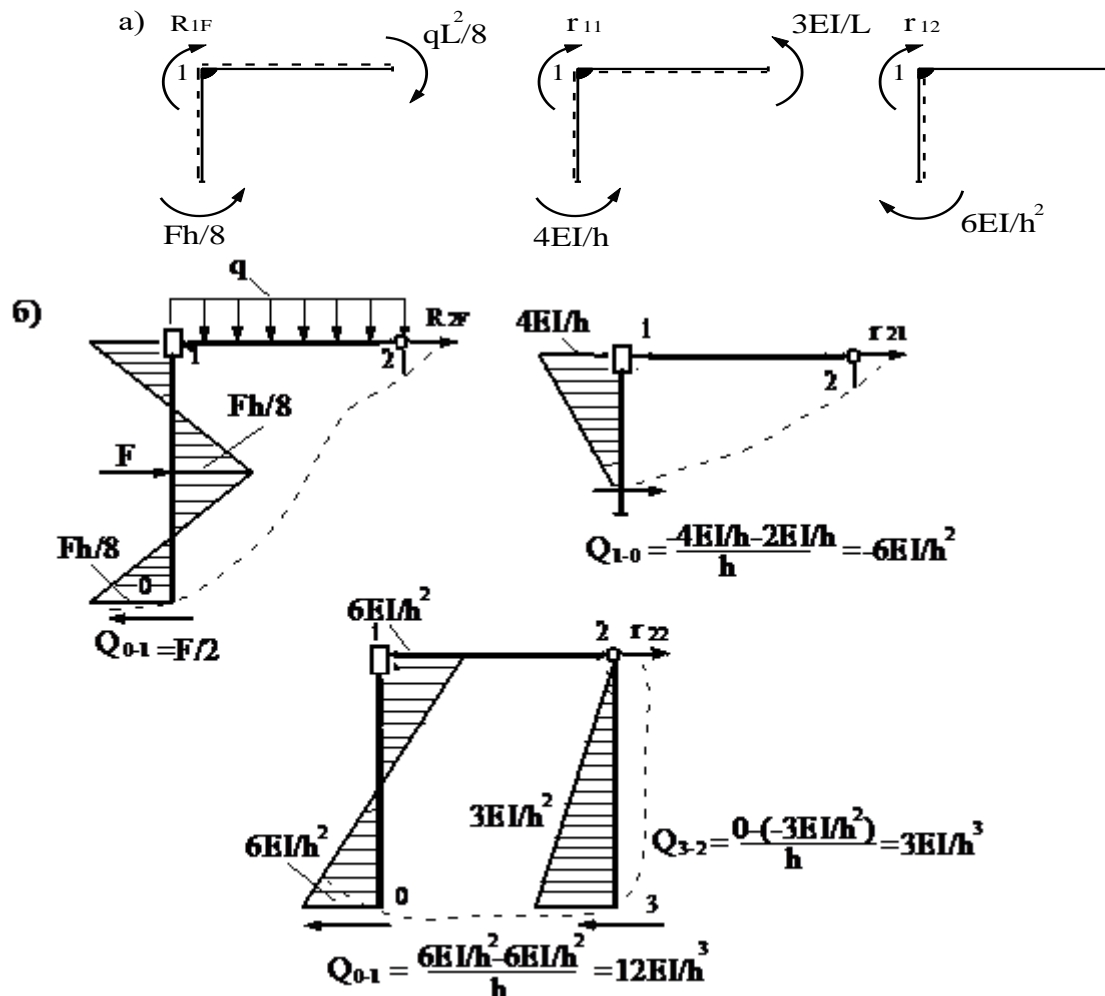


Рис. 5.13 - Схема сечений элементов рамы и действующие в них внутренние усилия

б) r_{nk} и R_{nF} , представляющие реактивные усилия во введенных силовых (стержневых) связях, определяются при помощи метода сечений. Сечения проводим так, чтобы в уравнения равновесия *не входили* продольные силы элементов рамы (см. Рис. 5.13, б), и составляем уравнения равновесия сил, действующих на рассматриваемую часть, $\sum Q = 0$:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \sum X &= 0; & \sum X &= 0; \\ F + R_{2F} - Q_{1-0} &= 0; & r_{21} + Q_{1-0} &= 0; & r_{22} - Q_{1-0} - Q_{3-2} &= 0; \\ R_{2F} &= -F/2. & r_{21} &= -6EI/h^2. & r_{22} &= \frac{12EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3} = \frac{15EI}{h^3}. \end{aligned}$$

2. Способ «перемножения» эпюр (энергетический)

Предыдущий способ не рационален при расчете рам с наклонными наклонными элементами.

Рассмотрим два состояния системы: "n" и "k", см. Рис. 5.14.

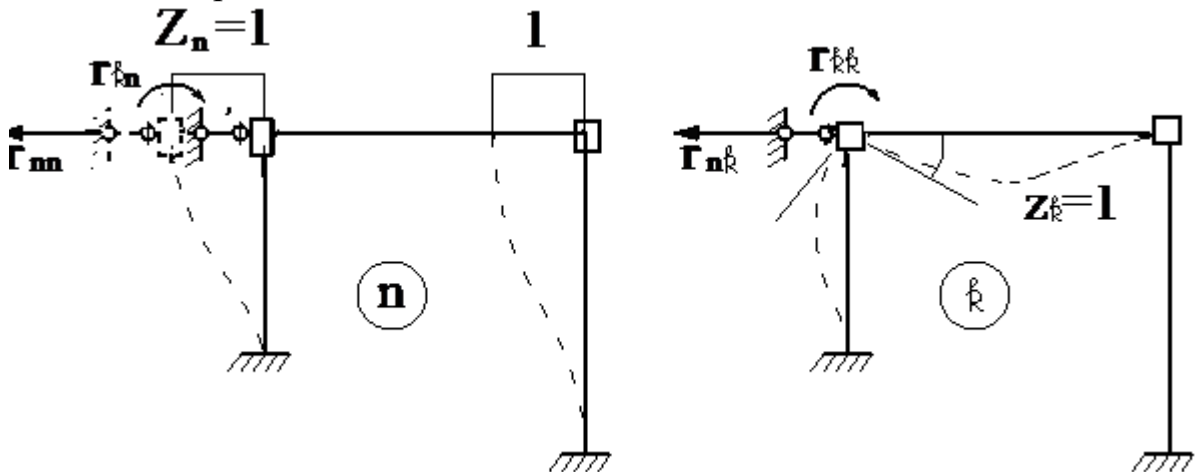


Рис. 5.14 - Схема к определению коэффициентов при неизвестных канонических уравнений метода перемещений

Выразим работу $A_{kn} = A_{nk}$ внешних сил состояния "k" на перемещениях состояния "n" через изгибающие моменты в поперечных сечениях стержней в этих состояниях

$$\begin{aligned} A_{kn} &= r_{nk} \cdot 1 = \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_k}{EI} dS, \\ r_{nk} &= \sum \int \bar{M}_n \bar{M}_k \frac{dS}{EI}. \end{aligned}$$

На основании теоремы о взаимности работ

$$A_{kn} = A_{nk},$$

но

$$A_{kn} = r_{nk} \cdot 1 \text{ и } A_{nk} = r_{kn} \cdot 1,$$

следовательно,

$$r_{kn} = r_{nk} \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) выражает **теорему о взаимности реакций**: реакция по направлению " k " от единичного смещения связи " n " равна реакции по направлению " n " от единичного смещения связи " k ".

Определим коэффициенты r_{12} и r_{22} для рассматриваемого примера (см. Рис. 5.12). Перемножив единичные эпюры получим

$$r_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_k}{EI} dS = \frac{h}{6EI} \left[-\frac{2EI}{h} \cdot \frac{6EI}{h^2} + 4 \cdot \frac{EI}{h} \cdot 0 - \frac{4EI}{h} \cdot \frac{6EI}{h^2} \right] = -\frac{6EI}{h^2}$$

$$r_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dS = \frac{h}{6EI} \left[\left(\frac{6EI}{h^2} \right)^2 + \left(\frac{6EI}{h^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{3EI}{h^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EI}{h^2} = \frac{15EI}{h^3},$$

что совпадает с результатом, полученным статическим способом.

Перейдем к определению свободных членов канонических уравнений, для чего рассмотрим два состояния системы: " F " и " n ", Рис. 5.15.

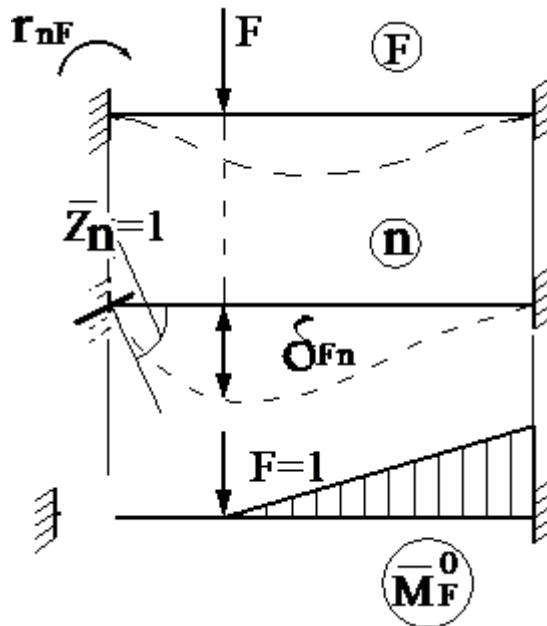


Рис. 5.15 - Схема к определению свободных членов канонических уравнений методом перемещений

Работа внешних сил состояния " F " на перемещениях " n "

$$A_{Fn} = F\delta_{Fn} + R_{nF} \cdot 1.$$

Работа внешних сил состояния " n " на перемещениях " F "

$$A_{nF} = 0.$$

На основании теоремы о взаимности работ $A_{Fn} = A_{nF}$, значит

$$R_{nF} = -F\delta_{Fn},$$

где δ_{Fn} – перемещение статически неопределимой основной системы в состоянии "n" по направлению F ("F").

При $F=1$ получим теорему Рэлея о взаимности реакции и перемещения:

$$\boxed{r_{nF} = -\delta_{Fn}},$$

Найдем величину δ_{Fn}

$$\delta_{Fn} = \sum \int \bar{M}_F^0 \cdot \frac{\bar{M}_n}{EI} dS.$$

Подставим значение δ_{Fn} в выражение для R_{nF}

$$R_{nF} = -F \sum \int \bar{M}_F^0 \cdot \frac{\bar{M}_n}{EI} dS.$$

Введем обозначение $F\bar{M}_F^0 = M_F^0$ и получим

$$R_{nF} = - \sum \int \bar{M}_n \cdot \frac{M_F^0}{EI} dS,$$

где M_F^0 – ординаты эпюры M от нагрузки F в любой статически определенной системе, полученной из заданной, т.е. в Основной системе метода сил.

Найдем реакции R_{1F} и R_{2F} для рассматриваемого примера (см. Рис. 5.12 и см. Рис. 5.16):

$$R_{1F} = - \sum \int \frac{M_F^0 \bar{M}_1}{EI} dS = - \left(\left[-\frac{2EI}{h} \cdot \frac{Fh}{2} - 4 \frac{EI}{2h} \cdot \frac{Fh}{4} \right] \cdot \frac{h}{2} + \frac{L}{6EI} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{L} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot 4 \right] \right) =$$

$$= \frac{Fh}{2} - \frac{qL^2}{8},$$

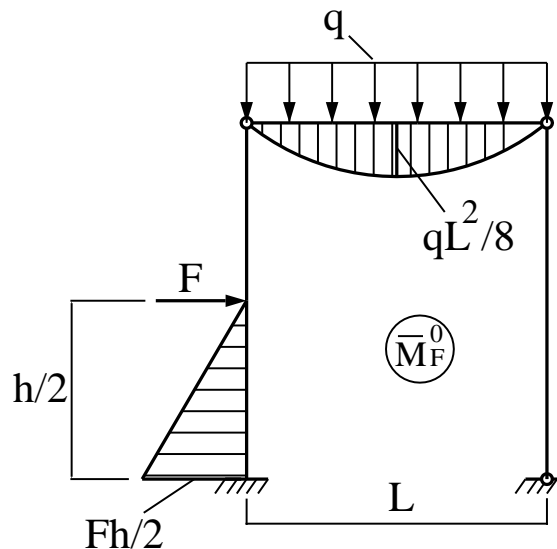


Рис. 5.16 - Эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки в основной системе метода сил для рассматриваемой рамы

$$R_{2F} = - \sum \int \frac{M_F^0 \bar{M}_2}{EI} dS = - \left(\left[-\frac{6EI}{h^2} \cdot \frac{Fh}{2} + 4 \frac{3EI}{h^2} \cdot \frac{Fh}{4} \right] \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{-F}{2},$$

что совпадает с результатом, полученным статическим способом.

Примечания:

1. При определении r_{nk} и R_{nF} реактивное усилие во введенной связи считается положительным, если его направление совпадает с предполагаемым смещением соответствующей связи.
2. Коэффициенты r_{nk} и r_{kn} определяются независимо друг от друга. Поэтому равенство этих коэффициентов является дополнительной проверкой.

5.6 Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений

Для этого строится суммарная единичная эпюра в основной системе метода перемещений

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i.$$

Далее выполняют следующие проверки.

1. Универсальная проверка коэффициентов при неизвестных заключается в соблюдении равенства

$$r_{SS} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ik},$$

где

$$r_{SS} = \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI} dS;$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ik} = r_{12} + r_{22} + \dots + r_{nn} + 2(r_{12} + r_{13} + \dots + r_{ik}).$$

При этом погрешность вычислений не должна превышать

$$\Delta_{r\%} = r_{SS} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ik} \leq 1\%.$$

2. Если универсальная проверка не соблюдается, то производят *построчную* проверку (каждое уравнение – горизонтальная строка – проверяется отдельно) для уточнения области, в которой допущена ошибка

$$r_{iS} = \sum_{i=1}^n r_{i1},$$

где r_{iS} – сумма коэффициентов при неизвестных i – го уравнения

$$r_{iS} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S}{EI} dS ;$$

$$\sum_{i=1}^n r_{ik} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}.$$

Проверка свободных членов заключается в соблюдении условия

$$R_{SF} = \sum_{i=1}^n R_{iF},$$

где

$$R_{SF} = - \sum \int \frac{M_F^0 \bar{M}_S}{EI} dS.$$

Здесь M_F^0 – эпюра M_F в любой основной системе метода сил.

$$\sum_{i=1}^n R_{iF} = R_{1F} + R_{2F} + \dots + R_{nF}.$$

Погрешность вычислений не должны превышать

$$\Delta_{R\%} = R_{SF} - \sum_{i=1}^n R_{iF} \leq 1\%.$$

5.7 Построение расчетных эпюр M, Q и N в заданной системе

Решение и проверка канонических уравнений выполняются также, как и в методе сил.

После нахождения основных неизвестных, строят единичные исправленные эпюры $\bar{M}_1 \cdot Z_1, \bar{M}_2 \cdot Z_2, \dots, \bar{M}_n \cdot Z_n$ и затем окончательную (расчетную) эпюру M

$$M = M_F + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n.$$

Проверка окончательной (расчетной) эпюры M заключается в проверке равновесия всех жестких узлов. Несоблюдение условия равновесия $\sum M = 0$ будет свидетельствовать о неправильном определении значений неизвестных.

Далее по эпюре M, как в методе сил, строится эпюра Q, а по эпюре Q – эпюра продольных сил (N).

5.8 Проверки окончательных эпюр M, Q и N

Статическая проверка. Используя построенные эпюры M, Q и N, вырезая опорные узлы, определяют опорные реакции. Затем, составляя условия равновесия как рамы в целом, так и ее отдельных частей, выполняют статическую проверку, исходя из условий

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0.$$

Деформационная (кинематическая) проверка. Для выполнения проверки выбирается любая основная система метода сил и строятся эпюры изгибающих моментов от единичных сил \bar{X}_i , приложенных по направлению удаленных связей.

Проверка выполняется по суммарной единичной эпюре

$$\bar{M}_S^0 = \bar{M}_1^0 + \bar{M}_2^0 + \dots + \bar{M}_n^0$$

или по каждой из единичных эпюр в отдельности, так чтобы выбранные эпюры \bar{M}_i^0 охватывали все участки рамы

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S^0 M}{EI} dS = 0$$

или

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1^0 M}{EI} dS = 0; \sum \int \frac{\bar{M}_2^0 M}{EI} dS = 0; \sum \int \frac{\bar{M}_n^0 M}{EI} dS = 0.$$

Допускаемая погрешность должна быть не более $\Delta\% \leq 3\%$ от суммы положительных или отрицательных слагаемых в уравнении.

5.9 Порядок расчета статически неопределимых рам методом перемещений

Расчет выполняют в следующем порядке:

Вычерчивают в масштабе заданную систему и показывают нагрузки

(Рис.1).

1. Выбирают основную систему метода перемещений:
 - Дополнительно вычерчивают заданную систему на все её жёсткие узлы накладывают моментные связи (Рис.№2).
 - Вычерчивают шарнирно-звеньевую схему (врезая шарниры во все жесткие узлы, на которые были наложены моментные связи, а также в заделки) и расставляют силовые (стержневые) связи так, чтобы шарнирно-звеньевая схема стала геометрически неизменяемой (Рис.№3).
 - Еще раз вычерчивают заданную систему и на неё накладывают все моментные и силовые связи (Рис.№4).
2. Составляют канонические уравнения в общем виде.
3. Строят грузовую M_F и единичные $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ эпюры моментов в основной системе метода перемещений.
4. Определяют коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений (статическим или энергетическим способом).
5. Строят суммарную единичную эпюру \bar{M}_S метода перемещений и грузовую эпюру M_F^0 в любой основной системе метода сил, после чего проверяют коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений.
6. Решают канонические уравнения, определяя основные неизвестные.
7. Строят исправленные единичные эпюры изгибающих моментов $M_1 Z_1, M_2 Z_2, \dots, M_n Z_n$
8. Строят эпюры внутренних усилий в заданной статически неопределенной системе:
9. а) расчетную эпюру $M_{расч} = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_F$
10. б) эпюру $Q_{расч}$, используя построенную $M_{расч}$;
11. в) расчетную эпюру $N_{расч}$, вырезая узлы и рассматривая их равновесие при найденных значениях $Q_{расч}$.
12. Определяют опорные реакции, вырезая опорные узлы и рассматривая их равновесие при найденных значениях $M_{расч}$, $Q_{расч}$ и $N_{расч}$.
13. Выполняют статическую проверку как рамы в целом, так и ее отдельных частей.
14. Производят кинематическую (деформационную) проверку, предварительно построив единичные эпюры моментов в любой основной системе метода сил.

6 БОКОВОЕ ДАВЛЕНИЕ ГРУНТА И РАСЧЕТ ПОДПОРНЫХ СТЕН

6.1. Классификация подпорных стен

Подпорными стенами называют сооружения, предназначенные для

удержания грунта или какого либо другого сыпучего тела от обрушения.

Сыпучим телом называется совокупность мелких по сравнению с общим объемом тела твердых частиц, более или менее округлой формы.

Подпорные стены являются одним из широко распространенных видов строительных конструкций, используемых в гидротехническом строительстве. Они являются важнейшим элементом шлюзов, рыбопропускных и рыбозащитных сооружений, служат в качестве берегоукрепительных сооружений, используются для крепления котлованов, траншей, устройства водовыпусков, ограждений искусственных водоемов, противооползневых конструкций, стенок быстротоков, водобойных колодцев

Подпорные стены по конструктивному решению подразделяются на следующие типы.

1. М а с с и в н ы е.

Устойчивость массивных подпорных стен на сдвиг и опрокидывание обеспечивается их собственным весом.

2. Т о н к о с т е н н ы е у г о л к о в о г о п р о ф и л я.

Устойчивость тонкостенных подпорных стен углового профиля обеспечивается, в основном, весом грунта, лежащим на фундаментной плите и в меньшей степени – собственным весом стен.

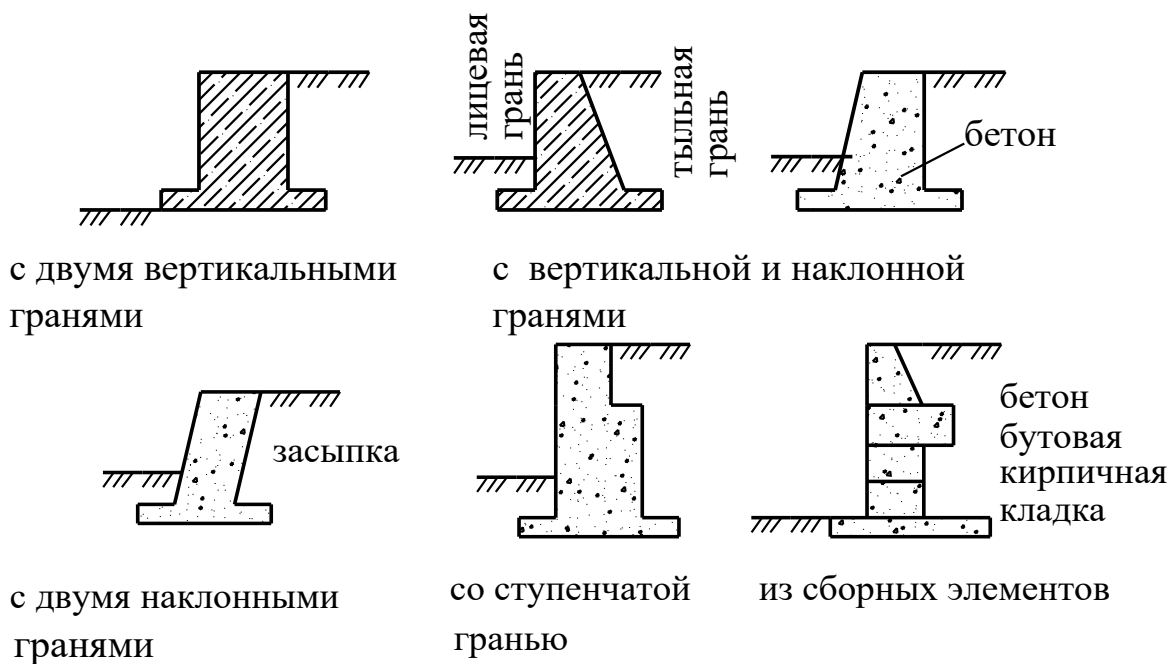


Рис. 6.1 - Массивные подпорные стены



Рис. 6.2 - Тонкостенные подпорные стены углового профиля

3. Гибкие подпорные стены и шпунтовые ограждения.

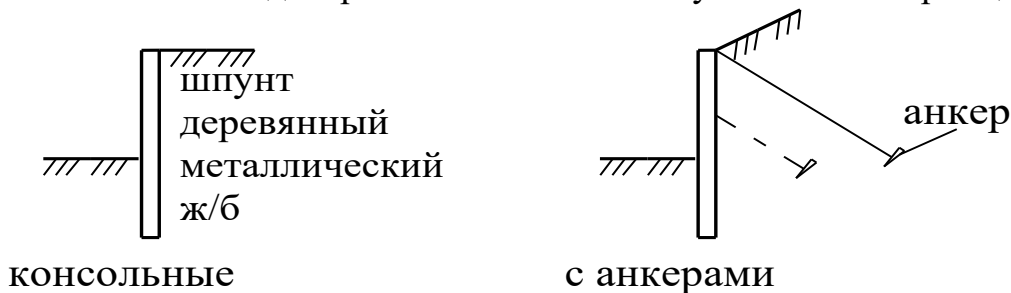


Рис. 6.3 - Гибкие подпорные стены и шпунтовые ограждения

Устойчивость достигается заземлением шпунта в грунте при незначительной высоте, высокие стены заанкеривают.

4. Парусного типа.

Грунт поддерживается парусом, работающим на растяжение и передающим осевую сжимающую силу сваям, а растягивающую – анкерным плитам.

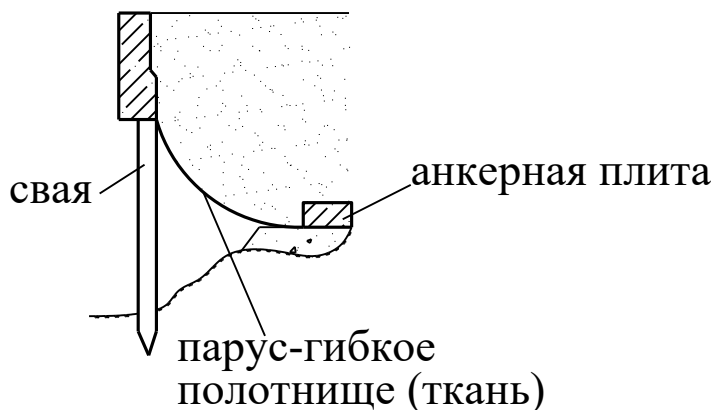
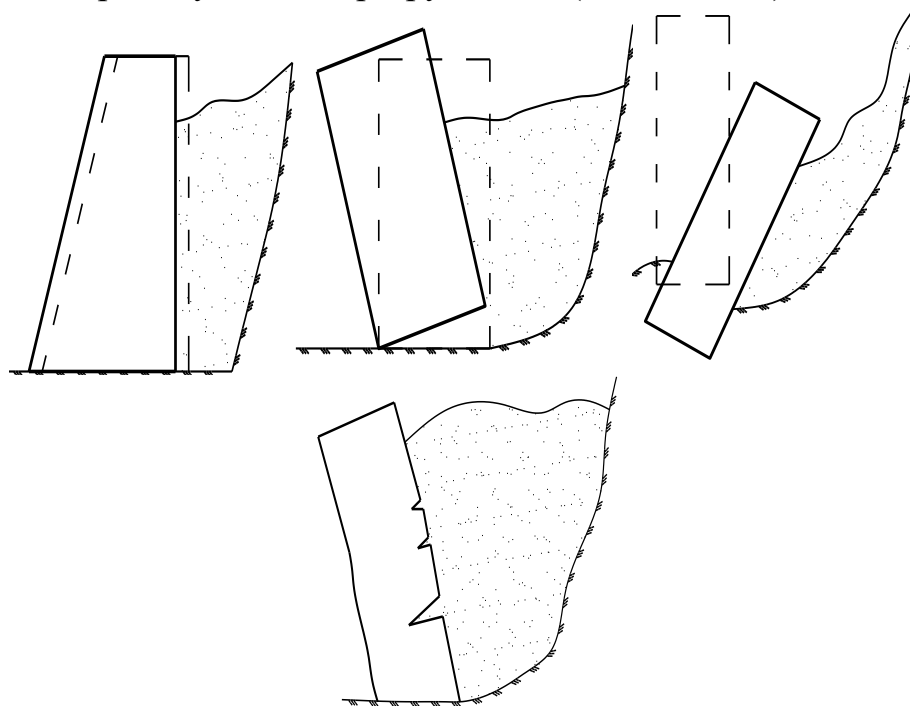


Рис. 6.4 - Подпорные стены парусного типа

Перемещения подпорной стены носят сложный характер. Они складываются из перемещений стены (как твердого тела), зависящих от деформации основания, и из упругих или пластических перемещений, связанных с деформацией самого тела стены (имеет значение только для гибких стен).

Всякое сложное перемещение подпорной стены относительно основания может быть разложено на три составляющие: горизонтальное, вертикальное и поворот вокруг той или иной оси.

Так, под воздействием, оказываемым на подпорную стену она может сдвинуться, опрокинуться или разрушиться (см. Рис. 6.5).



а - сдвиг; б - опрокидывание; в - разрушение основания с выпиранием грунта; г - разрушение тела стены

Рис. 6.5 - Возможные виды разрушения подпорной стены

В соответствии с изложенным, задачи статического расчета подпорных стен заключаются в обеспечении прочности и устойчивости против опрокидывания и сдвига.

Для расчета стены необходимо определить воздействие сыпучего тела на ограждающую его поверхность. Эта задача является чрезвычайно сложной и до настоящего времени не имеет точного решения. Дело в том, что на величину указанного воздействия оказывают влияние физико-механические свойства сыпучих тел, которые зависят от размеров и формы частиц тела, их твердости и шероховатости, от сил трения, действующих между частицами и зависящих от степени влажности сыпучего тела и ряда других факторов, влияние которых не поддается точному учету. Все это осложняется большим количеством, встречающихся в природе грунтов и других сыпучих тел. По этой причине при расчете подпорных стен приходится использовать различного рода упрощения.

6.2 Основные расчетные предпосылки. Физико-механические характеристики и свойства грунтов

Одним из наиболее существенных упрощений является принятие сы-

пучего тела за **идеально сыпучее тело**, между частицами которого отсутствуют силы сцепления. Оно по своим физическим свойствам занимает промежуточное положение между твердым и жидким телами. От первого оно отличается тем, что не оказывает противодействия отделению частиц друг от друга, а от второго - тем, что между его частицами существует значительное трение.

Грунты, с которыми имеют дело в строительной практике, сильно отличаются от идеально сыпучего тела (действуют значительные силы и трения и сцепления).

Грунт – это трехфазная среда, состоящая из раздробленных рыхлых породы земной коры, и пустот между грунтовыми частицами, частично или полностью заполненных воздухом или жидкостью (большой частью водой).

Связность грунта – это сопротивление, препятствующее взаимному смещению частиц грунта. Зависит от величины молекулярных сил, действующих между частицами, которые в свою очередь зависят от площади соприкосновения частиц и количества молекулярно-связанной воды.

В зависимости от величины упомянутых факторов различают сыпучие и связные грунты:

1) сыпучие грунты (например песчаные), состоящие из крупных частиц (более 0,1 мм) в форме зерен с очень малой площадью соприкосновения, не обладают связностью;

2) грунты, в состав которых входит большое количество глинистых чешуйчатых мелких частиц, имеющих большую площадь соприкосновения, силы сцепления между которыми малы, но проявляют себя заметно относятся к связным грунтам.

При расчете подпорной стены принимают, что материал засыпки – сыпучее тело. Расчетной моделью сыпучего тела является **сыпучая среда**, представляющая собой сплошную среду и обладающая следующими свойствами:

- а) не сопротивляется растяжению ($\sigma < 0$);
- б) касательные напряжения не превосходят усилий внутреннего трения;
- в) среда испытывает только деформацию сдвига, объемные деформации отсутствуют.

Сыпучее тело по своим свойствам существенно отличается от сыпучей среды:

- а) все сыпучие тела сжимаемы (их частицы не абсолютно тверды);
- б) деформации сдвига сопровождаются объемными деформациями (меняется пористость, коэффициент внутреннего трения);
- в) могут развиваться значительные растягивающие усилия;
- г) величины сцепления и сопротивления зависят от механического состава и влажности сыпучего тела.

Некоторым приближением к идеализированному сыпучему телу могут служить сухой чистый просеянный песок, цемент, зерно.

Как показывают исследования, давление одного и того же грунта на стену зависит также и от способа и последовательности засыпки грунта, от его уплотнения, от случайного и систематического сотрясения грунта или подпорной стены и так далее. Кроме того, давление это меняется и со временем. Однако, не смотря на это отличие, грунты в практических расчетах рассматриваются как идеально сыпучие тела с учетом соответствующих физических характеристик:

1. **Объемный вес грунта, γ** - вес единицы объема грунта, включая вес воды в его порах, $[\text{кН}/\text{м}^3]$.

2. **Пористость, η** - отношение объема пустот в образце грунта ко всему объему образца.

3. **Объемный вес грунта в воде, $\gamma_{\text{СВ}}$** - вес единицы объема грунта во взвешенном состоянии, $[\text{кН}/\text{м}^3]$.

При погружении грунта в воду потеря в весе будет равна весу вытесненной воды. Так как вода вытесняется только плотной частью грунта (пустоты заполняются водой), то потеря в весе единицы объема грунта составит $\gamma_{\omega}(1 - \eta)$, где γ_{ω} - объемный вес воды.

Тогда

$$\gamma_{\text{СВ}} = \gamma - \gamma_{\omega}(1 - \eta).$$

4. **Угол естественного откоса, φ_1** - наибольший угол, который может быть образован свободным откосом грунта с горизонтом в состоянии равновесия (см. Рис. 6.6.а).

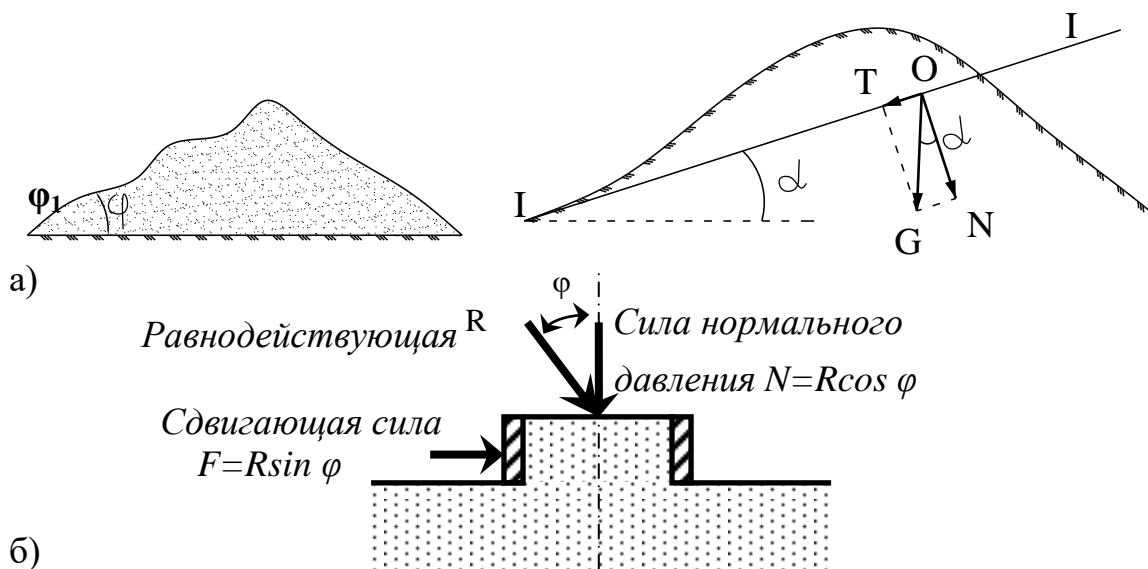


Рис. 6.6 - Схемы к определению угла естественного откоса грунта – φ_1 (а) и угла внутреннего трения – φ (б)

Из физики известно, что сдвигу частиц сыпучего тела противодействуют силы трения и силы сцепления.

Сила трения зависит от величины нагрузки N , нормальной к поверхности сдвига и равна

$$F_{тр} = fN$$

где f - коэффициент трения, который зависит от характера соприкасающихся поверхностей и для рассматриваемого случая равен

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

Сила сцепления, в отличие от силы трения, зависит от площади соприкасающихся поверхностей A

$$F_{сц} = CA,$$

где C - **удельное сцепление** – сила сцепления на единице площади, [$\text{кН}/\text{м}^2$], зависит от строения тела, в котором происходит сдвиг.

Таким образом, полное сопротивление грунта сдвигу составит

$$T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi + CA$$

или

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + C \quad (6.1)$$

Выражение (6.1) представляет собой уравнение Кулона-Мора предельного состояния грунта. Здесь φ – угол внутреннего трения – угол отклонения равнодействующей сил, приложенных к грунтовому целику, от вертикали, при котором наступает условие предельного равновесия (Рис.6.6.б).

Установим зависимость между углом φ и сопротивлением грунта сдвигу.

Массив выше плоскости I-I (см. Рис. 6.6) может оставаться в покое или прийти в движение под действием G - собственного веса и возведенного на нем сооружения:

$$N = G \cdot \cos \alpha;$$

$$T = G \cdot \sin \alpha.$$

В состоянии предельного равновесия

$$T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi + CA$$

или $G \cdot \sin \alpha = G \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$ для песка, в котором $F_{сц} = 0$.

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G \cdot \sin \alpha}{G \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$\alpha = \varphi.$$

Таким образом, угол естественного откоса φ_1 соответствует углу внутреннего трения грунта φ в состоянии предельного равновесия массива несвязного грунта.

Итак, при $\alpha < \varphi$ отсеченная часть грунта находится в равновесии ($\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi = f$).

при $\alpha = \varphi$ – наступает состояние предельного равновесия;

при $\alpha > \varphi$ – происходит сдвиг.

Следовательно, для грунтов со свойствами идеального сыпучего тела $\varphi \approx \varphi_1$

В действительности φ_1 обычно $> \varphi$, что объясняется наличием сил сцепления в реальных грунтах.

5. **Угол внутреннего трения**, φ - угол трения между частицами внутри массы грунта (если сдвиг происходит внутри массива грунта, то φ_1 называется φ) Для расчетов необходимо принимать φ , но из-за трудностей его определения считают, что $\varphi_1 = \varphi$.

6. **Угол внешнего трения грунта о подпорную стену**, φ_s - характеризует шероховатость поверхности соприкосновения грунта со стеной. Его величина зависит от отделки стены, от степени ее влажности и от характеристик соприкасающегося грунта.⁵

Значения углов внешнего трения φ_s принимаются равными:

а) для мелкозернистого, насыщенного водой песка и при действии на подпорные стены динамических нагрузок $0 \leq \varphi_s \leq 0,5\varphi$;

б) $\varphi_s = 0$ если задняя грань весьма гладкая или постоянно смачивается водой;

в) при относительно гладких гранях $0,5\varphi \leq \varphi_s \leq 0,75\varphi$;

г) при весьма шероховатых гранях $\varphi_s = \varphi$, так как в данном случае к стене прилипает тонкий слой грунта и скольжение надавливающей на стену части грунта происходит по этому слою.

В таблице 6.1 приведены нормативные характеристики для некоторых видов грунтов, рекомендуемые для расчета подпорных стен.

6.3 Виды бокового давления грунта

Рассмотрим подпорную стену, поддерживающую грунт от обрушения. Сила давления грунта зависит от перемещения Δ стены в ту или другую сторону.

Если движение подпорной стены направлено от грунта, то сила давления грунта достигает своего низшего предела E_a , называемого **активным давлением (напором грунта)** (см. Рис. 6.7, а, г).

Давление E_0 , оказываемое грунтом при отсутствии перемещения, называется **давлением состояния покоя** или **геостатическим давлением** (см. Рис. 6.7, б, г).

⁵ Часто угол внутреннего трения обозначают буквой φ , а угол внешнего трения – φ_0 .

Нормативные характеристики грунтов

Грунт	Объемный вес, γ кН/м^3	Угол внутреннего трения φ , град	Удельное сцепление, C , кН/м^2
Сухой песок	16,0-16,5	30-35	0
Влажный песок	18	≈ 40	0
Глина сухая	15,0-16,0	40-45	200
Глина водонасыщения	19,0	20-25	1-20
Суглинок водонасыщенный	21,0	20-25	1
Суглинок сухой	16,0	20-40	≈ 100
Песок водонасыщенный	20,0	25	
Гравий	18,0-18,5	35-40	
Галька	18,0	30	
Щебень	18,0	45	

При движении подпорной стены в сторону грунта сила давления достигает своего верхнего предела E_p называемого **пассивным давлением (отпором)** (см. Рис. 6.7, в, г) – в этот момент формируется поверхность выпирания и, соответственно, призма (клин) выпирания.

Дополнительное давление, которое возникает при движении конструкции в сторону грунта, но не вызывает «выпора грунта», называется **реактивным, E_r** .

Соотношение между рассмотренными величинами должно удовлетворять условию

$$E_a < E_0 < E_r < E_p. \quad (6.12)$$

Активное давление грунта - внешняя нагрузка при расчетах сооружений на устойчивость, сдвиг и прочность гибких конструкций.

Пассивное давление учитывается как предельная реактивная сила в расчетах на устойчивость и прочность сооружений, для которых горизонтальные перемещения являются допустимыми, когда стенка «наваливается» на грунт.

Боковое давление грунта в состоянии покоя учитывают в случае, когда устанавливают прочность уголковых и контрфорсных подпорных стен камер шлюзов, доков и тому подобных сооружений.

6.4 Методы определения давления грунта на ограждающую поверхность подпорных стен

Давление грунта на ограждающую поверхность зависит от многих факторов: способа и последовательности засыпки грунта; способа уплотнения; физико-механических свойств грунта; случайных или систематических сотрясений грунта; осадок и перемещений стенки под действием собственного веса, давления грунта и др. Все это значительно осложняет зада-

чу определения давления грунта. Кроме того задача определения давления грунта является статически неопределимой, так, как нельзя найти деформацию без давления и наоборот.

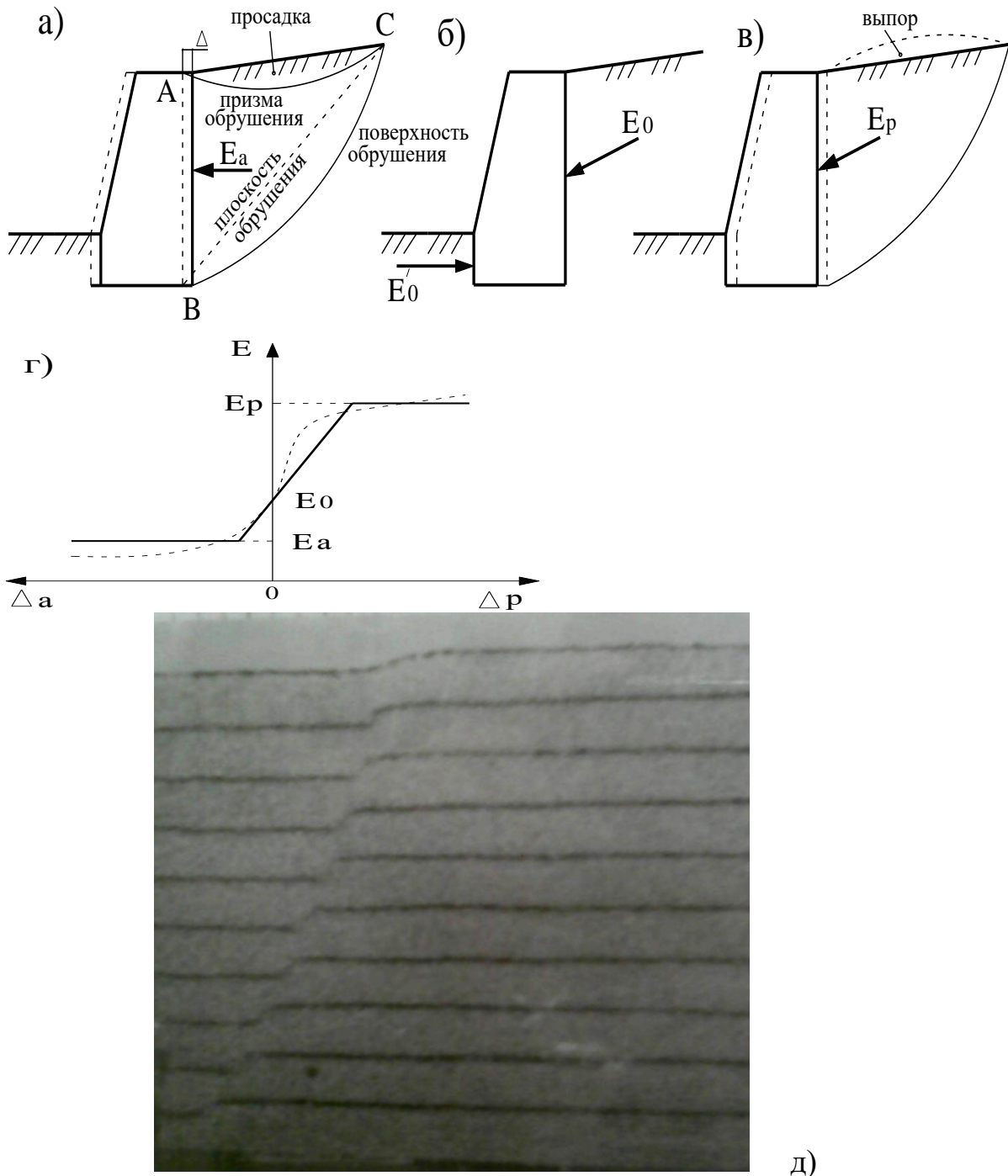


Рис. 6.7 - Схема к пояснению видов давления грунта:
 а - активного; б - геостатического; в - пассивного; г - график изменения давления в зависимости от величины смещения напорной грани; д - поверхность сползания (опыт поставил асп. Е.Орлов в стеклянном лотке в Лаборатории им. проф.И.П.Прокофьева каф. Строительной механики МГУП)

Существуют различные теории определения давления грунта на подпорную стену, использующие предпосылки (допущения) и позволяющие с разной степенью точности выполнять решение задачи.

1. Теория Кулона (1776 г.) основывается на рассмотрении предельного равновесия призмы грунта, ограниченной прямолинейными плоскостями обрушения (выпираания). Более строгое решение показывает, что действительное очертание этих поверхностей скольжения является криволинейным. Величины активного давления грунта на вертикальные и близкие к вертикальным, жесткие, гладкие и шероховатые стенки, определяемые по Кулону и по точной методике, различаются между собой на 2-3%, что является удовлетворительным результатом. Погрешность в определении пассивного давления грунта по зависимостям, вытекающим из теории Кулона, при $\varphi = 15 - 20^\circ$ значительна в сторону преувеличения по сравнению с имеющимся строгим решением.

2. Теория С.В. Соколовского (1939 г.) дает более точные результаты, построена на основе общей теории предельного напряженного состояния сыпучей среды в условиях плоской задачи. Существуют различные интерпретации этой теории (например, графическая С.С. Галушкевича).

3. Теория статического и динамического равновесия грунтов с учетом развивающихся перемещений (Снитко Н.К., 1959г.).

В большинстве инженерных расчетов используются результаты, полученные на основании теории Кулона.

В случаях, когда результаты необходимо уточнить, используются поправочные коэффициенты, вводимые на основании точных решений и экспериментальных данных.

6.5 Определение величины активного давления грунта

Как уже отмечалось ранее, большинство расчетов, встречающихся в инженерной практике, основаны на теории Кулона. Поэтому в дальнейшем будут рассмотрены различные, наиболее практически значимые случаи определения активного давления на подпорную стену, основанные именно на данной теории.

Рассмотрим основные допущения теории предельного равновесия (теории Кулона).

Грунт (сыпучее тело) рассматривается как однородная сплошная среда, способная воспринимать лишь сдвигающие усилия.

Призму обрушения рассматривают как абсолютно твердое тело, что позволяет заменять действующие на нее объемные и поверхностные силы их равнодействующими (см.Рис.6..7.д).

Подпорную стену рассчитывают на так называемое активное давление грунта, которое возникает в момент начала процесса смещения стены, то есть в момент ее предельного равновесия.

При этом часть грунта сползает по так называемой поверхности об-

рушения (скольжения), принимаемую за плоскость (см.Рис.6..7.д).

Рассматривается плоская задача, то есть стена имеет неограниченную длину, в плане является прямолинейной, профиль грунта и все прочие условия давления постоянны по длине стены. При этом рассматривают участок стены длиной 1 метр.

Рассмотрим подпорную стену, находящуюся под действием сил, изображенную на рисунке 6.8.

Обозначения на схеме:

ABC – призма обрушения;

G – вес призмы обрушения;

$R_{ст}$ – реакция подпорной стены;

$R_{гр}$ – реакция подвижной части грунта.

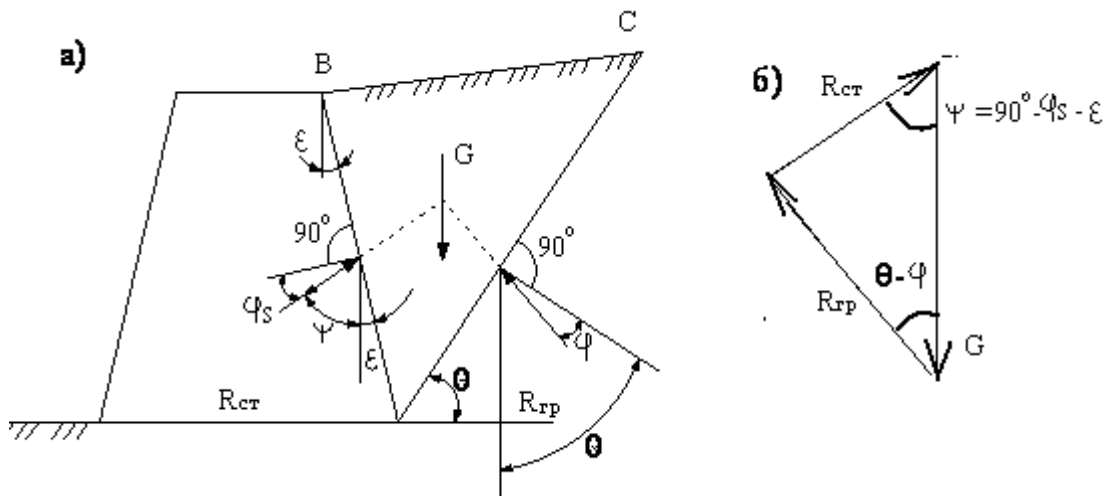


Рис. 6.8 - Схема к определению величины реакции подпорной стены (а) и силовой треугольник (б)

Ввиду равновесия указанных сил линии их действия должны пересекаться в одной точке, а силовой треугольник должен быть замкнутым.

На основании теоремы синусов

$$\frac{R_{ст}}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{R_{гр}}{\sin\psi} = \frac{G}{\sin(180 - \psi - (\theta - \varphi))}$$

$$R_{ст} = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}$$

Так как в полученную зависимость входит неизвестный угол θ и отсутствует надежный способ его определения в каждом конкретном случае, то в расчет вводят такое значение угла θ , которому соответствует наибольшее воздействие грунта на стену в момент ее предельного равновесия (Рис. 6.9).

Рассмотрим два случая:

а) заданная грань стены вертикальная ($\varepsilon = 0$), абсолютно гладкая

$\varphi_S = 0$, поверхность грунта горизонтальная (см. Рис. 6.10).

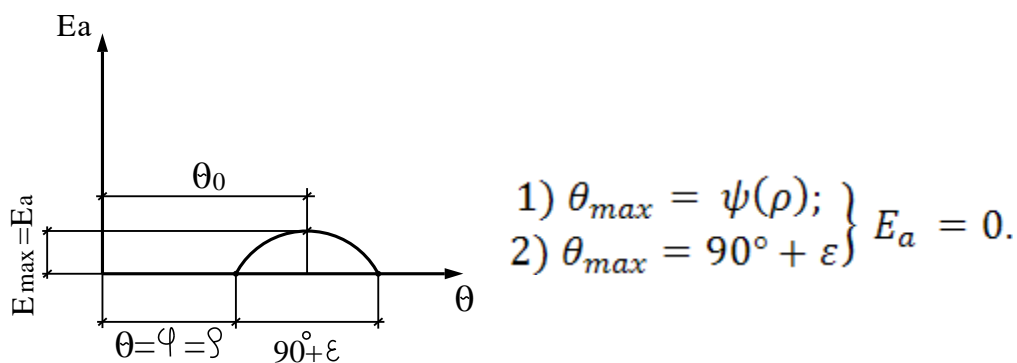


Рис. 6.9 - Схема к определению расчетного значения угла θ

Так как $\epsilon = \varphi_S = 0$, то $\psi = 90^\circ$, значит

$$R_{ст} = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(90^\circ - (\theta - \varphi))}$$

или

$$R_{ст} = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} = G \cdot \operatorname{tg}(\theta - \varphi).$$

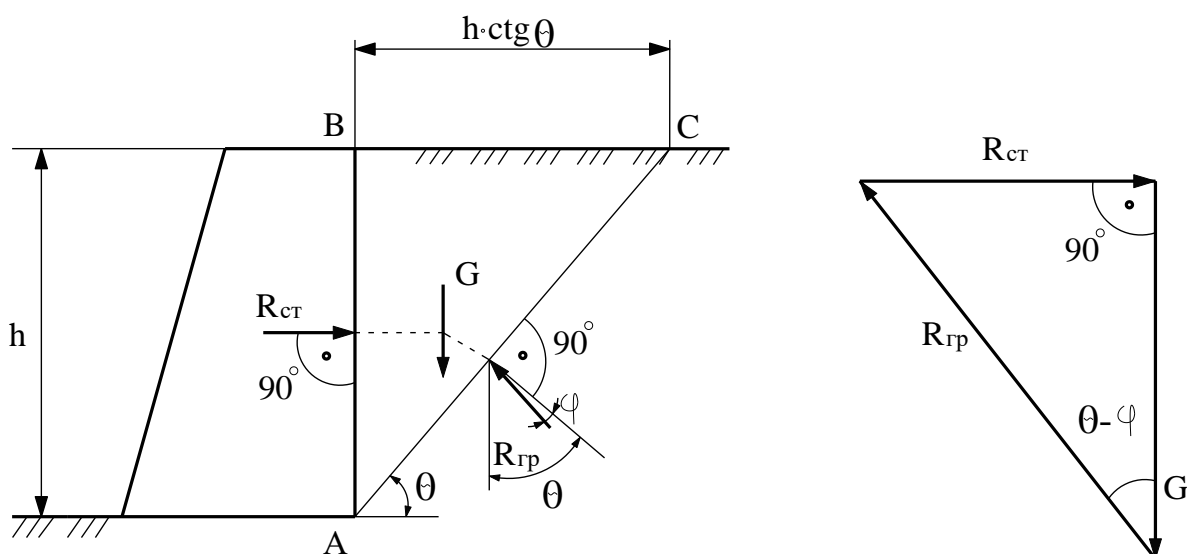


Рис. 6.10 - Схемак определению активного давления (для случая, когда $\epsilon = 0$, $\varphi_S = 0$,) и силовой треугольник

Так как

$$G = \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \gamma h \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{ctg} \theta,$$

то

$$R_{ст} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg}(\theta - \varphi).$$

Найдем значения θ_0 , при котором $R_{ст} = R_{ст max}$

$$\frac{dR_{ст}}{d\theta} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left[-\frac{1}{\sin^2 \theta} \operatorname{tg}(\theta - \varphi) + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta - \varphi)} \right] = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma h^2 &\neq 0, \text{ то} \\ -\frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\sin^2 \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\cos^2(\theta - \varphi)} &= 0; \\ \operatorname{tg}(\theta - \varphi) \cos^2(\theta - \varphi) &= \sin^2 \theta \operatorname{ctg} \theta | \cdot 2; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta - \varphi) &= \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)}; \\ \operatorname{ctg} \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$2 \sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

или

$$\sin 2(\theta - \varphi) = \sin 2\theta.$$

Известно, что если синусы углов равны, то либо углы равны между собой, либо в сумме они равны 180° .

Так как $\theta - \varphi \neq \theta$, то

$$2(\theta - \varphi) + 2\theta = 180^\circ.$$

Откуда

$$\theta = 45^\circ + \varphi/2.$$

Теперь

$$R_{ст max} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi/2) \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2 - \varphi).$$

Но

$$\operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi/2) = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2),$$

поэтому

$$R_{ст max} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)$$

заменив $R_{ст max}$ на E_a найдем

$$E_a^{AB} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

где λ_a - коэффициент бокового давления грунта, равный

$$\lambda_a = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) -$$

Тогда $E_a^{AB} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda_a.$

б) задняя грань шероховатая ($\varphi_S \neq 0$), наклонная ($\varepsilon \neq 0$), поверхность грунта наклонена к горизонту под углом α (см. Рис. 6.11).

Величина активного давления в данном случае определяется по той же зависимости, что и раньше, но здесь

$$\lambda_a = \left[\frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{(1 + \sqrt{K_1}) \cos \varepsilon} \right]^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varepsilon + \varphi_S)};$$

или

$$\lambda_a = \lambda_{ah} \cdot \frac{1}{\cos(\varepsilon + \varphi_S)}.$$

Здесь λ_{ah} - коэффициент горизонтальной составляющей активного давления несвязного грунта, равный

$$\lambda_{ah} = \left[\frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{(1 + \sqrt{K_1}) \cos \varepsilon} \right]^2;$$

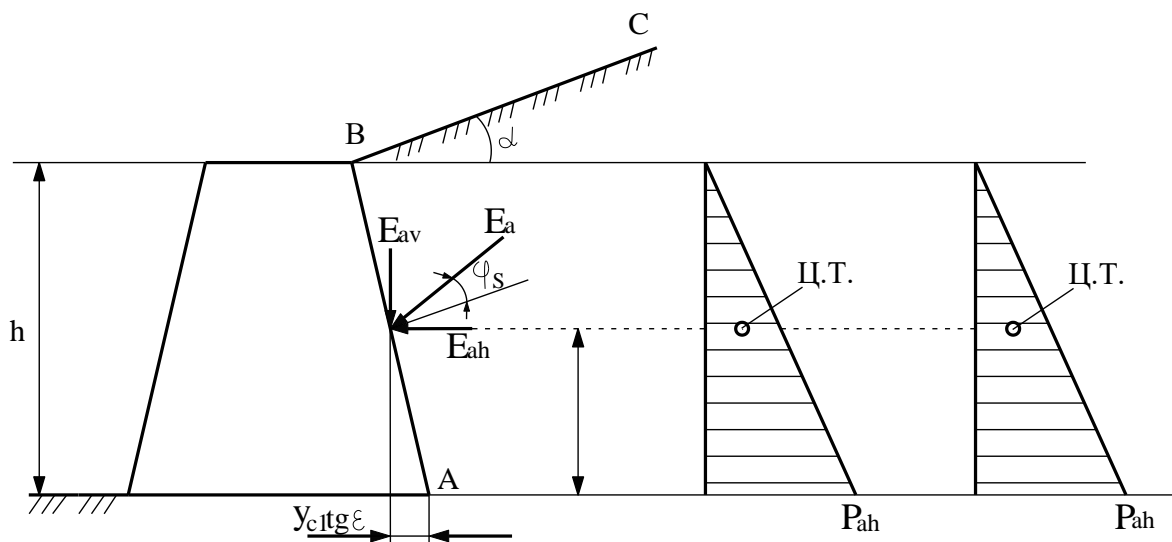


Рис. 6.11 - Схема к определению величины активного давления грунта для случая $\varepsilon \neq 0$, $\varphi_S \neq 0$, $\alpha \neq 0$

K_1 - коэффициент, принимаемый равным

$$K_1 = \frac{\sin(\varphi + \varphi_S) \sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varepsilon + \varphi_S) \cos(\varepsilon - \alpha)},$$

кроме того коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих активного давления несвязного грунта соответственно могут быть определены по зависимостям

$$\begin{aligned} \lambda_{ah} &= \lambda_a \cdot \cos(\varphi_S + \varepsilon); \\ \lambda_{av} &= \lambda_a \sin(\varphi_S + \varepsilon). \end{aligned}$$

В данных формулах принято следующее правило знаков:

угол $\varepsilon > 0$ – при отклонении от вертикали в сторону грунта, град;

угол $\alpha > 0$ – при отклонении поверхности грунта от горизонтали вверх, град;

$\varphi_S = \varphi$ – для стен с повышенной шероховатостью;

$\varphi_S = \varphi/2$ – для ступенчатой задней грани с повышенной шероховатостью;

$\varphi_S = 0$ – для мелкозернистых влагонасыщенных грунтов и при действии вибрационных нагрузок.

Угол наклона плоскости обрушения к вертикали может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\cos\alpha - \eta \cos\varphi}{\sin\alpha - \eta \sin\varphi},$$

где

$$\eta = \frac{\cos(\varepsilon - \alpha)}{\sqrt{\lambda_{ah} \cdot \cos\varepsilon}}.$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие давления соответственно равны

$$\begin{aligned} E_{ah} &= P_{ah} \cdot h/2; \\ E_{av} &= P_{av} \cdot h/2, \\ P_{ah} &= \gamma h h_{ah}; \\ P_{ahv} &= P_{ah} \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi_S), \end{aligned}$$

где P_{ah} и P_{av} – горизонтальная и вертикальная составляющие интенсивности активного давления грунта.

Точка приложения E_α по высоте совпадает с центром тяжести соответствующего участка эпюры интенсивности давления, для треугольных эпюр координаты составят

$$y_{c1} = h/3; \quad X_{c1} = y_{c1} \operatorname{tg}\varepsilon.$$

З а м е ч а н и е . Приведенные зависимости справедливы для несвязного грунта.

6.6 Распределение давления грунта по высоте подпорной стены

В практических расчетах необходимо знать величину E_α на любой участок подпорной стены по её высоте. Чтобы иметь наглядное представление о распределении давления по высоте подпорной стены, построим эпюру интенсивности этого давления (см. Рис. 6.12).

Рассмотрим случай, когда задняя грань стены вертикальная ($\varepsilon = 0$), абсолютно гладкая ($\varphi_S = 0$), поверхность грунта горизонтальная ($\alpha = 0$).

Величина активного давления в произвольном сечении

$$E_a(y) = \frac{1}{2} \gamma Y^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2). \quad (6.2)$$

Теперь найдем положение точки приложения E_a , для чего необходимо знать закон изменения интенсивности бокового давления по высоте стены P_a , то есть давление грунта на единицу площади.

Тогда

$$dE_a(y) = P_a(y) \cdot dy,$$

$$P_a(y) = dE_a(y)/dy,$$

где $E_a(y)$ – активное давление слоя грунта высотой y , определяемое по формуле (6.2).

Следовательно,

$$P_a(y) = \frac{dE_a(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2} \gamma y^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) \right];$$

Итак,

$$P_a(y) = \gamma y \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

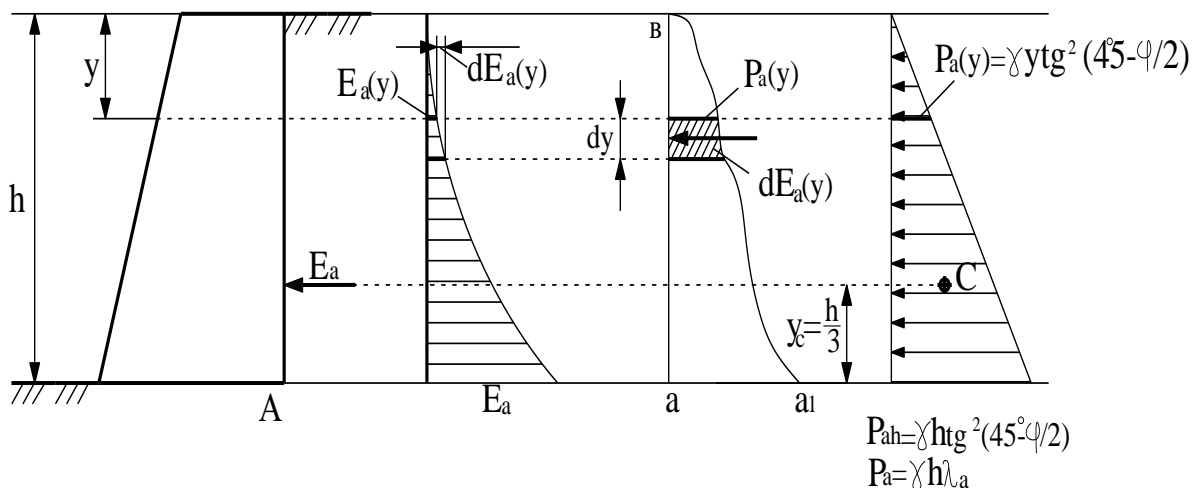


Рис. 6.12 - Распределение давления грунта по высоте подпорной стены

Таким образом, величина активного давления равна площади соответствующей части эпюры интенсивности бокового давления, а точка приложения равнодействующей E_a лежит на одном уровне по высоте с центром тяжести соответствующей эпюры интенсивности P_a (см. Рис. 6.12).

В данном случае

$$E_a = \frac{1}{2} P_a \cdot h$$

и

$$y_c = h/3.$$

З а м е ч а н и е . Задача решается аналогично для случая когда $\alpha \neq 0$, то

есть поверхность грунта засыпки наклонна.

6.7 Влияние сплошной равномерно распределенной нагрузки

Часто около подпорной стены действует временная нагрузка: скопление людей, складирование строительных материалов, подвижная нагрузка от транспортных средств и так далее, которую можно считать равномерно распределенной по поверхности грунта в пределах призмы обрушения. За пределами призмы обрушения эта нагрузка не оказывает влияния на подпорную стену (Рис. 6.13).

Для удобства расчета заменим временную нагрузку приведенным слоем грунта, оказывающим на стену такое же давление, как и данная нагрузка (см. Рис. 6.13)

$$qL_{обр} \cdot 1,0 = \gamma \cdot L_{обр} \cdot h_0 \cdot 1,0 ,$$

где $L_{обр}$ – длина основания призмы обрушения;

1,0 – размер, перпендикулярный плоскости чертежа.

Исходя из смысла данного выражения под q следует понимать силу, приходящуюся на 1 площади горизонтальной проекции загруженного участка.

Таким образом, толщина эквивалентного слоя грунта составит

$$h_0 = q / \gamma.$$

При $y = h_0$, $P_a^A(h_0) = \gamma h_0 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)$.

При $y = h + h_0$

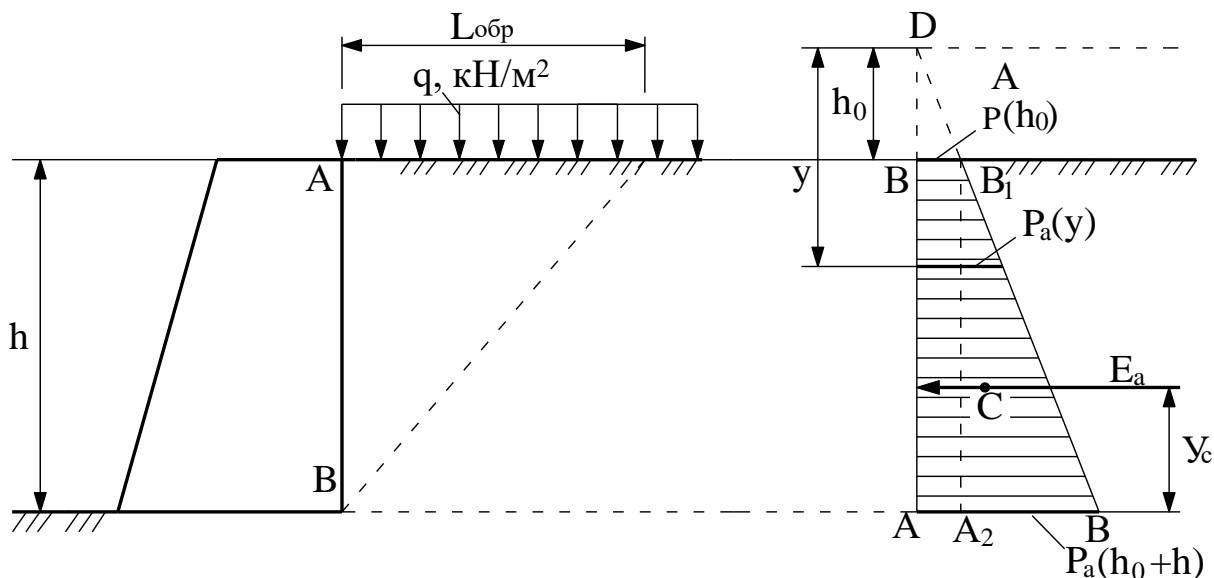


Рис. 6.13 - Определение величины E_a при действии сплошной равномерно распределенной нагрузки

$$P_a^B(h_0 + h) = \gamma(h + h_0) \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

Полное давление грунта на подпорную стену равно площади трапеции эюры P_a

$$E_a = \frac{P_a^A(h_0) + P_a^B(h_0+h)}{2} h.$$

После подстановки и преобразования получим

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma h (h + 2h_0) \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

Положение точки приложения E_a совпадает с центром тяжести эюры P_a и определяется по формулам:

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{h+3h_0}{h+2h_0}$$

или

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{2P_a^A(h_0) + P_a^B(h_0+h)}{P_a^A(h_0) + P_a^B(h_0+h)}.$$

З а м е ч а н и е . Прямоугольная часть эюры P_a отражает влияние временной нагрузки q , а треугольная – влияние грунта при отсутствии временной нагрузки.

Рассмотрим действие сплошной равномерно распределенной нагрузки на наклонную грань ($\varepsilon \neq 0$) подпорной стены в случае, когда поверхность грунта наклонена к горизонту ($\alpha \neq 0$), Рис. 6.14.

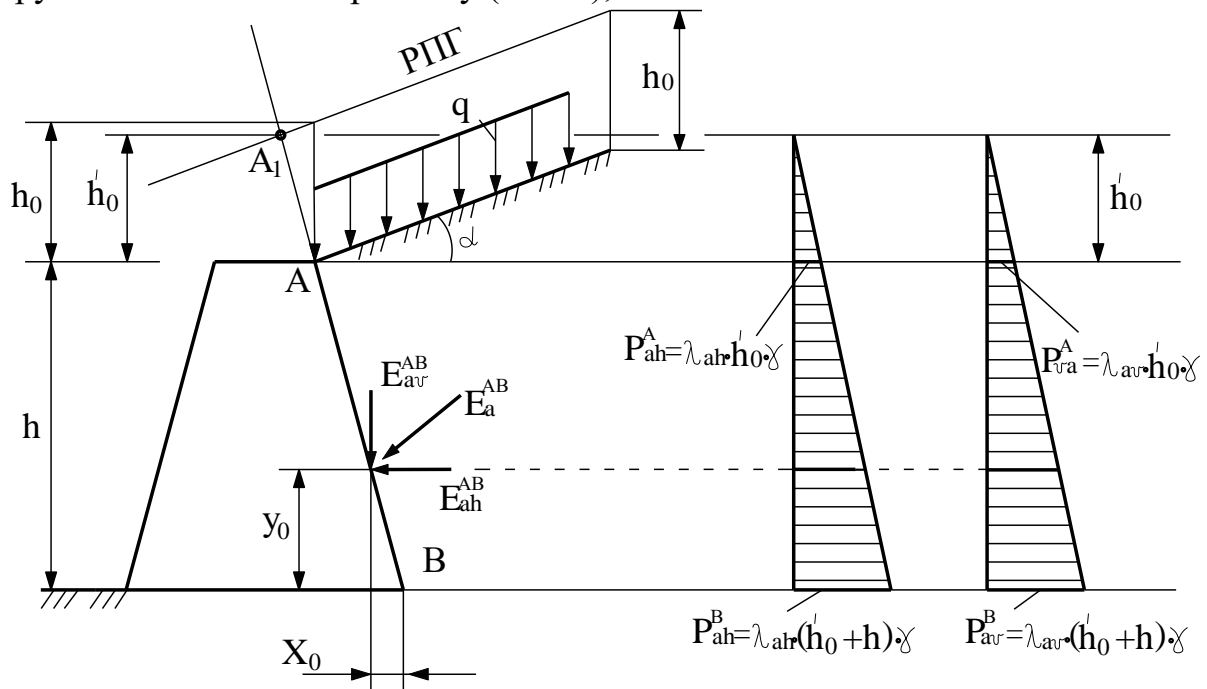


Рис. 6.14 - Определение величины E_a для случая для случая наклонной грани стены и наклонной поверхности грунта

Расчет ведут в следующем порядке:

1. Заменяют равномерно распределенную нагрузку q эквивалентным слоем грунта высотой $h_0 = q/\gamma$.
2. От точки А по вертикали вверх откладывают высоту h_0 и проводят линию параллельно линии отсыпки (расчетной поверхности грунта).
3. Продлевают грань АВ до пересечения с расчетной (приведенной) поверхностью грунта в точку A_1 , находят высоту расчетного эквивалентного (приведенного) слоя грунта

$$h_0^I = \frac{h_0}{1 + \text{tg}\varepsilon \cdot \text{tg}\alpha}$$

4. Строят эпюру интенсивности бокового давления грунта

$$P_a^A = \gamma \cdot h_0^I \cdot \lambda_a;$$

$$P_a^B = \gamma \cdot (h_0^I + h) \cdot \lambda_a.$$

5. Находят значение и точку приложения E_a на ограждающую поверхность

$$E_a^{AB} = \frac{P_a^A + P_a^B}{2} \cdot h_{AB},$$

а точка приложения находится в центре тяжести фигуры (трапеции)

$$h_0 = h_{AB} \cdot \frac{2P_a^A + P_a^B}{P_a^A + P_a^B} \cdot \frac{1}{3}.$$

Если необходимо определить составляющие E_a , то

$$E_{ah}^{AB} = E_a^{AB} \cos(\varepsilon + \varphi_S);$$

$$E_{av}^{AB} = E_a^{AB} \sin(\varepsilon + \varphi_S),$$

или их можно определить как площади соответствующих эпюр

$$h_{ah} \text{ и } h_{av} \text{ (см. Рис. 6.14).}$$

6.8 Давление слоистого грунта

Если грунт неоднороден и состоит из слоев параллельных свободной плоскости грунта, то определение P_a может быть выполнено следующим образом (см. Рис. 6.15).

Определяются горизонтальная и вертикальная составляющие по формулам:

$$P_{ah} = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta y_i + q \cdot h_0^I \right) \lambda_{ah} - \frac{c}{\text{tg}\varphi} (1 - \lambda_{ahc}),$$

$$P_{av} = P_{ah} \cdot \text{tg}(\varepsilon + \varphi_S).$$

Таким образом, P_{ah} и P_{av} определяются по приведенным ранее формулам для начала и конца каждого участка.

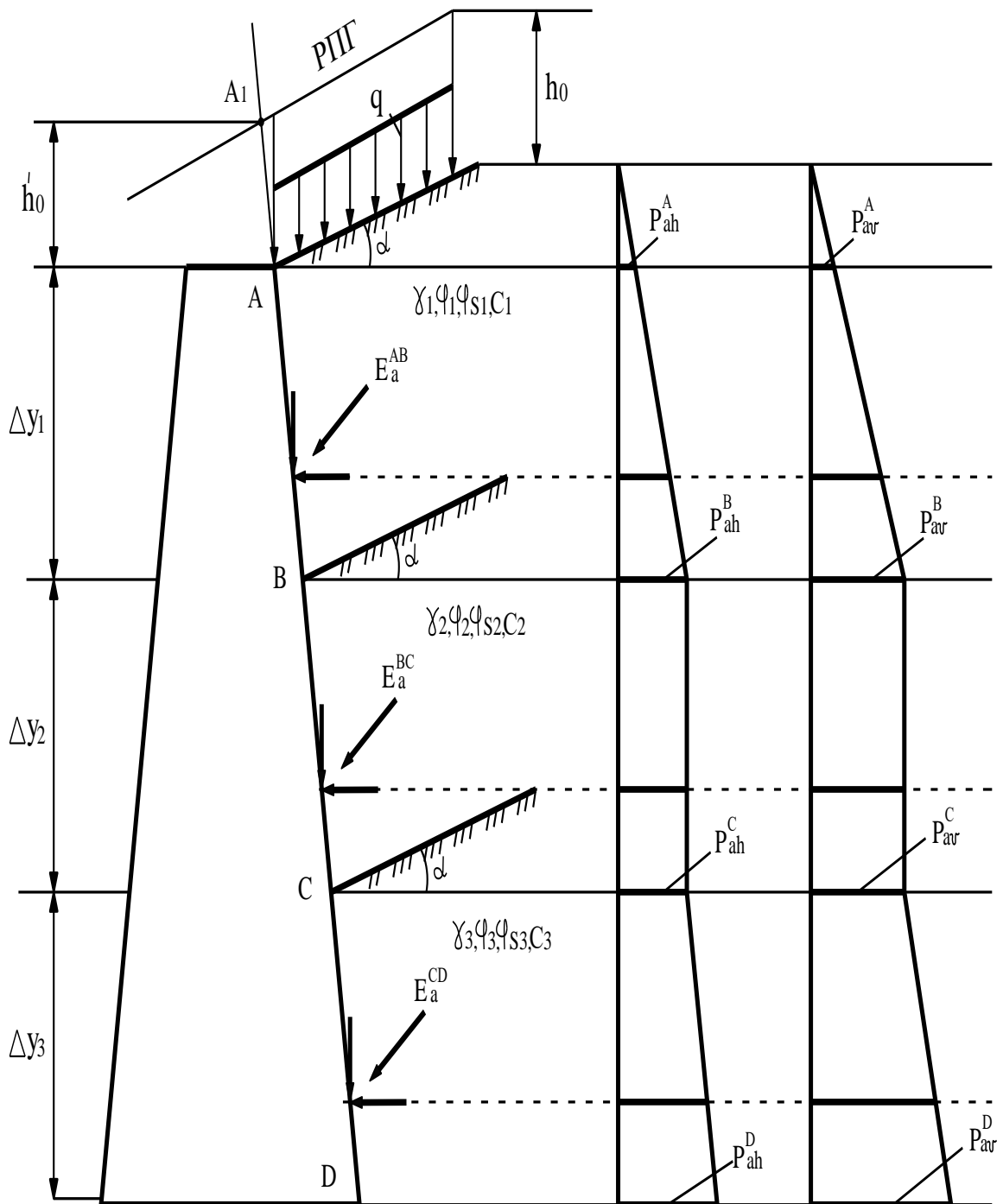


Рис. 6.15 - Схема к определению величины P_a в случае неоднородного грунта

6.9 Давление грунта при ломаном очертании напорной грани

Давление на каждую грань определяется из допущения, что ее плоскость продлена до поверхности отсыпки (свободной или расчетной), Рис. 6.16. Давление на верхнюю грань (AB) определяются обычным способом:

$$AB: \lambda_a^{AB}, P_a^A = 0, P_a^B = \gamma \lambda_a^{AB} \cdot h_{AB}.$$

Давление на следующую грань (BC) определяется независимо от остальных. Эту грань продлевают до поверхности грунта в плоскости грани. Из построенных эпюр P_{ah} и P_{av} выделяется только та ее часть, которая приходится на данную грань:

$$B_1C: \lambda_a^{B_1C}, P_a^{B_1} = 0, P_a^C = \gamma \cdot \lambda_a^{B_1C} \cdot h_{B_1C};$$

$$C_1D: \lambda_a^{C_1D}, P_a^{C_1} = 0, P_a^D = \gamma \cdot \lambda_a^{C_1D} \cdot h_{C_1D}.$$

Затем, все выделенные части эпюр объединяются в одну.

Давление грунта (составляющие E_{ah}, E_{av}) на каждом из участков определяется как площади соответствующих эпюр P_a , а точки приложения давлений по высоте совпадают с центром тяжести эпюр P_a (см. Рис. 6.16).

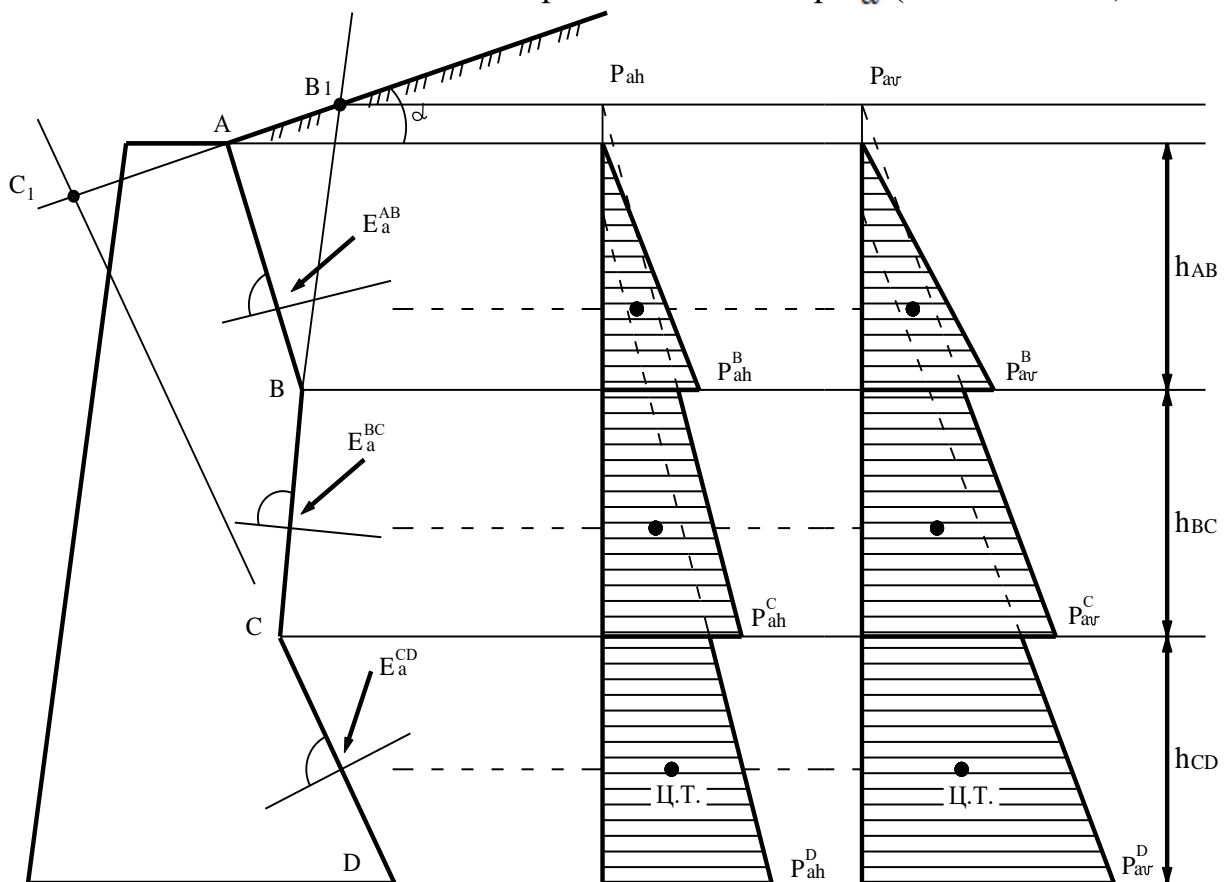


Рис. 6.16 - Схема к определению величины P_a при ломанном очертании напорной грани

6.10 Давление грунта и вышележащего слоя воды

а) грунт водонепроницаем

В случае, если грунт водонепроницаем, то определение величины активного давления выполняют следующим образом (см. Рис. 6.17).

1. Определяют давление воды на часть стены, находящуюся выше поверхности грунта.

$$P_{\omega} = \gamma_{\omega} \cdot y;$$

$$W_{AB} = \frac{P_{\omega} \cdot L_{AB}}{2} = \frac{\gamma_{\omega} \cdot L_{AB}^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon}.$$

Горизонтальная и вертикальная составляющие W_{AB} :

$$W_h^{AB} = \frac{\gamma_{\omega} \cdot h_{AB}^2}{2};$$

$$W_v^{AB} = \frac{\gamma_{\omega} \cdot h_{AB}^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon. \text{ (далее для угла наклона напорной грани к вертикали используется обозначение } \beta \text{)}$$

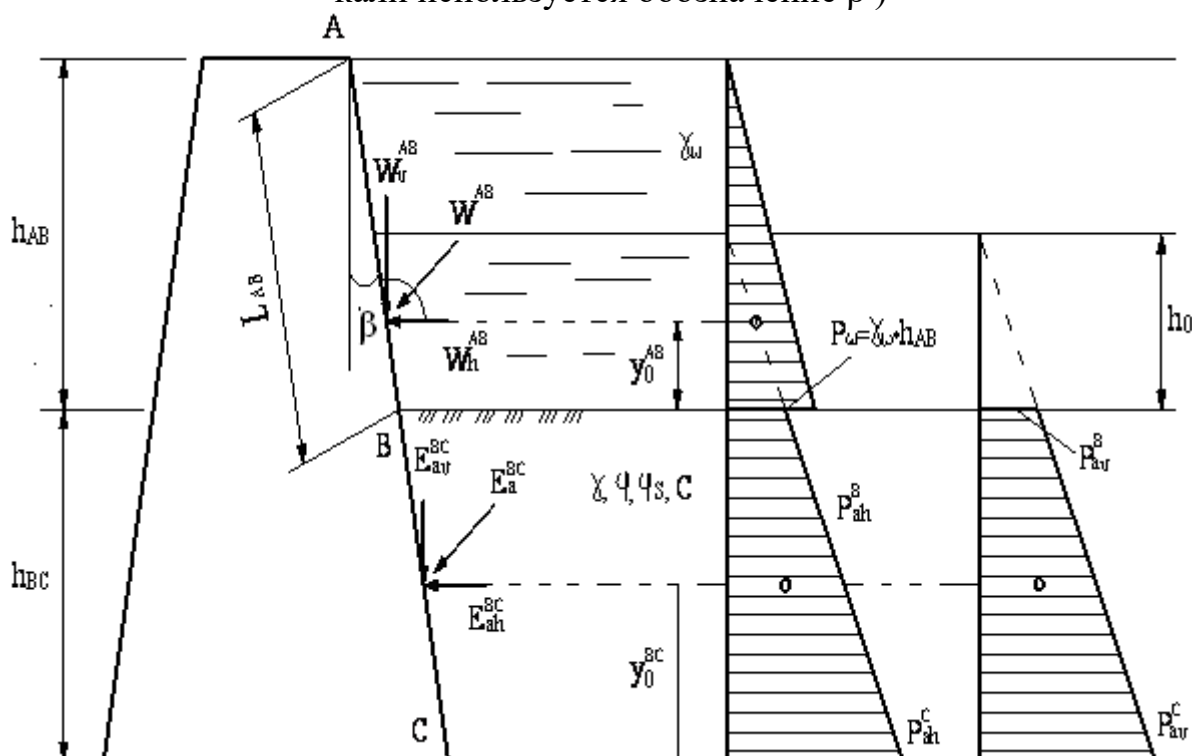


Рис. 6.17 - Схема к определению давления грунта и вышележащего слоя воды в случае, когда грунт водонепроницаем

2. Определяют давление на участок ВС, для чего давление воды на поверхность грунта заменяют эквивалентным слоем грунта высотой

$$h_0 = \frac{P_{\omega}}{\gamma} = \frac{\gamma_{\omega}}{\gamma} h_{AB}.$$

Дальнейший расчет выполняется по уже изложенной ранее методике.

б) грунт водонепроницаем

Когда нижележащий грунт водопроницаем (см. Рис. 6.18), давление воды на участке АВ определяется аналогично рассмотренному выше случаю.

Давление на участок ВС складывается из гидростатического давления во-

ды и давления взвешенного грунта с удельным весом γ_{SB} , определяемым по зависимости

$$\gamma_{SB} = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e},$$

где e — коэффициент пористости грунта;

γ_s — удельный вес частиц грунта; при отсутствии достоверных данных $\gamma_s = 27 \text{ кН/м}^3$.

Удельный вес взвешенного грунта может быть определен также и по зависимости

$$\gamma_{SB} = \gamma - \frac{\gamma}{\gamma_s} \cdot \gamma_w$$

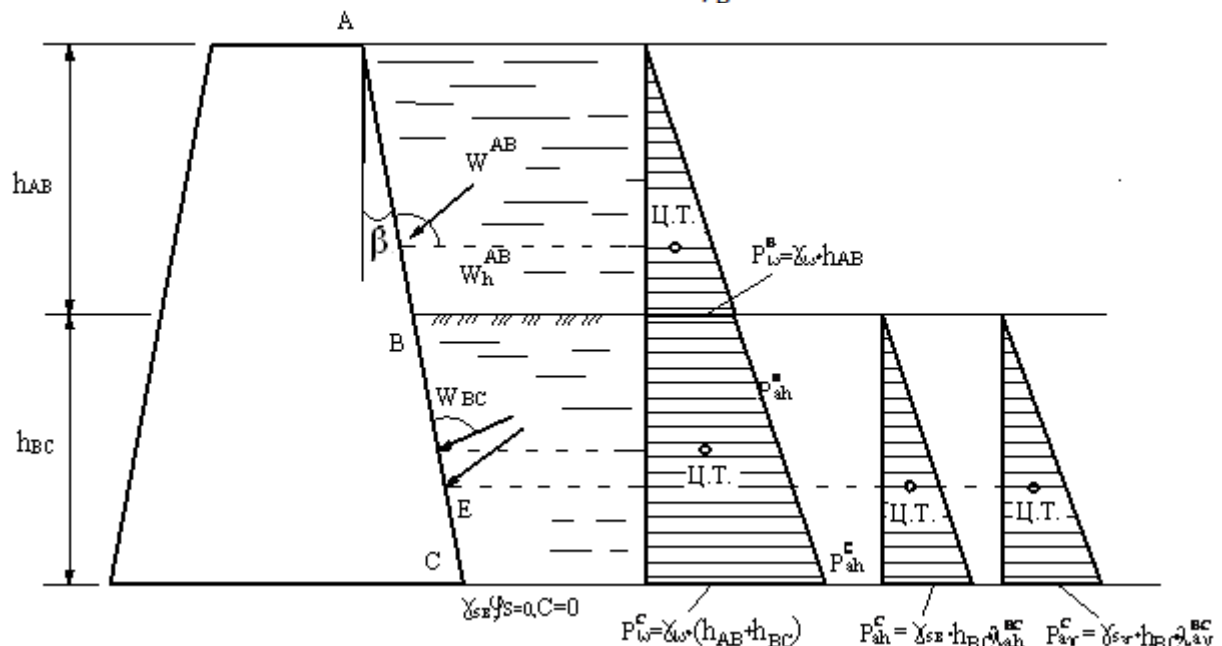


Рис. 6.18 - Схема к определению давления грунта и вышележащего слоя воды в случае, когда грунт водопроницаем

6.11 Пассивное давление грунта при глубинном сдвиге на нескальных грунтах

Бывают случаи, когда подпорная стена стремится сместить грунт и испытывает его противодействие.

Напомним, что наименьшее сопротивление, которое может оказать масса грунта давящей на нее подпорной стене в условиях предельного равновесия, называется пассивным давлением (отпором) грунта E_p .

Величина пассивного давления E_p определяется на основании тех же предпосылок, что и активного E_a .

Для приведенного случая пассивное давление грунта определяется по формуле

$$E_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda_{ph\varphi} + \frac{c_1 \cdot h}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot (\lambda_{phc} - 1),$$

где $\lambda_{ph\varphi}$ — коэффициент пассивного давления грунта, равный

$$\lambda_{ph\varphi} = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2).$$

Вывод данной формулы принципиально не отличается от вывода формулы E_a , причем величина $E_p > E_a$ при одинаковых значениях γ, h и φ . В расчет величина E_p вводится с понижающим коэффициентом. Например, 1/5 — при расчете низовых (поддерживающих откосы насыпей) и 1/3 — при расчете верховых (поддерживающих откосы выемок) подпорных стен на автодорогах, при расчете низовых подпорных стен на ж/д дорогах E_p не учитывают.

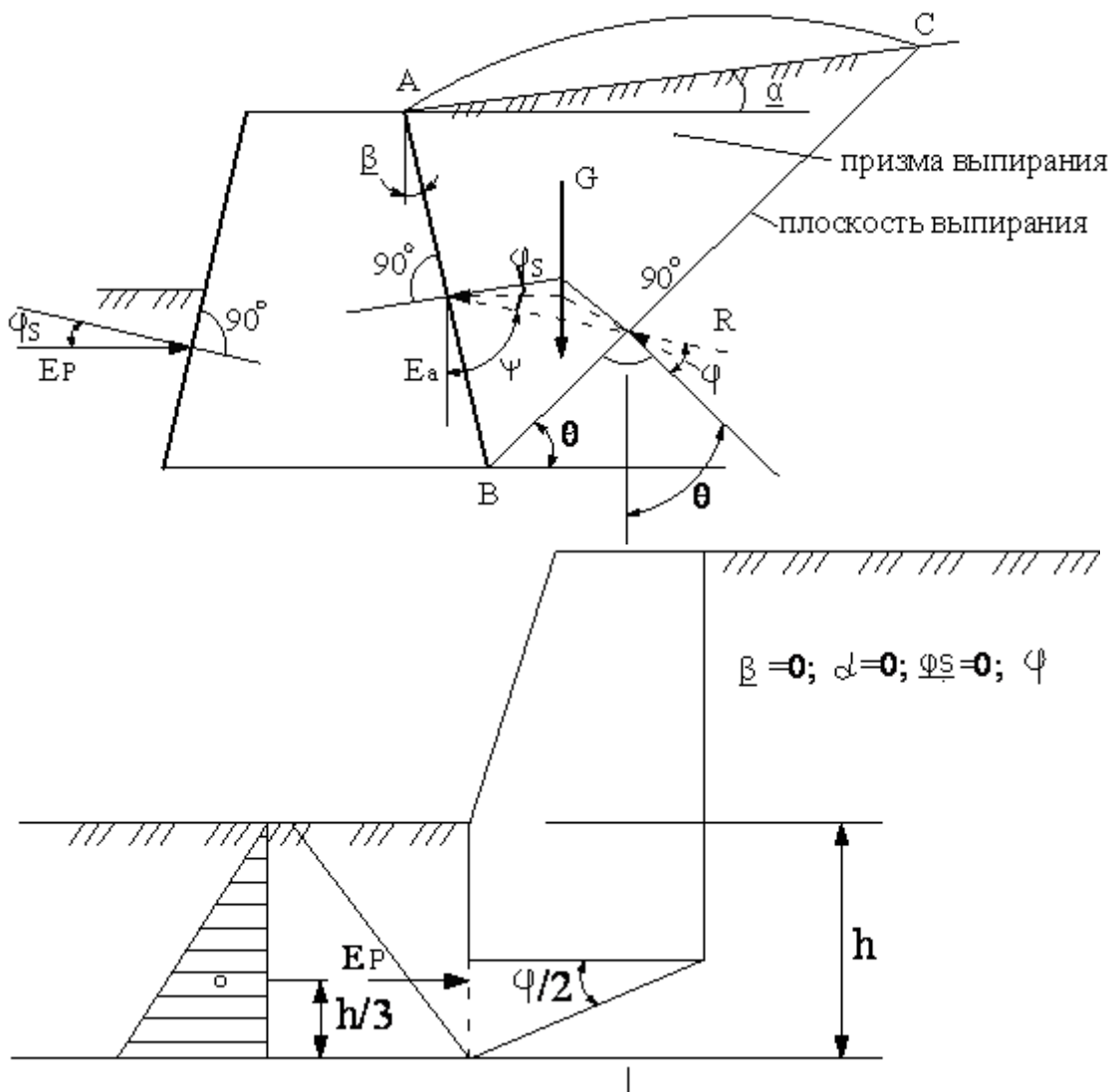


Рис. 6.19 - Схемы к определению величины пассивного давления грунта

6.11 Основные положения расчета подпорных стен на прочность и устойчивость

Расчет подпорных стен, как и всех других несущих конструкций, ведут по методу предельных состояний:

- по первой группе (полной непригодности сооружений и их частей к эксплуатации), включая расчеты общей прочности стен, их устойчивости при сдвиге и опрокидывании, устойчивости основания под подошвой стен, прочности скального основания;
- по второй группе (непригодности к нормальной эксплуатации), включая расчеты основания на местную прочность, по ограничению перемещений и деформаций, по образованию и раскрытию трещи, по нарушению местной фильтрационной прочности отдельных элементов сооружений.

С целью недопущения наступления предельных состояний необходимо выполнение условия

$$F\gamma_{LC} \leq R \frac{\gamma_C}{\gamma_n},$$

где F – расчетное значение обобщенного силового воздействия (сила, момент, напряжение);

R – расчетное значение обобщенной несущей способности;

γ_{LC} – коэффициент сочетания нагрузок;

γ_C – коэффициент условий работы, учитывающий тип сооружения или основания, вид материала, приближенность расчетных схем и другие факторы, не отражаемые в расчете прямым путем;

γ_n – коэффициент надежности, учитывающий класс ответственности сооружения; для подпорных стен в гидротехническом строительстве как правило $\gamma_n = 1,15$ (III – класс) или $\gamma_n = 1,1$ (IV – класс), при расчете по второй группе – $\gamma_n = 1,0$

6.13 Расчет массивных подпорных стен на прочность. Контактные напряжения в подошве

Рассмотрим произвольное сечение m-n подпорной стены (см. Рис. 6.20).

Прочность подпорных стен характеризуется напряжениями, действующими в сечениях, для нахождения которых необходимо определить внутренние усилия M , N , и Q .

Внутренние усилия в сечениях массивных подпорных стен определяются методом сечений:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad N - G_1 - G_2 - G_g = 0; \quad \Rightarrow N; \\ \sum x = 0; \quad Q + E_{a1} + E_{a2} = 0; \quad \Rightarrow Q; \\ \sum M_0 = 0; \quad N \cdot e + G_2 \cdot B_{G_2} + G_g \cdot B_{G_g} - G_1 \cdot B_{G_1} - E_{a1} \cdot a_1 - E_{a2} \cdot a_2 = 0; \quad \Rightarrow e. \end{aligned}$$

Здесь G_1, G_2, \dots, G_n – собственный вес соответствующих блоков, определяется как произведение площади фигуры блока на удельный вес материала стены, так как расчет ведется на 1 м/п длины стены; точка приложения – центр тяжести фигуры; величина бокового давления грунта и точки их приложения определяются по изложенной выше методике.

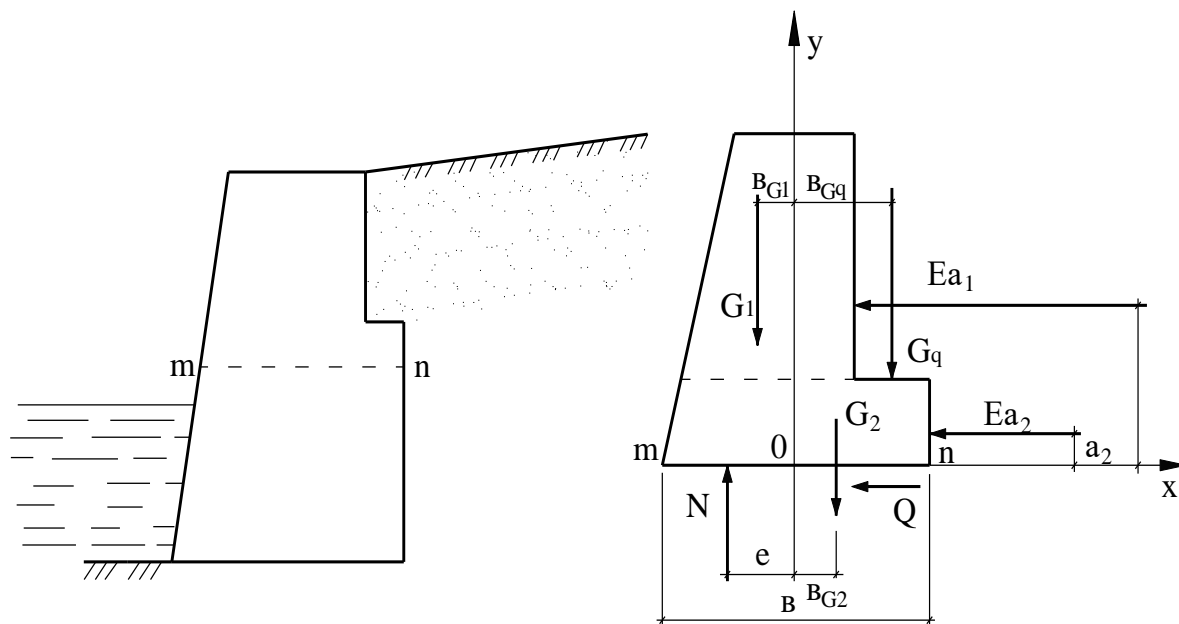


Рис. 6.20 - Определение внутренних усилий в сечении $m - n$ массивной подпорной стены

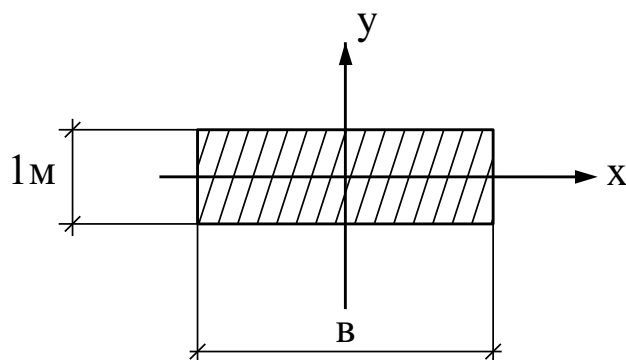


Рис. 6.21 - Схема поперечного сечения $m - n$ подпорной стены

Нормальные напряжения в крайних точках сечения m-n определяются по формуле

$$\sigma^{m,n} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

где: $M = N \cdot e$; - изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

$A = 1 \cdot B$ - площадь сечения;

B – ширина сечения m-n;

$W = 1 \cdot B^2 / 6$ – осевой момент сопротивления сечения.

С учетом введенных обозначений выражение примет вид

$$\sigma^{m,n} = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right)$$

Примечание. Если точка выхода равнодействующей N находится слева от центра тяжести, то $\sigma^m > 0$, а $\sigma^n < 0$.

Определив нормальные напряжения $\sigma^{m,n}$, можно построить эпюру σ , вид которой зависит от величины эксцентриситета e (см. Рис. 6.22).

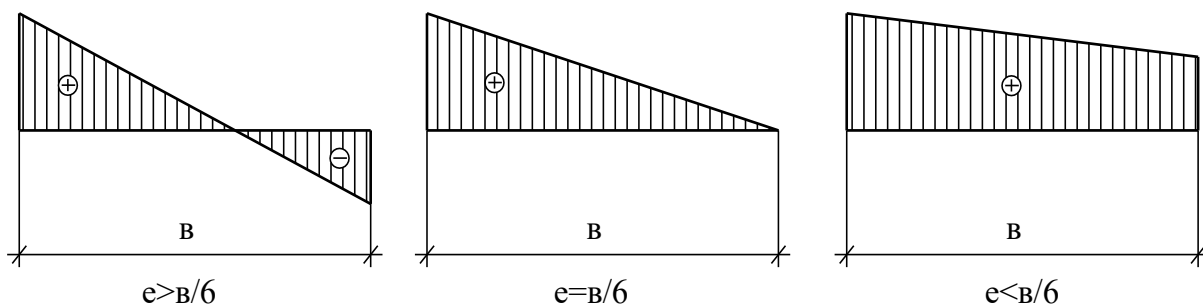


Рис. 6.22 - Вид эпюры нормальных напряжений σ в зависимости от величины эксцентриситета e в сечении $m - n$

При этом прочность стены будет обеспечена, если

$$\sigma \leq R,$$

где R_{ω} - расчетное сопротивление материала стены.

Контактные напряжения (σ и τ) в грунте под подошвой подпорной стены на скальном основании и подпорных стен III и IV классов на не-скальных основаниях определяются аналогично (см. Рис. 6.23).

Так как грунт не воспринимает растягивающих направлений, то при $e > B/6$ контактные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{(B/2 - e)};$$

Прочность основания стены будет обеспечена, если

$$\sigma \leq R,$$

где R_g расчетное сопротивление грунта основания.

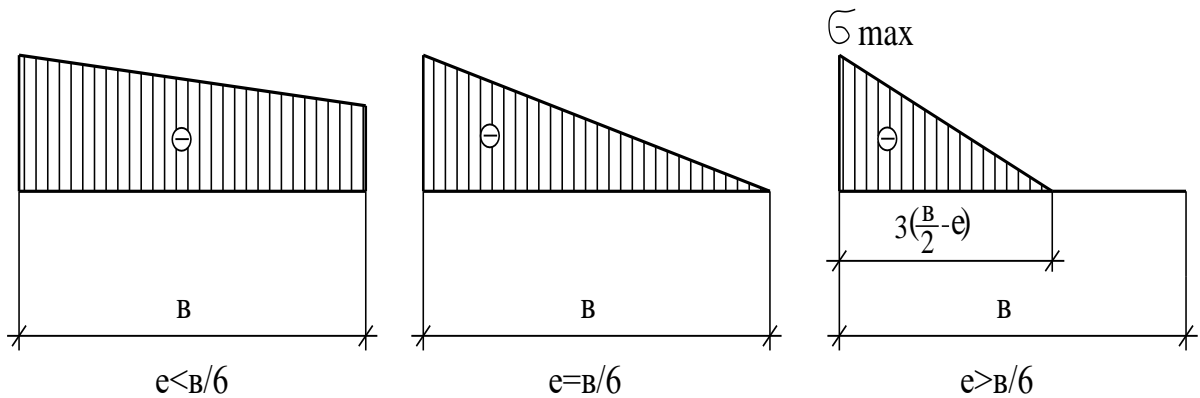


Рис. 6.23 - Вид эпюры контактных нормальных напряжений в зависимости от величины эксцентриситета e

При расчете подпорной стены из отдельных блоков, связанных между собой за счет сил трения необходимо выполнение по стыкам следующего условия

$$Q \leq F_{тр},$$

$$F_{тр} = N \cdot f,$$

где N – нормальная составляющая внутренних сил в стыке;

f – коэффициент трения между блоками.

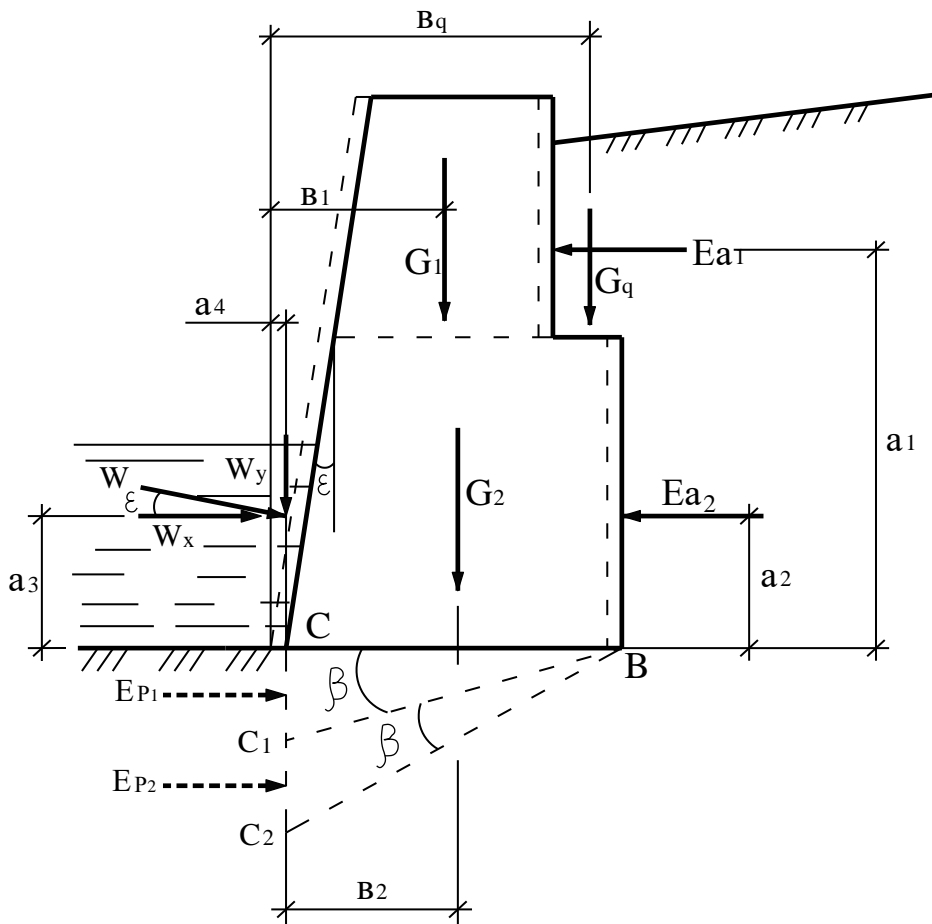
Касательные напряжения, при допущении о равномерном их распределении по ширине сечения « B », могут быть найдены по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{1 \cdot B}$$

Нормальные напряжения (σ) определяются по приведенным формулам.

6.14 Устойчивость подпорных стен при плоском сдвиге и опрокидывании

Расчет устойчивости подпорных стен на нескальных основаниях производится по схемам плоского ($\beta = 0$), смешанного ($\beta = 0,5\varphi$) и глубинного сдвигов ($\beta = \varphi$) в зависимости от вида сооружения, характеристики основания, схемы загрузки и других факторов (см. Рис. 6.24).



BC_1, BC_2 , — предполагаемые плоскости скольжения при сдвиге

Рис. 6.24 - Схема к расчету подпорной стены на сдвиг и опрокидывание

Расчет на устойчивость по схеме только плоского сдвига для оснований сложенных из песчаных, крупнообломочных твердых или полутвердых пылевато-глинистых грунтов производится из условия

$$n = \frac{\sigma_{max}}{B \cdot \gamma_1} \leq n_0, \quad (6.3)$$

где σ_{max} — максимальное нормальное напряжение в угловой точке под подошвой сооружения с низовой стороны;

B — размер стороны прямоугольной подошвы сооружения параллельной сдвигающей силе;

γ_1 — удельный вес грунта основания, принимаемый ниже уровня воды с учетом взвешивающего действия;

n_0 — безразмерное число; $n_0 = 1$ для плотных песков, $n_0 = 3$ в остальных случаях.

Если основания сложены туго и мягко-пластичными пылевато-

глинистыми грунтами, то еще также должны выполняться следующие требования:

$$tg\psi = tg\varphi + \frac{c_{\gamma}^0}{\sigma_m} \geq 0,45; \quad (6.4)$$

$$C_{\gamma}^0 = \frac{K \cdot (1+e) \cdot t_0}{\alpha \cdot \gamma_{\omega} \cdot h_0^2} \geq 4, \quad (6.5)$$

где σ_m — средние нормальные напряжения по подошве сооружения;

K — коэффициент фильтрации;

e — коэффициент пористости грунта в естественном состоянии;

α — коэффициент уплотнения;

t_0 — время возведения сооружения;

h_0 — расчетная толщина консолидирующего слоя, принимается в зависимости от типа основания.

Для однослойного основания при наличии водоупора на глубине h_1 ($h_1 \leq H_c$), где H_c — глубина сжимаемого слоя основания

$$h_0 = h_1 + \frac{b - \epsilon_d}{2},$$

где ϵ_d — ширина подошвы основания, на которой расположен дренаж.

При залегании в основании дренирующего слоя на глубине

$$h_1 (h_1 \leq H_c),$$

$$h_0 = \frac{h_1}{2} + \frac{b - \epsilon_d}{2};$$

Для двухслойного основания с толщинами слоев h_1 и h_2 :

• при наличии водоупора и $h_1 \approx h_2$ ($h_1 + h_2 \leq H_c$)

$$h_0 = h_1 + h_2 + \frac{b - \epsilon_d}{2};$$

• при наличии дренирующего слоя на глубине

$$h_1 + h_2 (h_1 + h_2 \leq H_c)$$

$$h_0 = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{b - \epsilon_d}{2}.$$

Для обеспечения устойчивости сооружения по схеме плоского сдвига при горизонтальной плоскости сдвига должно выполняться условие

$$F \cdot \gamma_{LC} \leq R \cdot \frac{\gamma_C}{\gamma_n},$$

где R — расчетное значение предельного сопротивления при плоском сдвиге;

F — расчетное значение сдвигающих сил, определяется как сумма горизонтальных составляющих всех внешних сил с учетом направления их

действия:

$$F = \sum F_{xi};$$

$$F = E_{a1} + E_{a2} - W_X.$$

Подпорная стенка при сдвиге удерживается силами трения по подошве, поэтому

$$R = f \cdot N = f \cdot \sum F_{yi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sum F_{yi},$$

где $\sum F_{yi}$ – сумма проекций составляющих на ось у, перпендикулярную подошве стены.

$$R = (G_1 + G_2 + G_q + W_y) \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Значения коэффициента трения для различных видов грунтов основания приведены в таблице 6.2.

Расчет устойчивости при опрокидывании выполняется исходя из условия

$$M_t \cdot \gamma_{LC} \leq M_y \cdot \frac{\gamma_C}{\gamma_n},$$

где M_t – сумма моментов сил, стремящихся опрокинуть сооружение;

M_y – сумма моментов сил, стремящихся удержать сооружение при повороте вокруг наружного ребра подошвы фундамента.

Таблица 6.2

Значения коэффициента трения для различных видов грунтов основания

Виды грунтов основания	f
Глины, глинистые известняки, глинистые сланцы влажные	0,25
То же сухие, а также суглинки и супеси	0,3
Пески мокрые	0,4
Пески сухие	0,5
Крупно обломочные грунты	0,5
Скальные грунты с неомывающейся поверхностью, гравий	0,6-0,65
Каменная наброска	0,9

Примечание. Если плоскость сдвига наклонена к горизонту, то при определении R и F все силы проецируются на эту плоскость и нормаль к ней.

Силы активного давления грунта учитываются в M_t в зависимости от направления их действия с соответствующим знаком.

Момент M_y реализуется силами собственного веса стены, весом грунта и воды на уступах:

$$M_t = E_{a1} \cdot a + E_{a2} \cdot a_2 - W_X \cdot a_3 - W_y \cdot a_4;$$
$$M_y = G_1 \cdot B_1 + G_2 \cdot B_2 + G_q \cdot B_q.$$

В результате поворота подпорной стенки вокруг наружного ребра подошвы под ним возникает площадка смятия и расчет на опрокидывание ведут относительно оси, расположенной по середине площадки смятия. Однако в большинстве случаев это не оказывает влияния на расчет.

Если расчетное значение характеристики прочности основания на смятие $R_{CS,m}$ удовлетворяет условию

$$R_{CS,m} > 20 P_{m,z},$$

то устойчивость при опрокидывании рассматривается по схеме поворота относительно ребра нижней грани.

Здесь $P_{m,z} = \sigma_{mz}$ – среднее нормальное напряжение по подошве сооружения. Значения $R_{CS,m}$ принимаются согласно СНиП «Основания гидротехнических сооружений» в зависимости от категории грунта.

Примечание. Расчет на устойчивость по схеме смешанного сдвига производится в случае, когда не выполняются условия (6.3, 6.4, 6.5). Более подробно данный вопрос излагается в курсе «Основания и фундаменты».

6.15 Понятия о выборе поперечного профиля массивных подпорных стен

Наиболее экономичной по расходу материала является подпорная стенка, ось которой совпадает с кривой давления (действуют только сжимающие усилия). При этом возникают сложности при производстве работ (см. Рис. 6.25, а).

Наиболее простым профилем стены является прямоугольный, неустойчив к опрокидыванию (см. Рис. 6.25, б).

Трапециевидный профиль при таких же затратах материала более устойчив (см. Рис. 6.25, в).

Профиль с параллельными наклонными гранями более экономичен и устойчив к опрокидыванию, но менее массивен и поэтому менее устойчив против сдвига (см. Рис. 6.25, г).

Экономичные решения получаются при применении стен с разгрузочными площадками (см. Рис. 6.25, е), которые предпочтительнее, чем изображенные на рисунке 6.25, д.

Кроме изложенного, выбор поперечного профиля подпорной стены определяется также ее целевым назначением.

Встречающиеся в практике строительства поперечные профили мас-

сивных подпорных стен приведены на рисунке 6.25.

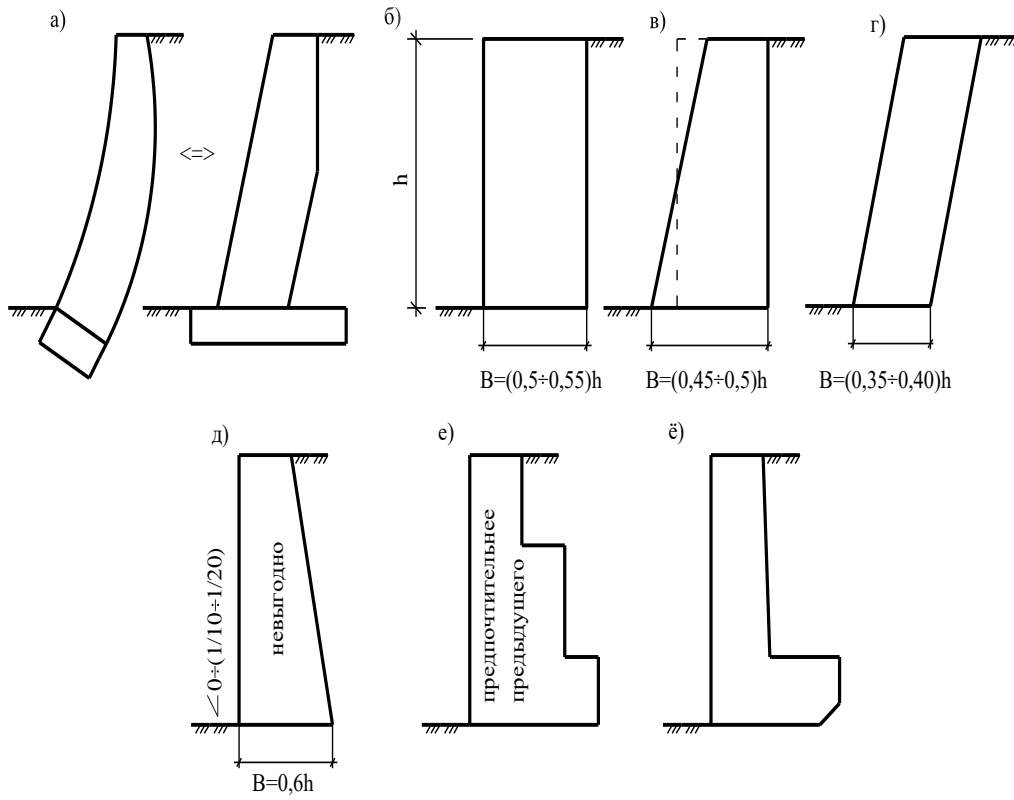


Рис. 6.25 - Профили массивных подпорных стен

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Варианты домашних заданий

В результате изучения курса «Строительная механика» по специальности 270800 «Строительство» и 280100 «Природообустройство и водопользование» студент должен:

– знать методы определения усилий и перемещений от неподвижной и подвижной нагрузки в статически определимых системах (балках, плоских фермах и трехшарнирных системах (арках и рамах)), основные методы (метод сил и перемещений) определения внутренних силовых факторов (M , Q и N) и перемещений в статически неопределимых стержневых системах, основы расчета подпорных сооружений на прочность и устойчивость;

– уметь определять внутренние силовые факторы (M , Q и N) и перемещения в статически определимых и неопределимых стержневых системах применяемых в гидротехническом строительстве, определять давление грунта на подпорные сооружения и напряжения в ее основании, а так же оценивать прочность и устойчивость подпорных стен;

– иметь представление об оптимизации формы и размеров сооружения и современных тенденциях развития строительной механики.

Цель курса «Строительная механика» - обучить студентов основным современным методам расчета статически определимых (задачи 1, 2, 3, 9) и неопределимых (задачи 4, 5, 6, 7) стержневых систем (балок, рам, ферм, арок), подпорных сооружений (задача 8); развить мышление при решении задач, встречающихся в инженерной практике гидротехнического строительства.

Решению индивидуальных задач должно предшествовать изучение материалов курса «Строительная механика». Рекомендуемая основная /1-4/ и дополнительная /5-7/ литература для изучения курса.

Исходные данные для выполнения индивидуального задания по дисциплине «Строительная механика» каждый студент выбирает из таблиц к задачам 1-9 в соответствии со своим учебным шифром выдаваемым на кафедре «Строительная механика».

ПОРЯДОК ПОЛЬЗОВАНИЯ ШИФРОМ

Предположим, студент получил шифр – 1436. Сумма цифр шифра равна $1+4+3+6=14$. Номер схемы в задаче соответствует последней цифре суммы, то есть №4.

По предпоследней цифре шифра выбирается номер строки в таблице 7.1 (в шифре 1436 – это соответствует 3 строке в таблице 1). По последней цифре шифра выбирается номер строки в таблице 7.2 (в шифре 1436 – это соответственно 6 строка в таблице 7.2).

ЗАДАЧА № 1

Тема: Расчет многопролетной статически определимой балки на неподвижную и подвижную нагрузки

Для заданной расчетной схемы требуется:

1. Осуществить количественный и качественный анализ образования многопролетной статически определимой балки.
2. Построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов от заданной постоянной нагрузки и, используя дифференциальные зависимости $dM / dX=Q$, $dQ / dX=-q^6$, осуществить проверку правильности их построения.
3. Построить линии влияния опорных реакции и внутренних усилий (Q и M) в заданных сечениях.
4. По линиям влияния определить величины опорных реакций (F_{Ay} , F_{By} , F_{Cy} и т.д.), перерезывающих сил (Q) и изгибающих моментов (M) в заданных сечениях от постоянной нагрузки.
5. Сопоставить результаты расчета, полученные с помощью эпюр Q и M (п.2) и с помощью линии влияния (п.4).

Исходные данные к задаче № 1.1

Таблица 1.1а

Предпоследняя цифра шифра	$L_1, м$	$L_2, м$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	Сечение для построения линии влияния
1	2	3	4	5	б
0	3,2	6,5		18	а
1	5,6	7,0	22		б
2	3,6	8,0		8	в
1	2	3	4	5	б
3	6,0	4,5	12		г
4	5,2	4,0		20	д
5	2,8	5,5	25		е
6	4,0	8,5		14	ж
7	4,4	6,0	10		з
8	4,8	5,0		16	и
9	2,4	7,5	6		к

⁶ Если положительное направление нагрузки принять вверх, то в последнем дифференциальном соотношении следует использовать знак «плюс», а не «минус».

Схемы многопролетных статически определимых балок к задаче № 1

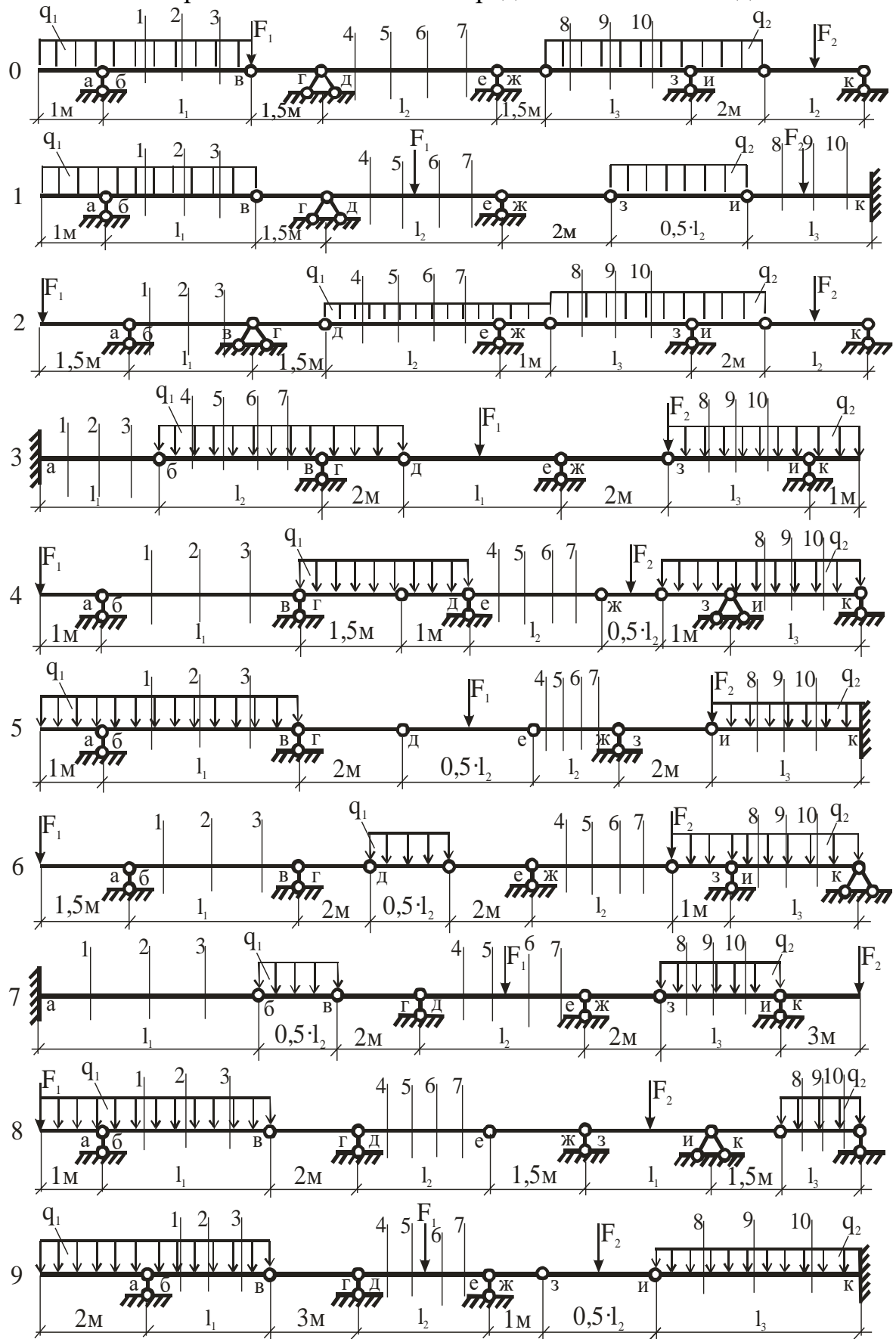


Таблица 1.2

Последняя цифра шифра	$L_3, \text{м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	Сечение для построения линии влияния
0	2,4	30		10
1	4,8		25	9
2	4,4	15		8
3	2,8		20	7
4	5,2	35		6
5	6,0		40	5
6	3,6	45		4
7	5,6		50	3
8	3,2	55		2
9	4,0		60	1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Анализ образования многопролетной статически определимой балки следует начинать с определения степени свободы плоской системы:

$$W=3Д-2Ш-С_0,$$

где Д – число дисков;

Ш – число простых шарниров;

$С_0$ – число опорных стержней.

При $W > 0$ система геометрически изменяема.

Условие $W=0$ и $W < 0$ является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости.

Далее производим анализ геометрической структуры сооружения, в процессе которого проверяем правильность соединения дисков.

Для четкого представления взаимодействия элементов многопролетной статически определимой балки необходимо вычертить «поэтажную схему»,

располагая на «первом этаже» основные балки, на «втором» и более «высоких этажах» - вспомогательные и подвесные балки. «Поэтажная схема» определяет порядок монтажа и расчета балки. Монтаж начинается с «нижних этажей», а расчет – с «верхних этажей».

2. Следуя порядку, определенному «поэтажной схемой», определяют реакции опор и реакции в шарнирных соединениях от заданной неподвижной нагрузки.

Реакции опор в статически определимых балках рекомендуется определять из уравнений вида $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$, а проверку из условия равенства нулю суммы действующих сил на ось Y; $\sum F_y = 0$.

Затем переходят к построению эпюр Q и M. Эпюра – это график, изображающий закон изменения величин (M, Q и N) по всему пролету, одновременно для всех сечений стержня при действии заданной неподвижной нагрузки. Эпюры Q и M строят с использованием метода сечений. Эпюра изгибающих моментов (M) строится на растянутых волокнах. На эпюре перерезывающих сил (Q) указываются знаки. Положительной Q считается сила, вращающая элемент по часовой стрелке. Эпюры Q и M могут быть построены для балки каждого «этажа» в отдельности, а затем объединены в одну общую эпюру.

Проверку правильности построения эпюр производим с учетом дифференциальных зависимостей, и иных свойств эпюр, указанных в Табл.1.3..

Таблица 1.3

Свойства эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Особенность загрузки	Особенность эпюры поперечных сил	Особенность эпюры изгибающих моментов
Участок свободный от распределенной нагрузки $q=0$	$Q=const$	Эпюра изгибающих моментов ограничена прямой линией (параллельной или наклонной к оси балки)
Участок, на который действует равномерно распределенная нагрузка $q=const$	Поперечная сила меняется по линейному закону ($\frac{dQ}{dZ} = q$)	Изгибающий момент меняется по закону квадратной параболы $\frac{dM}{dZ} = Q$ (правило паруса)
	Сечение, в котором поперечная сила равна нулю	Изгибающий момент принимает экстремальное значение
Точка приложения сосредоточенной силы	На эпюре поперечных сил имеется скачок, равный по величине и направлению приложенной силы	На эпюре изгибающих моментов имеется излом (т.к. производная равна тангенсу наклона касательной к графику, производная слева не равна производной справа)
Точка приложения пары сил	Особенностей нет	На эпюре изгибающих моментов имеется скачок, равный по величине и направлению моменту приложенной пары сил

3. После построения эпюр Q и M в многопролетной статически определимой балке от действия неподвижной нагрузки переходим к построению линий влияния опорных реакций (F_{Ay} , F_{By} , F_{Cy} , ...), и внутренних усилий (Q , M) в заданных сечениях.

Линией влияния, какого либо усилия для определенного сечения сооружения называется графическое изображение закона изменения данного усилия в этом сечении при перемещении груза $\bar{F} = 1$ по длине сооружения.

Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий в заданных сечениях, следует начинать с применимости положения о прямолинейности линий влияния между узлами (при узловой передаче нагрузки) для многопролетных статически определимых балок.

В первую очередь рассматривают движение груза по элементу, которому принадлежит исследуемый фактор (опорная реакция, внутреннее усилие Q или M , для заданного сечения). Для этого элемента обычным способом строятся линии влияния как для однопролетной (или консольной) балки. При этом соседние элементы не принимаются во внимание. Затем рассматривается движение груза по соседним элементам (балкам, расположенным выше используемой на «поэтажной схеме»). Вершина крайней ординаты, над которой расположена одна из опор более высоко расположенного элемента (балки) соединяется с нулевой ординатой под другой опорой того же элемента и продолжается до конца этого элемента. Аналогично проводится построение линий влияния при движении груза по более высоко расположенным элементам относительно предыдущего.

Движение груза по нижележащим элементам «поэтажной схемы» не вызывает усилия в рассматриваемом элементе, поскольку нагрузка передается только сверху вниз. На построенных графиках характерные ординаты определяются из геометрических соотношений.

3. Опорные реакции и внутренние усилия (Q и M) в заданных сечениях определяются от заданной неподвижной нагрузки по линиям влияния следующим образом:

4.

$$\Phi = \sum F_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot A_i ,$$

где Φ - исследуемый фактор (реакция, Q , M);

F_i - i -тая сосредоточенная сила;

y_i - ордината линии влияния соответствующего фактора под сосредоточенной силой;

q_i - интенсивность i -той равномерно-распределенной нагрузки;

A_i - площадь линии влияния соответствующего фактора под всей протяженностью i -ой равномерно-распределенной нагрузки.

5. Полученные значения опорных реакций и внутренних усилий сравнива-

ются с результатами расчета, полученного при построении эпюр по (п.3) и сводятся в таблицу (например, вида Табл.1.4). Расхождение сравниваемых результатов расчета не должно превышать 1%.

Таблица 1.4

Сопоставление результатов расчета по определению значений опорных реакций и внутренних усилий в заданных сечениях с использованием эпюр и линий влияния.

Метод вычисления \ Фактор	F_{Ay}	F_{By}	M_K	Q_K
1 По эпюрам Q и M						
2 По линиям влияния						
3 Погрешность %						

ЗАДАЧА № 2

Тема: **Расчет плоской балочной фермы на подвижную нагрузку**

Для заданной фермы требуется:

1. Построить линии влияния опорных реакций.
2. Построить линии влияния усилий для указанных четырех стержней фермы.
3. Установить опасное положение подвижной системы связанных грузов для указанных стержней и определить величины максимальных и минимальных усилий в них.
4. Для панельного стержня грузового пояса аналитическим методом определить усилие при опасном положении системы связанных грузов, предварительно распределив грузы по ближайшим узлам. Найденное значение усилия сравнить с результатом, полученным по (п.3).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Линии влияния следует строить при движении груза по прямолинейному поясу, указанному на каждой схеме фермы. На построенных линиях влияния необходимо пунктиром показать изменение очертания для случаев загрузки другого пояса. При установлении закономерностей изменения усилий в стержнях фермы надлежит пользоваться методом сечений, рассекая ферму на две части (при этом следует стремиться к тому, чтобы разрезанными были не более трех стержней) или вырезая узел. В некоторых случаях целесообразно воспользоваться методом совместных сечений.

При определении усилий в стержнях необходимо стремиться, чтобы усилие в каждом стержне определялось независимо от усилий в других стержнях. При составлении уравнения статического равновесия пользуются правилом: если не интересующие стержни, попавшие в разрез, пересекаются в одной точке, то составляется уравнение суммы моментов относительно этой точки (моментная точка); если не интересующие стержни параллельны, то составляется уравнение суммы проекций на ось им перпендикулярную.

Уравнения линий влияния следует составлять для движения груза по левой и правой частям фермы (правая и левая прямые линии влияния). Все уравнения должны поясняться расчетными схемами.

Построенные линии влияния могут быть проверены следующим образом:

- а) если усилие в стержне определяется способом моментной точки, то левая и правая прямые должны пересекаться под этой точкой;
- б) если усилие определяется способом проекций, то правая и левая

прямые должны быть параллельны (кроме способа совместных сечений). Под рассекаемой панелью грузового пояса линия влияния очерчена переломчатой прямой, соединяющей ближайшие узловые ординаты.

Необходимо обращать внимание на связь между знаком ординат линии влияния и положением моментной точки. Если моментная точка лежит внутри пролета фермы, то линия влияния в пролетной части однозначна, если за пределами пролета, то двузначна.

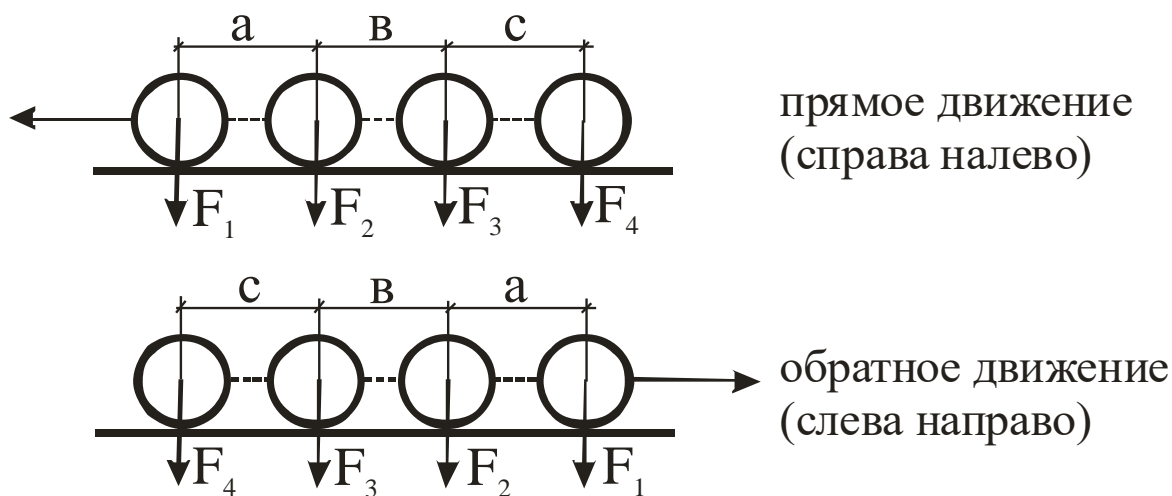
При построении линии влияния способом вырезания узла рассматривают положения груза в узле и вне узла. В первом случае получают лишь одну ординату линии влияния, действующую в узле; во втором – прямую, действующую справа и слева от ближайших узлов рассеченных панелей. В пределах рассеченных панелей проводятся соединительные прямые.

При построении линии влияния способом совместных сечений линия влияния интересующего усилия получается алгебраическим суммированием двух или более линий влияния (графическим способом).

На каждой линии влияния указываются значения характерных ординат.

2. При определении опасного положения грузов следует рассматривать движение как справа на лево, так и слева на право.

Система связанных грузов



3. Грузы при их критической установке надо разносить по ближайшим узлам фермы в соответствии с правилом рычага.

При определении усилий в стержнях фермы способом моментных точек плечи усилий должны быть определены аналитически, проверить можно измеряя их в масштабе вычерченной фермы.

4. Расхождение сравниваемых результатов усилия в панельном стержне, полученные по п.3 и п.4 не должно превышать 1%.

Таблицы исходных данных к задаче № 2

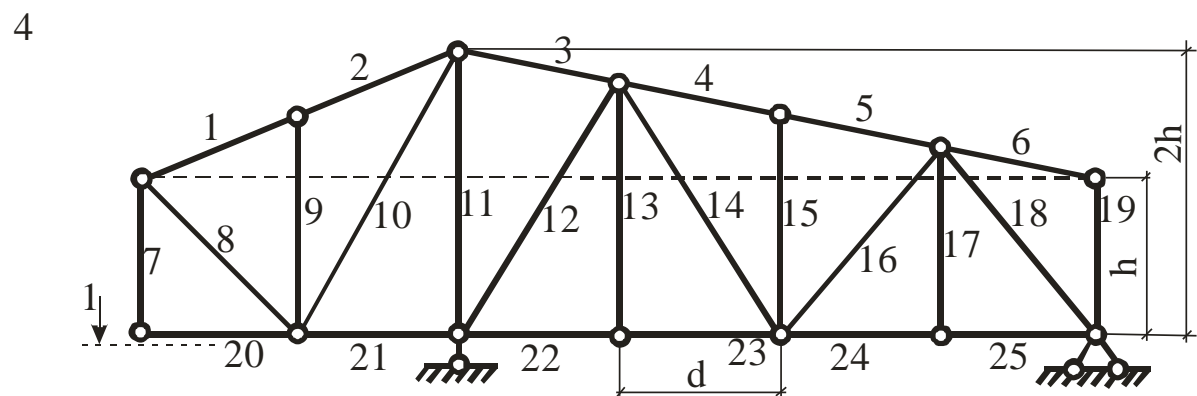
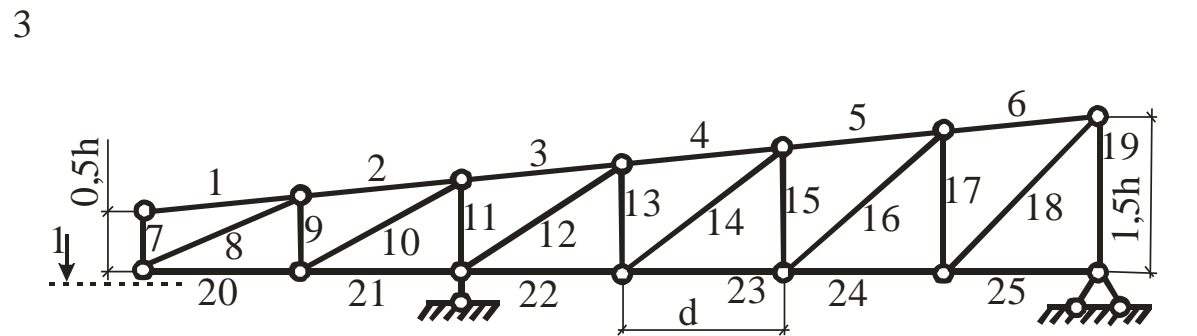
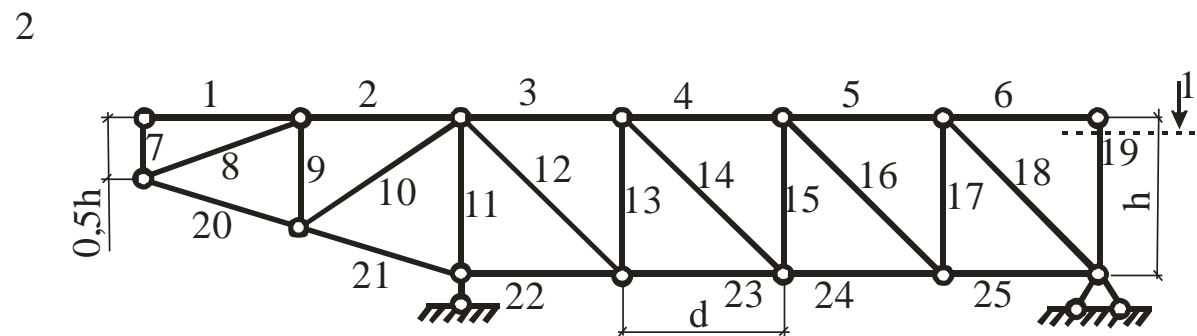
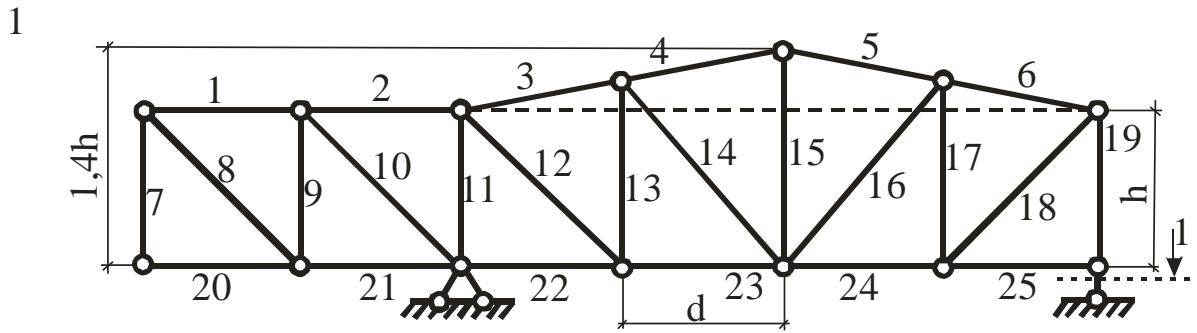
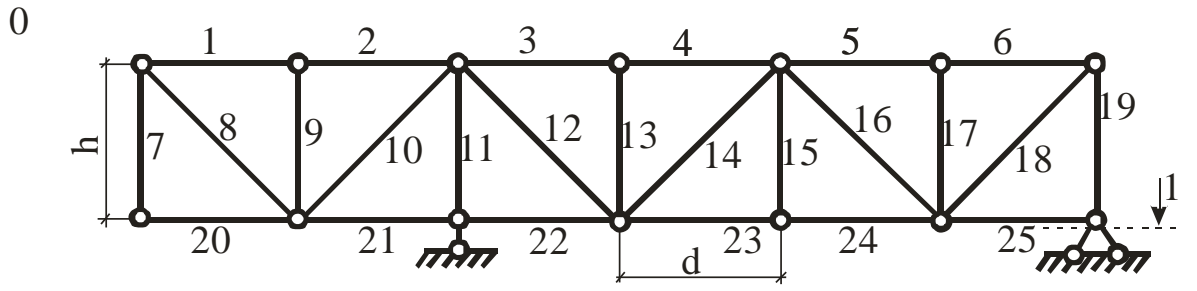
Таблица 2.1

Предпоследняя цифра шифра	h, м	Грузы и расстояния между ними			Стержни ферм, для которых строятся линии влияния
		F ₁ , кН	a, м	F ₂ , кН	
0	2,0	15	1,5	25	4,21
1	2,2	30	2,0	10	3,20
2	2,4	10	1,0	25	2,23
3	2,5	25	1,5	20	1,22
4	2,6	15	0,5	30	3,25
5	2,8	10	2,0	20	6,22
6	3,0	25	1,0	10	5,21
7	3,2	20	0,5	15	4,20
8	3,4	30	1,0	20	2,24
9	3,5	20	1,5	10	1,23

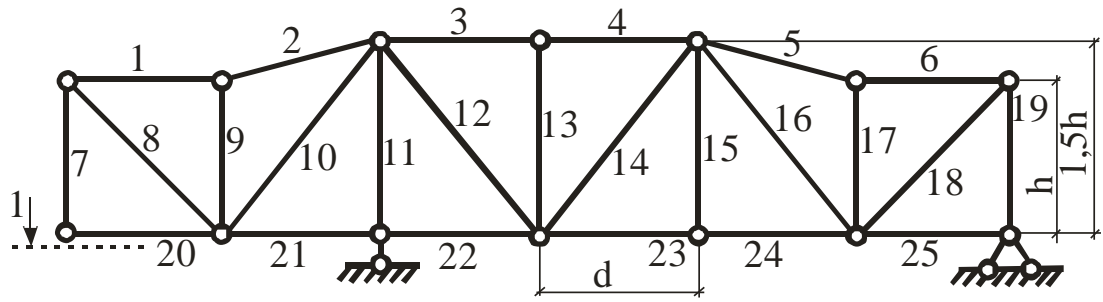
Таблица 2.2

Последняя цифра шифра	d, м	b, м	Грузы и расстояния между ними			Стержни, для которых строятся линии влияния
			F ₃ , кН	c, м	F ₄ , кН	
1	2	3	4	5	6	7
0	3,6	1,0	30	2,0	25	8,13
1	2,2	2,0	10	1,0	15	10,15
2	3,5	0,5	25	1,5	10	12,17
3	2,4	1,5	15	0,5	20	14,19
4	3,4	2,0	20	0,5	25	16,20
5	2,5	1,0	25	1,5	30	18,20
6	3,2	0,5	15	2,0	10	8,15
7	2,6	1,5	30	1,0	15	10,17
8	3,0	1,0	20	0,5	20	12,19
9	2,8	1,5	10	2,0	30	14,20

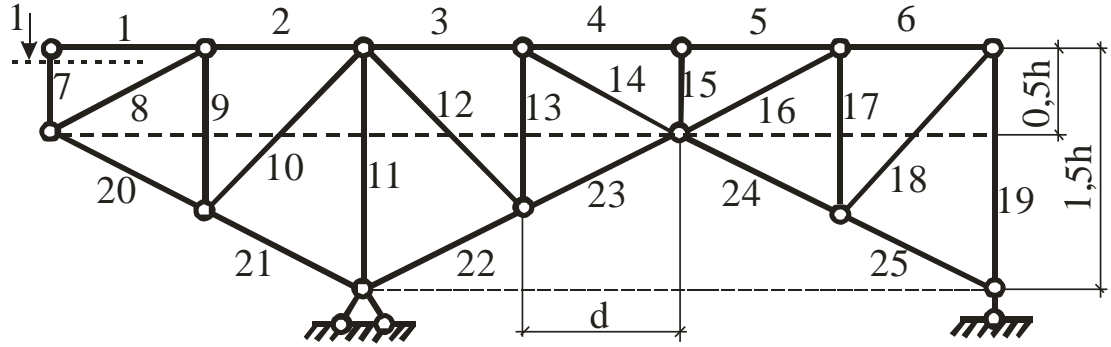
Ниже приводятся схемы ферм к задаче № 2



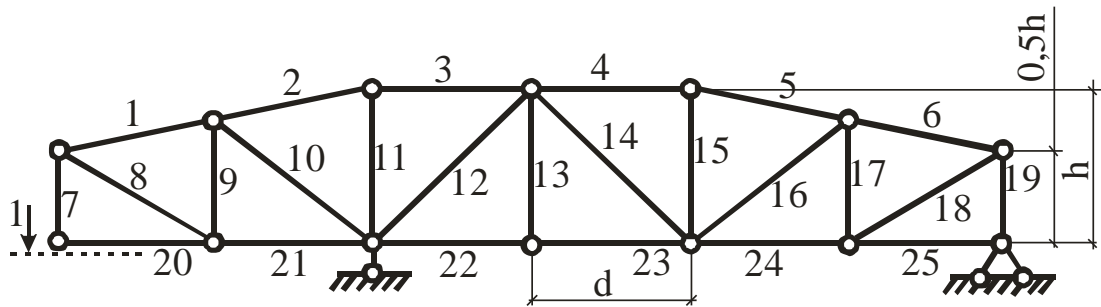
5



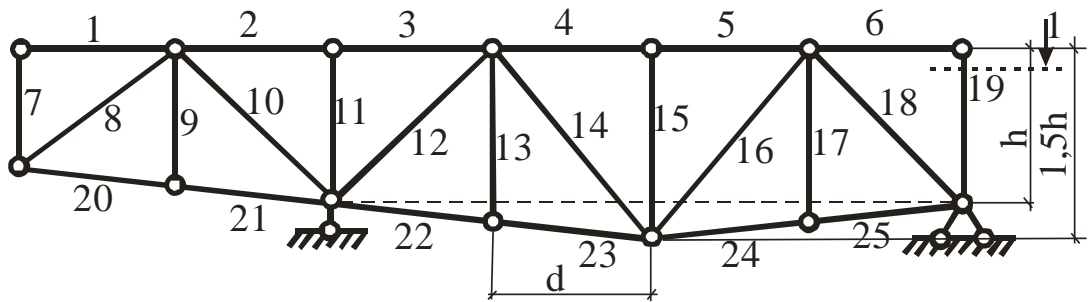
6



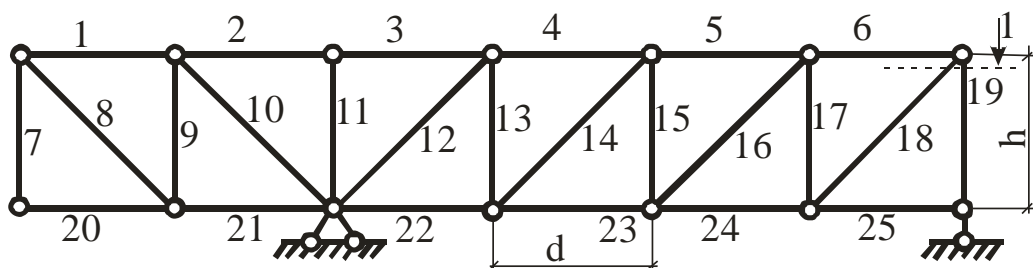
7



8



9



ЗАДАЧА № 3

Тема: Расчет трехшарнирной арки

Для заданной трехшарнирной арки требуется:

1. Определить опорные реакции от постоянной нагрузки.
2. Определить внутренние усилия M, Q, N в сечениях K_1 и K_2 трехшарнирной арки.
3. Построить эпюры внутренних усилий M, Q, N от действия постоянной нагрузки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для определения опорных реакций следует воспользоваться уравнениями равновесия $\sum M = 0$, записывая моменты относительно опорных (пятых) шарниров всех сил и ключевого шарнира, отдельно левых и правых сил. Найденные значения опорных реакций необходимо проверить составлением уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси.

2. При действии вертикальной нагрузки арку сравнивают с балкой равной ей пролета, загруженной также как и арка. Поэтому первоначально, для полученной таким образом балки строят эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M), определяя значения указанных внутренних силовых факторов в заданных сечениях.

Полученные значения балочных поперечных сил и изгибающих моментов используют для определения внутренних усилий в заданных сечениях арки по формулам:

$$M_K = M_K^O - H \cdot y_K$$

$$Q_K = Q_K^O \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K$$

$$N_K = Q_K^O \cdot \sin \varphi_K + H \cdot \cos \varphi_K ,$$

где M_K^O и Q_K^O - внутренние усилия в сечении «К» балки такого же пролета, как и арки с аналогичной нагрузкой. Если в каком-либо из сечений K_1 или K_2 приложена сосредоточенная сила, то балочная перерезывающая сила должна иметь два значения: $Q_K^{O \text{ ЛЕВ}}$ и $Q_K^{O \text{ ПРАВ}}$, т.е. слева и справа от сечения К.

Соответственно и для арки будет найдено два значения $Q_K^{O \text{ ЛЕВ}}$ и $Q_K^{O \text{ ПРАВ}}$;

$N_K^{\text{ЛЕВ}}$ и $N_K^{\text{ПРАВ}}$ для этого сечения.

H – распор арки (горизонтальная составляющая опорных реакций);

y_K – арочная ордината сечения «К», определяется в зависимости от очерта-
ния оси арки по формуле параболы или окружности (начало координат
совпадает с левой опорой).

Для параболы

$$y = \frac{4f}{\lambda^2} x \cdot (\lambda - x);$$

Для окружности

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda}{2} - x\right)^2} - (R - f);$$

φ_K – угол между касательной, проведенной через точку «К» к арке, и гори-
зонталью.

а) для параболы

$$\varphi_K = \text{arctg } y'_K, \quad y'_K = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\lambda^2} (\lambda - 2x_K);$$

б) для окружности

$$\varphi_K = \arcsin \varphi_K, \quad \sin \varphi_K = \frac{\frac{\lambda}{2} - x_K}{R},$$

$$\cos \varphi_K = \frac{R - f + y_K}{R}, \quad R = \frac{f}{2} + \frac{\lambda^2}{8f}.$$

Таблицы исходных данных к задаче № 3

Таблица 3.1

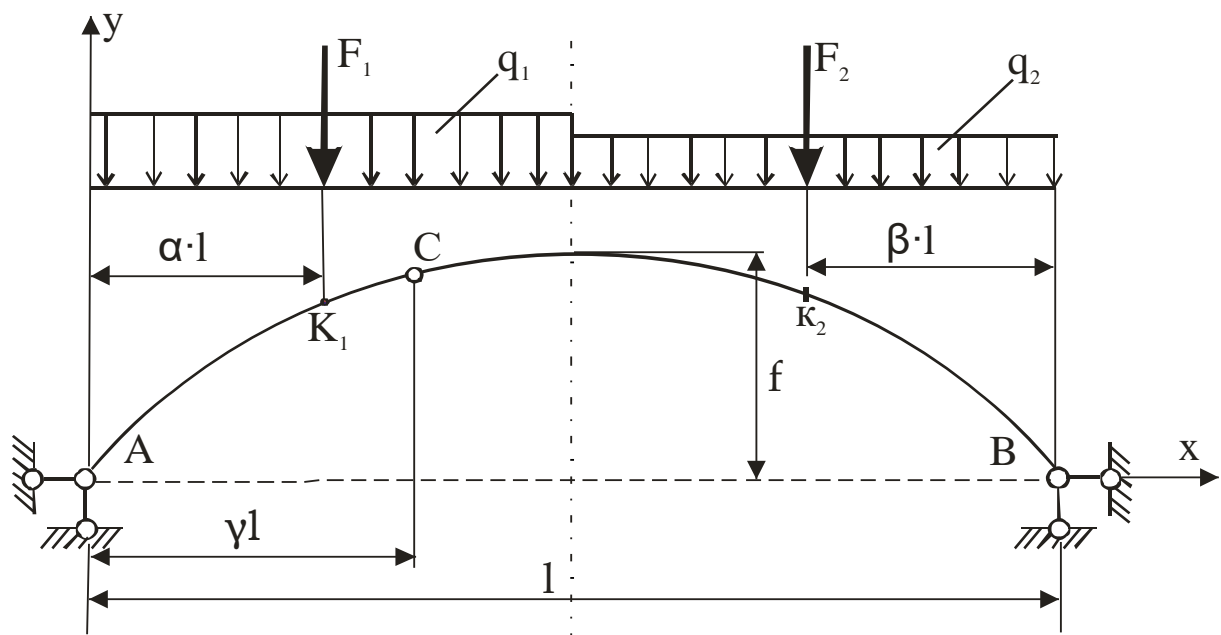
Предпоследняя цифра шифра	$\lambda, м$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	α	f/λ
0	20	0	20	0,15	0,14
1	16	20	0	0,20	0,15
2	18	0	30	0,18	0,16
3	22	30	0	0,25	0,18
4	26	0	40	0,22	0,20
5	24	40	0	0,16	0,22
6	30	0	50	0,24	0,25
7	28	50	0	0,26	0,30
8	32	0	10	0,30	0,32
9	34	10	0	0,28	0,35

Таблица 3.2

Последняя цифра шифра	$F_1, кН$	$F_2, кН$	β	γ
0	50	0	0,28	0,60
1	0	70	0,20	0,70
2	60	0	0,15	0,75
3	0	80	0,22	0,55
4	70	0	0,30	0,50
5	0	90	0,25	0,70
6	80	0	0,16	0,65
7	0	100	0,26	0,40
8	90	0	0,18	0,55
9	0	60	0,24	0,45

Примечание. Если сумма цифр шифра – четное число, очертание оси принимать по окружности, если нечетное – по параболе.

Расчетная схема к задаче № 3



ЗАДАЧА № 4

Тема: **Расчет статически неопределимой рамы методом сил**

Для заданной рамы требуется:

- 1 Определить число лишних неизвестных и привести три основных системы метода сил (ОС МС).
- 2 Для двух основных систем построить единичные \bar{M}_i и грузовые M_q эпюры изгибающих моментов.
- 3 Из этих двух ОС МС выбрать для расчета одну. Составить канонические уравнения, найти коэффициенты при неизвестных, свободные члены и проверить правильность их вычисления.
- 4 Решить систему канонических уравнений. Результаты вычислений проверить подстановкой неизвестных в исходные уравнения.
- 5 Построить исправленные M_i и расчетную $M_{расч}$ эпюры изгибающих моментов и провести её проверки – статическую и кинематическую .
6. По эпюре $M_{расч}$ построить расчетные (окончательные) эпюры поперечных и продольных сил $Q_{расч}$ и $N_{расч}$.
- 7 Определить перемещения (линейные и угловое) узла или сечения «А» (по указанию преподавателя) (I тип схем) или горизонтальное перемещение сечения №5 (II тип схем).

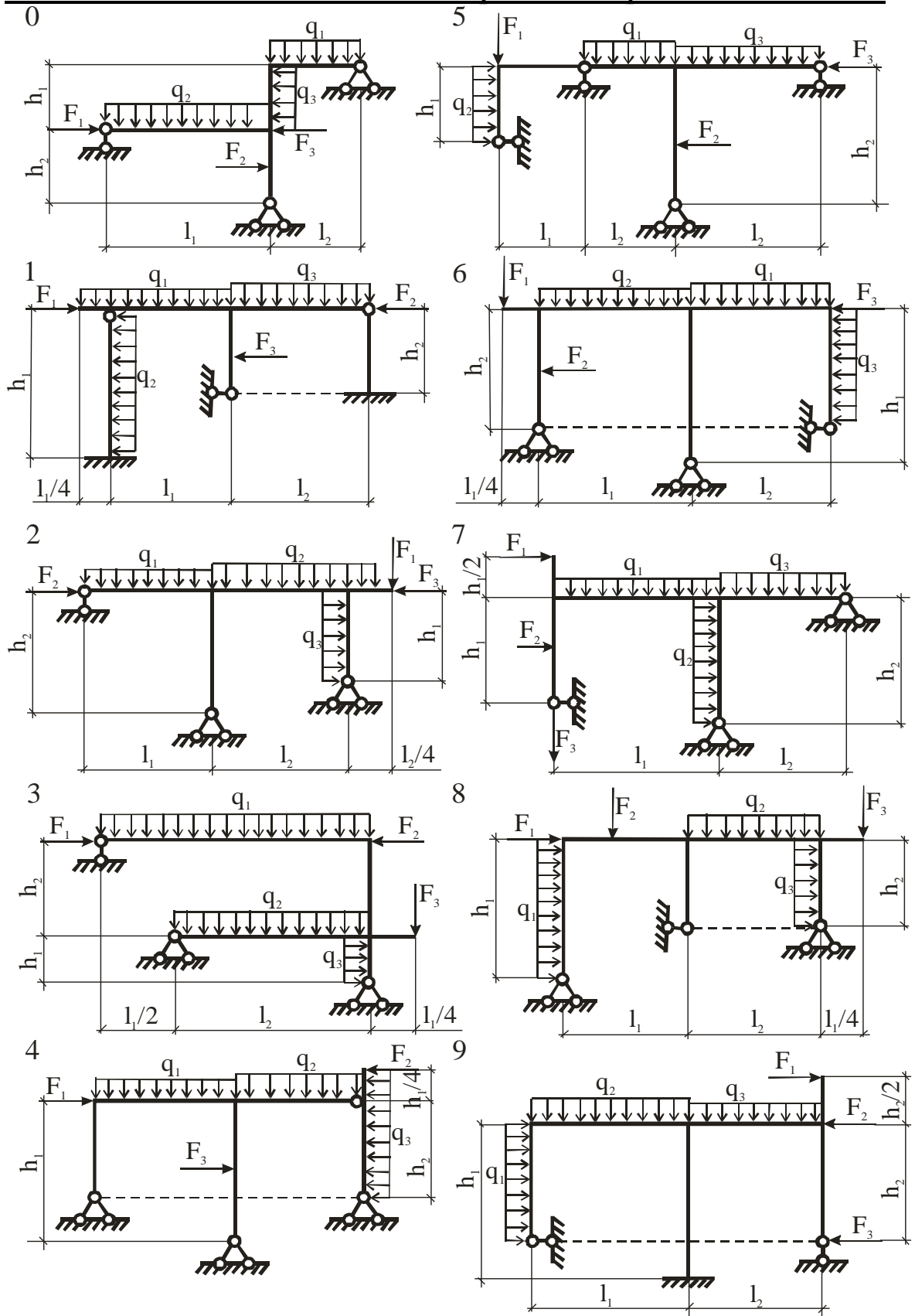
Статически неопределимыми называются системы, у которых не все опорные реакции и внутренние силовые факторы можно определить только с помощью уравнений статики. Статически неопределимые системы имеют так называемые лишние связи, благодаря которым приобретают ряд свойств, отличающих их работу от систем статически определимых.

Метод сил является одним из основных методов расчета статически неопределимых ферм, арок и многих типов рам. Идея метода состоит в том, что расчет статически неопределимой системы (заданной системы) заменяется расчетом основной (статически определимой) системы, полученной из заданной путем исключения лишних связей. Для одной заданной системы можно выбрать ряд основных. Основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

Важно обязательно проводить кинематический анализ выбираемых основных систем, так как изменяемые или мгновенно изменяемые системы недопустимы. Выбор основной системы является важным этапом расчета, поскольку рационально выбранная основная система может значительно упростить расчет. Поэтому предварительно образуют несколько основных систем (две или три) с тем, чтобы в дальнейшем выбрать рациональную.

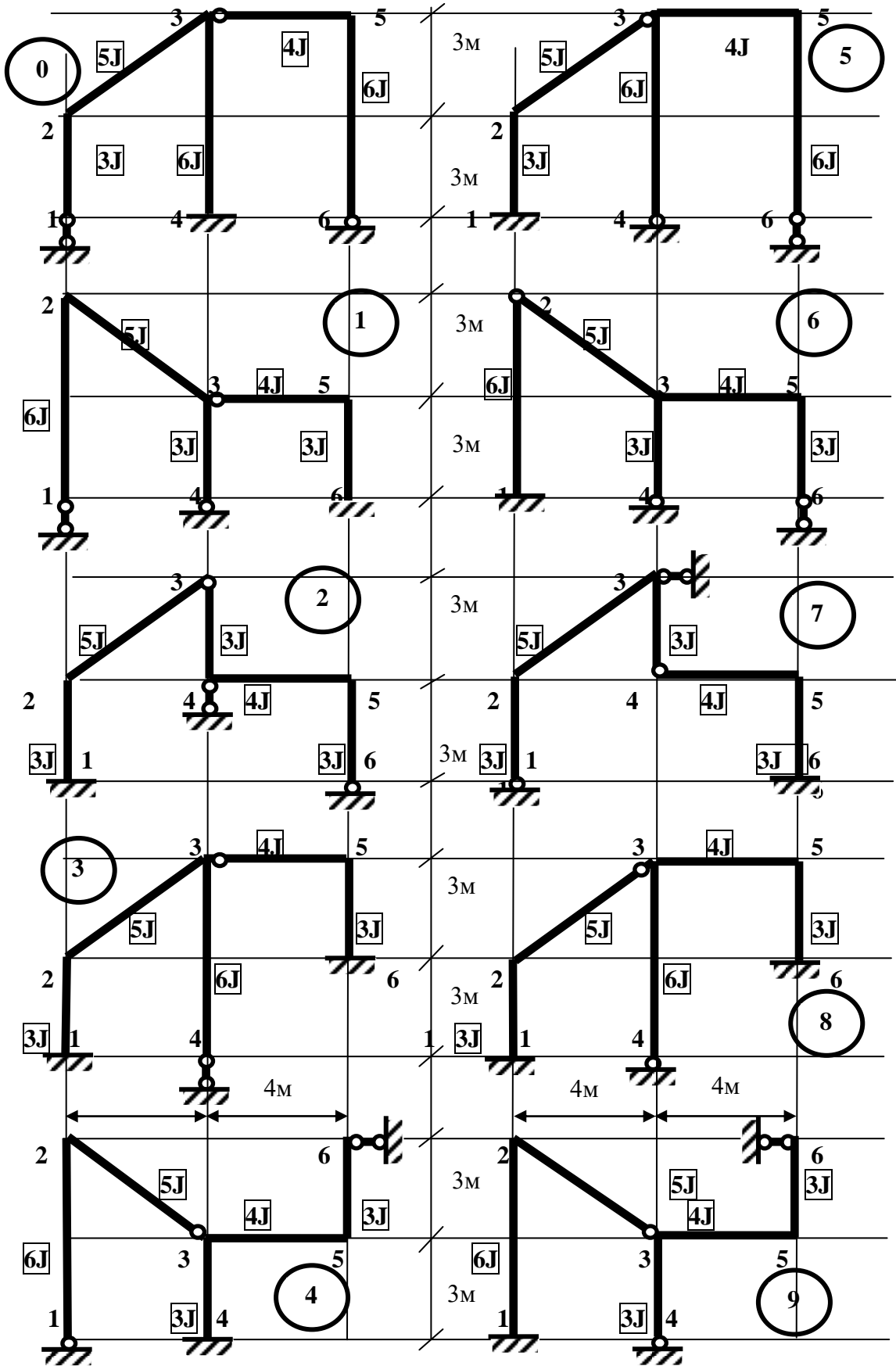
Основная система и заданная должны работать эквивалентно (одинаково). С этой целью к основной системе прикладывается заданная нагрузка, а по направлению отброшенных связей – усилия (искомые или лишние неизвестные). Эквивалентность работы есть требование равенства любых статических и кинематических факторов в заданной и основной системах.

Задача №4. Расчет статически неопределимых рам. Задания I типа



Задача №4. Расчет статически неопределимых рам методом сил.

Задания II типа



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПОРЯДОК РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ.

1 При расчете рам методом сил за основные неизвестные принимаются усилия в лишних связях. Число лишних связей (степень статической неопределимости) определяется по формуле:

$$n=3K-Ш \quad (*),$$

где K – количество замкнутых контуров;

$Ш$ – количество простых шарниров в заданной раме

или по формуле:

$$n=C-3Д \quad (**),$$

где: $Д$ – количество дисков, выделенных в системе;

C – количество связей, наложенных на эти диски.

Первая формула проще в использовании, однако вторая более конструктивна, т.к. в ходе определения степени статической неопределимости выявляются связи, некоторые из которых могут быть отброшены при выборе ОС МС.

В качестве основных систем принимаются статически определимые и геометрически неизменяемые системы, образованные из заданной путем удаления лишних, условно необходимых связей.

2 Построение единичных \overline{M}_i и грузовых M_F эпюр в основной системе начинают с определения опорных реакций. Затем, используя метод сечений, строят эпюры изгибающих моментов, откладывая их ординаты в масштабе со стороны растянутого волокна. Правильность построения эпюр \overline{M}_i и M_F контролируется проверкой равновесия моментов в каждом узле рамы ($\sum M = 0$).

3 Для расчета можно брать единичные и грузовую эпюры одной из основных систем или из разных основных систем. При этом необходимо следить за тем, чтобы выбранные эпюры \overline{M}_i были линейно независимы, т.е. $\overline{M}_1 \neq a \cdot \overline{M}_2$, $\overline{M}_1 \neq b \cdot \overline{M}_2 + c \cdot \overline{M}_3$ и т.д.

Канонические уравнения метода сил выражают мысль об отрицании перемещений в основной системе в результате всех воздействий (нагрузок и основных неизвестных) по направлению отброшенных связей.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, представляющие собой перемещения в направлении отброшенных связей, находят способом «перемножения эпюр».

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2}{EI} \cdot dS; \quad \delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} \cdot dS; \quad \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot M_F}{EI} \cdot dS.$$

Коэффициенты δ_{ii} всегда положительны, а побочные коэффициенты равны между собой $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ и могут принимать любые значения.

Для проведения проверок вычисления δ_{ij} , Δ_{iF} строится суммарная единичная эпюра $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$.

Вычисленные удельные перемещения проверяются с помощью универсальной проверки, путем перемножения суммарной единичной эпюры са-

мой на себя.
$$\sum \sum \delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_S^2}{EI} \cdot dS,$$

где $\sum \sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \dots + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots)$;

Правильность вычисления свободных членов определяется проверкой

$$\sum \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\overline{M}_S \cdot M_F}{EI} \cdot dS,$$

где $\sum \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}$.

Допускаемая погрешность всех проверок $\Delta \leq 1\%$.

4 Канонические уравнения можно решать любым известным методом. Найденные значения неизвестных подставляют во все исходные уравнения для проверки, при этом левая часть каждого уравнения должна быть равна нулю или составлять не более 0,5% от суммы всех однозначных членов соответствующего уравнения.

5 Определив основные неизвестные, «исправляют» единичные эпюры, умножая их соответственно на полученные значения неизвестных $\overline{M}_i \cdot X_i$, а затем строят расчетную (окончательную) эпюру.

$$M_{\text{расч}} = M_{OK} = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \dots + M_F.$$

В окончательной эпюре проверяют равновесие моментов в узлах ($\sum M = 0$) и выполняют деформационную проверку, перемножая расчетную (окончательную) эпюру (M_{OK}) с суммарной единичной эпюрой (\overline{M}_S) или каждой из единичных эпюр (\overline{M}_i) в отдельности:

$$\sum \int \frac{M_{OK} \cdot \overline{M}_S}{EI} \cdot dS = 0, \quad \sum \int \frac{M_{OK} \cdot \overline{M}_i}{EI} \cdot dS = 0, \quad i = 1 \div n.$$

Допускается отклонение $\Delta \leq 3\%$ от суммы положительных или отрицательных слагаемых в уравнении.

6 Эпюру Q можно строить с использованием эпюры M_{OK} , используя

дифференциальную зависимость $\frac{dM}{dX} = Q = tg \alpha$ для прямолинейных уча-

стков, или путем рассмотрения статического равновесия вырезанного участка рамы, нагруженного и внешними и внутренними силами (для участков с криволинейным очертанием эпюры M_{OK}

На полях эпюры Q проставляются знаки.

7 Вырезая узлы рамы и рассматривая условия их равновесия ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$) находят продольные силы и строят эпюру N. Растягивающие продольные силы считаются положительными, сжимающие отрицательными. Следует обратить внимание на то, что при вырезании узлов должны быть указаны все внутренние усилия (перерезывающие силы известны) и внешние узловые нагрузки.

8 Опорные реакции можно определить из условия равновесия вырезанных опорных узлов (после определения M_{OK}, Q, N). Статическая проверка состоит в проверке для всей рамы в целом выполнения условия равновесия $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$..

Таблица 4.1. Исходных данных к задаче № 4

Предпоследняя цифра шифра	$\lambda_1, м.$	$h_2, м.$	$\frac{Jc}{Jp}$	$F_1, кН.$	$F_2, кН.$	$F_3, кН.$
0	4	4	1:2	16		
1	4	6	1:4		20	
2	4	8	1:5			30
3	6	6	1:3	20		
4	6	4	2:3		30	
5	6	8	1:4			16
6	8	4	2:5	30		
7	8	6	2:3		16	
8	8	8	1:3			20
9	5	5	2:5	24		

Таблица 4.2. Исходных данных к задаче № 4

Последняя цифра шифра	$\lambda_2, м.$	$h_1, м.$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	$q_3, кН/м$
0	5	4			6
1	5	6		12	
2	5	8	16		
3	8	4,5			12
4	8	3		6	
5	8	5	10		
6	6	4,5			10
7	6	3		16	
8	6	5	12		
9	4	5			18

ЗАДАЧА № 5

Тема: **Расчет двухшарнирной арки методом сил**

Для заданной двухшарнирной арки требуется:

- 1 Определить опорные реакции от постоянной нагрузки.
- 2 Построить эпюры внутренних усилий M, Q и N .

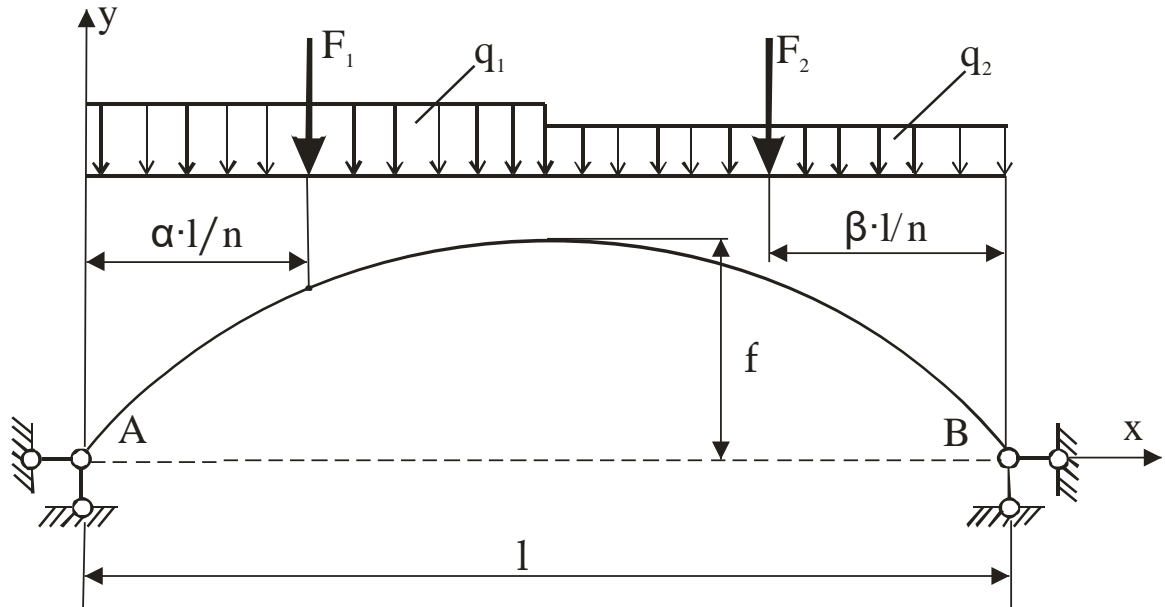


Схема двухшарнирной арки к задаче № 5

Исходные данные к заданию приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 5.1

Предпоследняя цифра шифра	$\lambda, м$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	α
0	20	0	20	1
1	16	20	0	2
2	18	0	30	3
3	22	30	0	4
4	26	0	40	5
5	24	40	0	6
6	30	0	50	7
7	28	50	0	1
8	32	0	10	2
9	34	10	0	3

Таблица 5.2

Последняя цифра шифра	$F_1, кН$	$F_2, кН$	β	$\frac{f}{\lambda}$
1	2	3	4	5
0	50	0	1	0,21
1	0	70	2	0,22
2	60	0	3	0,23
3	0	80	4	0,24
4	70	0	5	0,25
5	0	90	6	0,27
6	80	0	7	0,28
7	0	100	1	0,30
8	90	0	2	0,32
9	0	110	3	0,35

Примечания:

1 Здесь n – число одинаковых отрезков, на которые разбивают пролет арки.

2 Если сумма цифр шифра – четное число, очертание оси принимают по окружности, если нечетное – по параболе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1 При действии только вертикальной нагрузки основную систему выбирают, как правило, отбросив одну горизонтальную связь.

2 Разбивают пролет арки на $8 \div 20$ одинаковых отрезков ΔX , заменяя криволинейную ось арки ломаной линией, и производят подсчет геометрических характеристик отдельных отрезков ломаного стержня:

φ_i - угол наклона к горизонтали i -го отрезка ломаного стержня;

$X_i; Y_i$ - координаты сечений арки, совпадающих с вершинами многоугольника.

Величина Y_i определяется в зависимости от очертания оси арки (начало координат совпадает с левой опорой):

- для параболы

$$y = \frac{4f}{\lambda^2} \cdot x \cdot (\lambda - x)$$

- для окружности

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda}{2} - X\right)^2} - (R - f).$$

3 Строят эпюру изгибающих моментов от действия единичного усилия

$\overline{X}_1 = 1$ в элементах ломаного стержня. Ординаты единичной эпюры находят из выражения $\overline{M}_1 = -y$.

4 Строят эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки для стержня с ломаной осью, причем $M_F = M^B$.

Здесь M^B - изгибающий момент в поперечных сечения шарнирной балки от действия заданной нагрузки.

Распределенную нагрузку (если она имеется) предварительно заменяют сосредоточенными силами, приложенных в сечениях, совпадающих с вершинами многоугольника.

5 Определяют коэффициент при неизвестном и свободный член канонического уравнения

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} \cdot dS; \quad \Delta_{1F} = \sum_s \int \frac{\overline{M}_1 \cdot M_F}{EI} \cdot dS,$$

после чего находят лишнее неизвестное (распор):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}.$$

6 Строят окончательные (расчетные) эпюры внутренних усилий M, Q и N , для чего вычисляют их ординаты в сечениях арки, совпадающих с вершинами многоугольника:

$$\begin{aligned} M &= M^B - H \cdot y; \\ Q &= Q^B \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N &= -(Q^B \sin \varphi + H \cos \varphi), \end{aligned}$$

где Q^B - поперечные силы в сечениях шарнирной балки от действия заданной нагрузки;

φ - угол между горизонталью и касательной к действительной оси арки, определяемый в зависимости от очертания оси арки:

- для параболы

$$\varphi = \arctg y'; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\lambda^2}(\lambda - 2x);$$

- для окружности

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{\lambda/2 - x}{R}, \\ \cos \varphi &= \frac{R - f + y}{R}, \quad R = \frac{f}{2} + \frac{\lambda^2}{8f}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА № 6

Тема: **Расчет бесшарнирной арки методом сил**

Для заданной бесшарнирной арки требуется:

- 1 Определить опорные реакции от постоянной нагрузки.
- 2 Построить эпюры внутренних усилий M, Q и N .

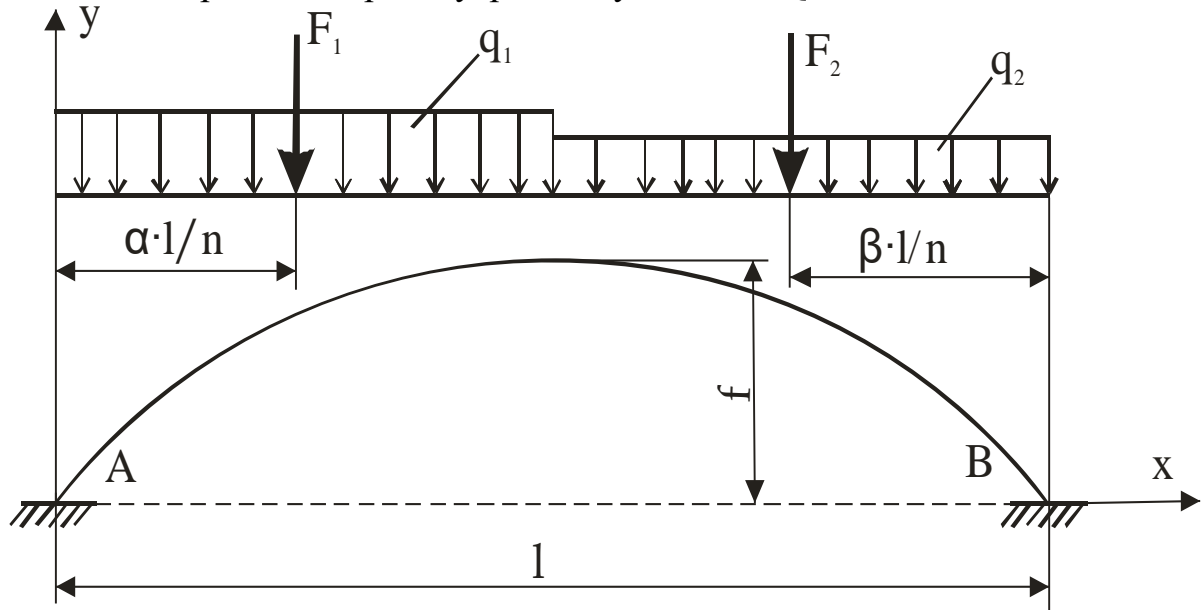


Схема бесшарнирной арки к задаче № 6

Исходные данные к заданию приведены в таблицах 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

Предпоследняя цифра шифра	$\lambda, м$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	α
0	20	0	20	7,5
1	16	20	0	6,5
2	18	0	30	5,5
3	22	30	0	4,5
4	26	0	40	3,5
5	24	40	0	2,5
6	30	0	50	1,5
7	28	50	0	3,5
8	32	0	60	2,5
9	34	60	0	1,5

Таблица 6.2

Последняя цифра шифра	$F_1, кН$	$F_2, кН$	β	$\frac{f}{\lambda}$
0	50	0	7,5	0,21
1	0	70	6,5	0,22
2	60	0	5,5	0,23
3	0	80	4,5	0,24
4	70	0	3,5	0,25
5	0	90	2,5	0,27
6	80	0	1,5	0,28
7	0	100	3,5	0,30
8	90	0	2,5	0,32
9	0	110	1,5	0,35

Примечание. Если сумма цифр шифра четное число, то очертание оси принимают по окружности, если нечетное по – параболе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Криволинейную ось арки заменяют ломаной линией с числом равных отрезков $n = 8 \div 20$, длиной ΔX . В пределах каждого отрезка размеры поперечных сечений принимаются постоянными ($I_x = const$), а закон изменения моментов инерции сечений по длине арки принимается по следующей зависимости $I_x = I_c / \cos \varphi_x$,

где I_c – момент инерции сечения арки в ключе;

φ_x – угол между касательной к действительной оси арки и горизонталью.

2 Используя уравнение оси арки, находят ординаты характерных сечений (середины отрезков ломаного стержня), а также тангенс угла между касательной к действительной оси арки и горизонталью.

Величина ординаты (y) и угла φ определяется в зависимости от заданного очертания оси арки (начало координат x_1 O_1 y_1 совпадает с левой опорой):

–для параболы

$$y_1 = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x_1 (l - x_1);$$

$$\varphi_x = \operatorname{arctg} y_1'; \quad y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{4 \cdot f}{l^2} (l - 2x_1);$$

—для окружности

$$y_1 = \sqrt{R^2 - (l/2 - x_1)^2} - (R - f);$$

$$\varphi_x = \arcsin \varphi_x; \quad \sin \varphi_x = \frac{l/2 - x_1}{R};$$

$$\cos \varphi_x = \frac{R - f + y_1}{R}; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}.$$

3 Основную систему получают, разрезав арку в ключе и перенеся неизвестные в упругий центр.

Ордината упругого центра тяжести в системе координат $x_1 O_1 y_1$ равна

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_{li}}{n},$$

где y_{li} — ордината середины отрезка ломаного стержня.

Дальнейшие вычисления выполняют в новой системе координат $x O y$.

4 Строят единичные эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ и \overline{M}_3 в основной системе для ломаного стержня: $\overline{M}_1 = x; \overline{M}_2 = -y; \overline{M}_3 = -1$.

Здесь x и y — координаты середины отрезков ломаного стержня в новой системе координат $x O y$.

5 Строят эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки для ломаного стержня M_F , заменив предварительно распределенную нагрузку (если она имеется) сосредоточенными силами, приложенными в вершинах ломаного стержня.

6 Определяют значения коэффициентов при неизвестных и свободные члены канонических уравнений:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} = 0,$$

способом «перемножения» эпюр:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2}{dS} \cdot dS; \quad \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_F}{EI} \cdot dS.$$

Учитывая, что $\frac{\Delta S_i}{I_{xi}} = \frac{X}{I_C}$ можно записать

$$\delta_{ii} = \sum \frac{\overline{M_i^2}}{EI_C} \cdot X; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{\overline{M_i} \cdot M_F}{EI_C} \cdot X,$$

где ΔS_i - длина i -го прямолинейного отрезка ломаного стержня;
 $\overline{M_i}, M_F$ - изгибающие моменты в сечениях посередине каждого участка ΔS ломаного стержня.

7 Находят неизвестные

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2F}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3F}}{\delta_{33}}$$

и строят расчетные эпюры M, Q и N на основании принципа независимости действия сил:

$$M = M_F + \overline{M_1} \cdot X_1 + \overline{M_2} \cdot X_2 + \overline{M_3} \cdot X_3 = M_F + x \cdot X_1 - y \cdot X_2 - 1 \cdot X_3;$$

$$Q = Q_F + \overline{Q_1} \cdot X_1 + \overline{Q_2} \cdot X_2 + \overline{Q_3} \cdot X_3 \text{ или учитывая, что}$$

$$\overline{Q_1} = \cos \varphi, \quad \overline{Q_2} = -\sin \varphi, \quad \text{а } \overline{Q_3} = 0, \text{ тогда}$$

$$Q = Q_F \cdot \cos \varphi + \cos \varphi \cdot X_1 - \sin \varphi \cdot X_2,$$

$$N = N_F + \overline{N_1} \cdot X_1 + \overline{N_2} \cdot X_2 + \overline{N_3} \cdot X_3.$$

$$\text{т.к. } \overline{N_1} = -\sin \varphi, \quad \overline{N_2} = -\cos \varphi, \quad \overline{N_3} = 0, \text{ то}$$

$$N = -(Q_F \cdot \sin \varphi + \sin \varphi \cdot X_1 + \cos \varphi \cdot X_2).$$

Здесь Q_F - поперечная сила в соответствующих сечениях (посередине каждого участка ΔS ломаного стержня) от действия заданной нагрузки.

8 Производят деформационную проверку, которая состоит в том, что перемещения по направлению отброшенных связей должны отсутствовать:

$$\sum \int \frac{\overline{M_1} \cdot M}{EI} \cdot dS = 0; \quad \sum \int \frac{\overline{M_2} \cdot M}{EI} \cdot dS = 0; \quad \sum \int \frac{\overline{M_3} \cdot M}{EI} \cdot dS = 0.$$

Учитывая принятые упрощения, решение этих интегралов сводится к вычислению сумм:

$$\sum x \cdot M = 0; \quad \sum y \cdot M = 0; \quad \sum M = 0.$$

Погрешность вычислений должна быть $\Delta\% \leq 3\%$.

ЗАДАЧА № 7

Тема: **Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений**

Для заданной статически неопределимой рамы требуется:

- 1 Определить число основных неизвестных и выбрать основную систему метода перемещений. Вычислить погонные жесткости стержней.
- 2 Построить единичные эпюры \bar{M}_i от действия основных неизвестных и грузовую эпюру M_F от действия заданной внешней нагрузки на основную систему.
- 3 Записать канонические уравнения метода перемещений. Определить коэффициенты, свободные члены и проверить их.
- 4 Решить систему канонических уравнений и проверить правильность ее решения.
- 5 Построить расчетные эпюры M,Q,N и проверить их

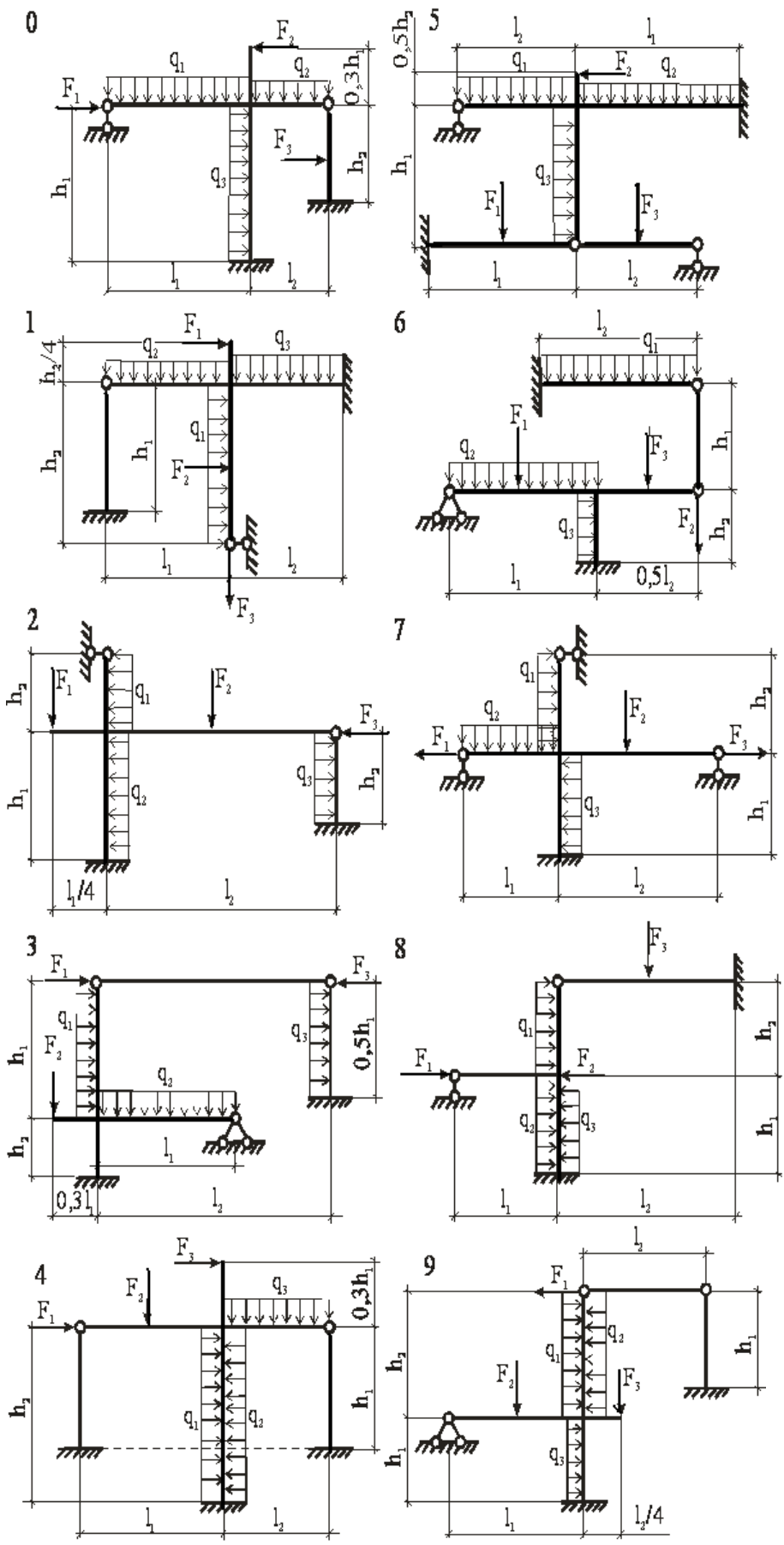
Таблицы исходных данных к задаче № 7

Таблица 7.1

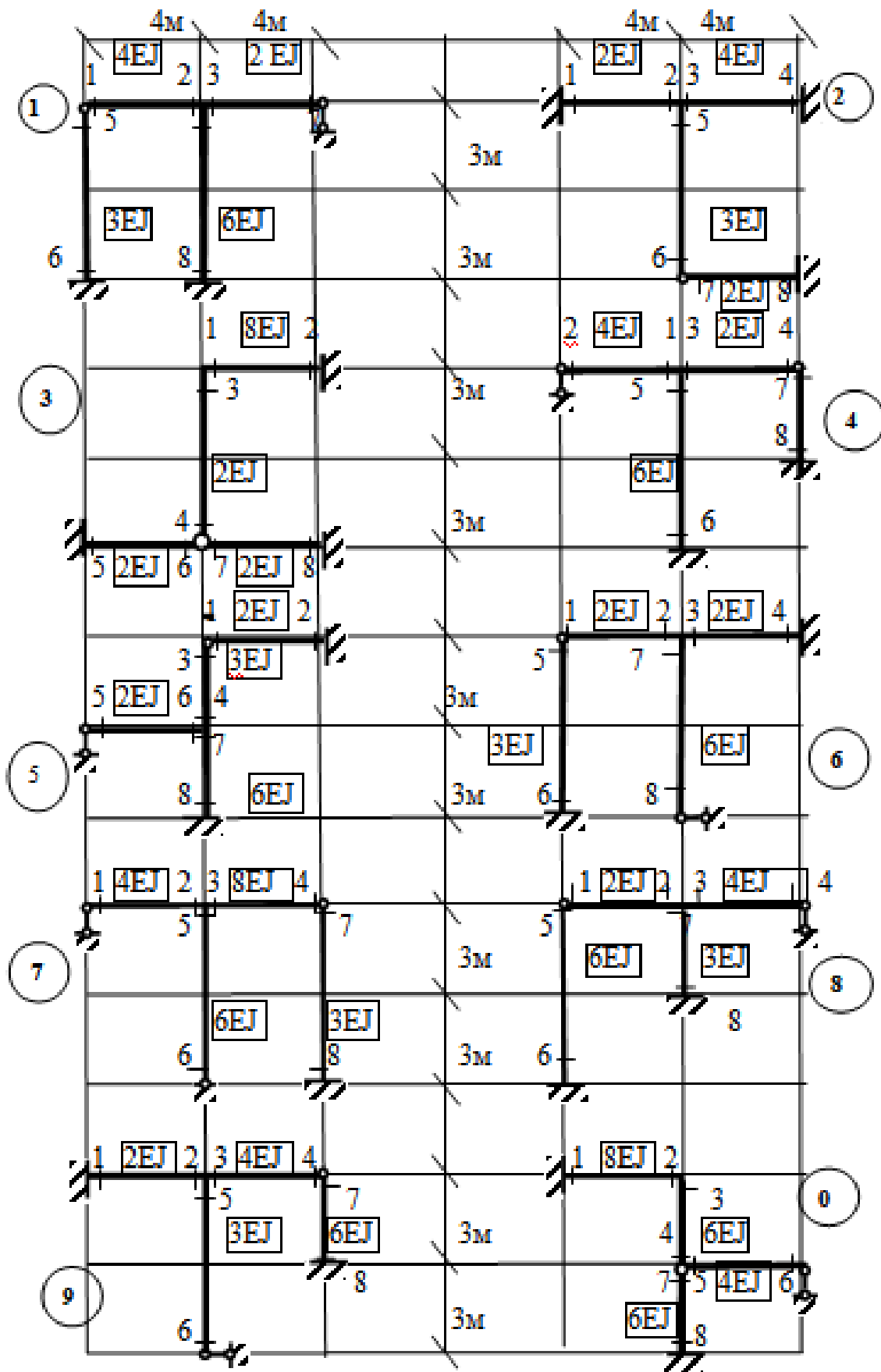
Предпоследняя цифра шифра	$\lambda_1, м.$	$h_2, м.$	$F_1, кН.$	$F_2, кН.$	$F_3, кН.$
0	4	5	24		
1	6	8			16
2	8	6		20	
3	5	4	30		
4	4	8			20
5	8	4		30	
6	4	6	16		
7	5	8			30
8	6	6		16	
9	6	4	20		

Таблица 7.2

Последняя цифра шифра	$\lambda_2, м.$	$h_1, м.$	$q_1, кН/м$	$q_2, кН/м$	$q_3, кН/м$	$\frac{J_c}{J_p}$
0	4	5	18			1:2
1	6	4		6		2:5
2	6	3			12	1:3
3	6	5	6			1:4
4	8	3		16		2:3
5	8	4			10	1:5
6	8	5	10			1:3
7	5	5		12		1:4
8	5	8			16	1:2
9	5	6	18			2:5



ЗАДАЧА № 7. . Схемы рам для заданий I типа



ЗАДАЧА №7. Схемы рам для заданий II типа

УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАНИЙ II ТИПА:

Для расчетной схемы рамы, принятой по третьей цифре шифра и данным из таблицы №2, требуется:

1. Выбрать основную систему метода перемещений;
2. Составить расчетные уравнения в общем виде;
3. Построить единичные и грузовые эпюры моментов;
4. Определить коэффициенты и свободные члены расчетных уравнений;
5. Решить расчетные уравнения;
6. Построить расчетные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил и выполнить их проверки.

Первая цифра шифра	Сосредоточенная сила «F» приложена на середине стержня рамы	Равномерно распределенная нагрузка «q» приложена на стержне	Вторая цифра шифра	F (кН)	q (кН/м)
0	1-2	5-6	0	4	1
1	3-4	7-8	1	8	2
2	5-6	1-2	2	12	4
3	7-8	3-4	3	16	6
4	1 -2	7-8	4	20	8
5	3 -4	5-6	5	16	8
6	5-6	3-4	6	20	6
7	7-8	1-2	7	12	2
8	4-3	8-7	8	8	4
9	2-1	6-5	9	6	2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Идея метода перемещений состоит в том, что расчет статически неопределимой (заданной) системы заменяется расчетом основной системы, полученной из заданной путем наложения на нее (ввода) дополнительных связей.

Вводом дополнительных связей заданная система разбивается на ряд однопролетных статически неопределимых балок, работающих независимо друг от друга. Усилия в балках возникают от нагрузок, приложенных непосредственно к этим балкам, а передача усилий с одной балки на соседние исключается. Предполагается, что результаты расчета статически неопределимых однопролетных балок на силовые и несиловые загрузки известны заранее (имеются табличные данные).

Основная система должна работать эквивалентно заданной. Для этого основная система загружается заданной нагрузкой и смещениями (угловыми и линейными) узлов в местах наложения связей.

Основными неизвестными метода являются угловые и поступательные перемещения введенных связей.

При выборе основной системы вводятся два типа связей: моменты («заделки»), препятствующие угловым смещениям и силовые (стержни), препятствующие линейным смещениям. При этом моментные связи ограничивают лишь угловые смещения и не препятствуют линейным.

Далее приведен порядок расчета статически неопределимых рам методом перемещений.

1 При расчете рамы методом перемещений за основные неизвестные принимаются угловые перемещения жестких углов « n_y » и независимые линейные смещения « n_d ».

$$n = n_y + n_d,$$

где n_y – число угловых перемещений, определяется подсчетом жестких узлов, способных поворачиваться; n_d – число независимых линейных смещений, подсчитывается как степень свободы шарнирной схемы (во все жесткие узлы, включая опорные, вводятся полные шарниры, консольные участки при этом не учитываются), либо как число дополнительных стержневых связей с шарнирами по концам, обращающих ее в неизменяемую систему. При этом расчет ведем пренебрегая изменением расстояния между узлами.

Расчет удобно вести в относительных погонных жесткостях, т.к. конечный результат решения рамы не зависит от их абсолютных значений $\left(\frac{EI_i}{\lambda_i}\right)$. Для

этого необходимо все погонные жесткости выразить через одну, удобнее наименьшую.

Для получения основной системы метода перемещений следует во все же-

сткие узлы заданной рамы ввести заделки (защемления) и поставить дополнительные стержни с шарнирами по концам, предотвращающие линейные смещения узлов.

2 Эпюры моментов от единичных неизвестных и нагрузки в основной системе строятся на основании таблиц, приведенных в учебниках.

При этом необходимо показать деформированные оси стержней, что позволит избежать ошибок при определении положения растянутых волокон.

3 Канонические уравнения выражают мысль об отрицании реакций во введенных связях. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены находятся из условий равновесия выделенных частей рамы (статический метод: $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0$). Коэффициенты r_{ij} определяются независимо друг от друга. Равенство коэффициентов, расположенных на побочных диагоналях симметрично относительно главной $r_{ij} = r_{ji}$, служит дополнительной проверкой их, а также правильности построения единичных эпюр. Главные коэффициенты r_{ii} всегда положительны, так же как и слагаемые, из которых они состоят. Побочные коэффициенты r_{ij} ($i \neq j$) могут принимать любые значения.

4 Контроль вычислительных операций производится с помощью универсальной проверки, для чего строится суммарная единичная эпюра $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$. Сложив все коэффициенты при неизвестных канонических уравнений и перемножив суммарную единичную эпюру (\overline{M}_s) саму на себя, получим:

$$\sum \sum r_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_s^2}{EI} \cdot dS,$$

где $\sum \sum r_{ij} = r_{11} + r_{22} + \dots + 2(r_{12} + r_{13} + \dots)$.

При этом необходимо обратить внимание на соблюдение размерностей в правой и левой частях равенства. Допускаемая погрешность $\Delta \leq 1\%$.

Проверка свободных членов:

$$\sum R_{iF} = - \sum \int \frac{\overline{M}_s \cdot M_F^0}{EI} \cdot dS,$$

где M_F^0 – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, построенная в любой основной системе метода сил.

5 Решение и проверка канонических уравнений производится, так же как и в методе сил.

После нахождения основных неизвестных, «исправляются» единичные эпюры ($\overline{M}_i \cdot Z_i$) и строят окончательную эпюру.

$$M_{OK} = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + M_F.$$

Построив окончательную эпюру, проверяют равновесие моментов во всех

узлах ($\sum M = 0$).

6 Деформационная проверка может быть проведена по замкнутым бесшарнирным контурам (по приведенным площадям эпюры M_{OK}), если они имеются. В случае их отсутствия строятся единичные эпюры в любой основной системе метода сил и находится суммарная единичная эпюра

$$\overline{M}_S^0 = \overline{M}_1^0 + \overline{M}_2^0 + \dots + \overline{M}_n^0.$$

Далее перемножается окончательная эпюра M_{OK} на суммарную единичную \overline{M}_S^0 или на каждую из единичных эпюр \overline{M}_i^0 в отдельности:

$$\sum \int \frac{M_{OK} \cdot \overline{M}_S^0}{EI} \cdot dS = 0, \quad \sum \int \frac{M_{OK} \cdot \overline{M}_i^0}{EI} \cdot dS = 0.$$

Допускаемое отклонение $\Delta \leq 3\%$ от суммы положительных или отрицательных слагаемых.

7 Эпюру Q строят по эпюре M_{OK} , используя дифференциальные зависимости

сти $\frac{dM}{dX} = Q = tg \alpha$ (для участков с прямолинейным очертанием эпюры M_{OK}) или путем рассмотрения равновесия вырезанных участков рамы с

приложенной одновременно и внешней нагрузкой и внутренними силами (для участков с криволинейным очертанием эпюры M_{OK}). На эпюре Q следует расставить знаки для каждого участка.

8 Из условий равновесия вырезанных узлов, при неизвестных перерезывающих силах ($\sum X = 0; \sum Y = 0$), находят продольные силы N и строят их эпюру, расставив знаки по каждому участку.

Вырезание узлов следует начинать с узла, в котором действует не более двух неизвестных внутренних усилий.

9 Используя построенные эпюры M_{OK} , Q , N , определяют опорные реакции и, записав условия равновесия рамы в целом, производят полную статическую проверку.

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_{(.)} = 0.$$

ЗАДАЧА № 8

Тема: Расчет подпорной стенки

Для заданной подпорной стенки требуется при данных (Табл.8.1 и 8.2)

- 1 Построить эпюры интенсивности давления грунта на правую и левую напорные грани стенки.
- 2 Определить силы, действующие на подпорную стенку (от давления грунта и равномерно-распределенной нагрузки, собственного веса стенки и веса массы грунта на фундаментной плите) и определить точки их приложения и направления действия.
- 3 Для массивных подпорных стен:
 - а) определить точки приложения равнодействующих сил в сечениях 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3 и построить многоугольник давления;
 - б) построить эпюры нормальных напряжений в тех же сечениях.
- 4 Для тонких подпорных стен:
 - а) построить эпюру нормальных напряжений в грунте под фундаментной плитой;
 - б) определить изгибающие моменты в характерных сечениях 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3.
- 5 Проверить подпорную стенку на устойчивость.

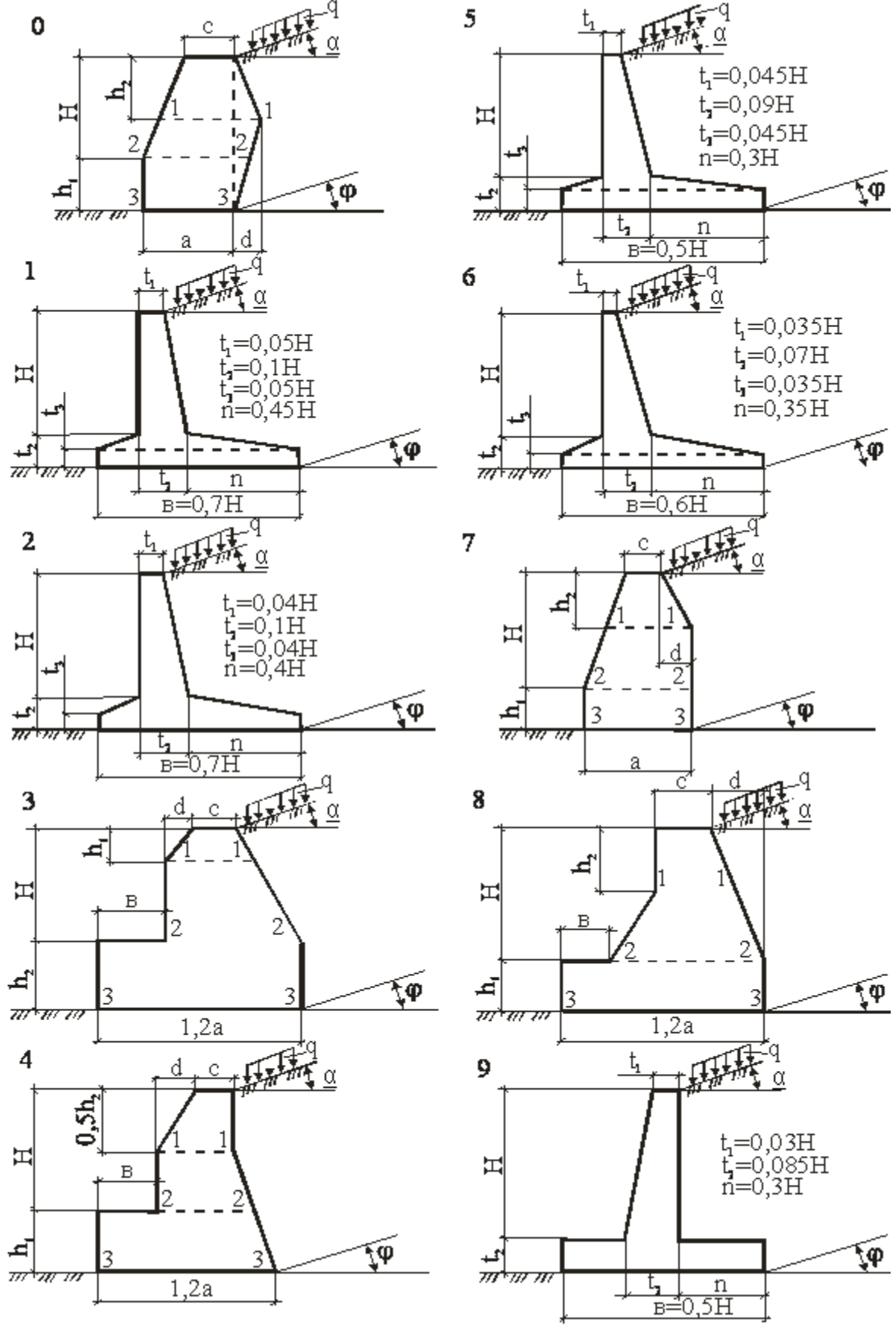
Таблица 8.1

Предпоследняя цифра шифра	$H, м$	$h_1, м$	$h_2, м$	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$d, м$	$\gamma_{кл}, кН/м^3$
0	6,5	2,2	4,0	3,5	0,4	1,0	0,8	21,0
1	4,5	1,5	3,0	2,5	0,5	0,8	0,6	20,0
2	7,5	2,5	5,0	4,0	0,4	1,3	1,0	23,5
3	5,5	1,8	3,0	3,0	0,6	1,1	0,9	22,0
4	7,5	2,8	5,0	4,6	0,5	1,4	1,2	22,5
5	6,0	2,0	3,5	3,3	0,5	1,2	0,7	20,5
6	4,0	1,6	2,8	2,4	0,4	0,7	0,5	23,5
7	8,0	2,6	4,5	4,4	0,6	1,5	1,1	24,0
8	5,0	1,7	3,2	2,8	0,6	0,8	0,7	21,5
9	7,0	2,3	4,5	3,8	0,8	1,4	1,0	20,0

Таблица 8.2

Последняя цифра шифра	$\gamma_{гр}, кН/м^3$	$\varphi, град$	$\varphi_s, град$	$\alpha, град$	$q, кН/м^2$
0	15,0	24	6	4	18
1	18,5	40	20	6	12
2	16,5	30	10	8	8
3	19,0	38	14	10	10
4	16,0	28	12	12	16
5	18,0	35	16	4	24
6	15,5	26	8	10	20
7	17,0	32	15	4	26

8	19,5	36	22	12	14
9	17,5	34	18	6	22



Схемы подпорных стенок к задаче № 8
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1 Расчетная длина подпорной стенки принимается равным одному метру. Грунт справа и слева от стенки принимается естественной влажности с удельным весом, указанным в таблице 2.

Равномерно-распределенная нагрузка заменяется эквивалентным слоем грунта, толщина слоя которого находится по формуле:

$$h = \frac{q}{\gamma_{ГР}}.$$

Силы давления грунта определяются аналитически, при этом следует продолжить направление напорной грани подпорной стенки до пересечения с приведенной поверхностью грунта (равномерно-распределенная нагрузка заменена эквивалентным слоем). Точка пересечения считается началом фиктивной «расчетной грани».

Интенсивность давления грунта определяется по формуле:

$$q = \gamma_{ГР} \cdot h \cdot \lambda_{ah},$$

где h – высота, прямолинейного участка стенки, отсчитываемая сверху - вниз;

$\gamma_{ГР}$ – удельный вес грунта;

λ_{ah} – коэффициент бокового давления грунта, определяемый по формуле:

$$\lambda_{ah} = \left[\frac{\cos(\varphi - \beta)}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_S) \cdot \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \psi \cdot \cos(\beta - \alpha)}} \right)} \right]^2 \cdot \frac{1}{\sin \psi},$$

где φ – угол внутреннего трения грунта;

φ_S – угол трения грунта по напорной грани стены;

α – угол наклона поверхности грунта к горизонту;

α – в случае возвышения естественной поверхности грунта в сторону от стенки, угол альфа считается положительным (если грунт располагается справа от стенки – то при отклонении против хода часовой стрелки);

β – угол наклона напорной грани стенки к вертикали;

β считается положительным в случае отклонения напорной грани стенки от вертикали в сторону грунта (если грунт располагается справа от стенки – то при отклонении против хода часовой стрелки);

$$\psi = 90^0 - \varphi_S - \beta.$$

По найденным значениям строятся эпюры интенсивности давления грунта

на напорные грани стенки.

2 Величина активного давления E_a на грани определяется площадью эпюры интенсивности давления грунта по высоте соответствующей грани. Точка приложения по высоте соответствует положению центра тяжести той фигуры (площади), по которой определялась величина активного давления E_a .

3 Для каждого блока стенки вычисляются: собственный вес стенки, силы давления грунта, а также координаты точек приложения найденных сил и направления их действия.

4 Для массивных подпорных стен:

а) определяются точки приложения равнодействующих сил в горизонтальных сечениях 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3. Для этого необходимо найти эксцентриситеты « e » – расстояния от центра тяжести соответствующего сечения до точки выхода равнодействующей всех сил, действующих в сечении;

б) эпюры напряжений в характерных сечениях строятся по законам распределения нормальных напряжений при сложном сопротивлении

$$\sigma_{i \max}^{\min} = \frac{N_i}{b_i} \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_i}{b_i} \right),$$

где N_i – нормальная составляющая равнодействующей всех сил, действующих в сечении;

b_i – ширина подпорной стенки в i – том сечении.

Нормальные напряжения в подошве фундамента определяются по той же формуле, что и σ_i в сечениях стены, если эксцентриситет равнодействующих сил $e \leq \frac{b}{6}$.

$e \leq \frac{b}{6}$.

e_i – эксцентриситет точки приложения силы N_i в i – том сечении.

Нормальные напряжения в грунте под подошвой фундамента при $e > \frac{b}{6}$,

при условии отсутствия растягивающих напряжений в грунте определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{2N}{3C}, \quad \sigma_{\min} = 0,$$

где C – расстояние от наружного ребра подошвы фундамента до точки приложения равнодействующей;

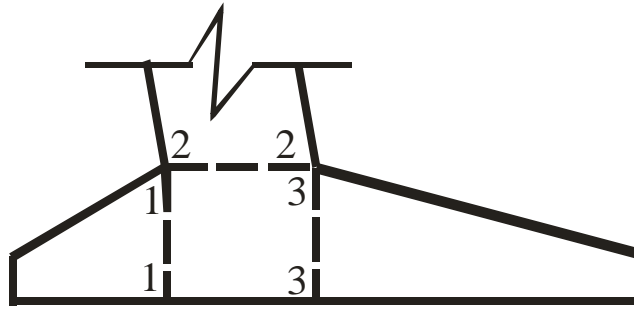
$3C$ – протяженность эпюры сжимающих напряжений.

5 Для тонкой подпорной стенки:

а) строятся эпюры нормальных напряжений под фундаментной пли-

той так, как это указано в п. 4.б;

б) методом сечений определяются изгибающие моменты в характерных сечениях 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3.



6. Расчет на устойчивость ведут по первому предельному состоянию на сдвиг и на опрокидывание:

а) устойчивость на сдвиг определяется неравенством

$$\gamma_{lc} \cdot F \leq \frac{\gamma_C}{\gamma_n} \cdot R,$$

где γ_{lc} – коэффициент сочетания нагрузок (принимается равным единице);

γ_C – коэффициент, учитывающий точность расчетной схемы (принимается равным единице);

γ_n – коэффициент надежности сооружения (для подпорных стен, которые относятся к сооружениям 4 класса, $\gamma_n = 1,1$);

F – сдвигающая сила (сумма проекций всех сил на ось X);

R – удерживающая от сдвига сила трения:

$$R = \sum F_y \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

где $\sum F_y = N$, $\operatorname{tg} \varphi = f$ – коэффициент трения подошвы стены о грунт.

б) устойчивость на опрокидывание определяется неравенством:

$$\gamma_{lc} \cdot M_t \leq \frac{\gamma_C}{\gamma_n} M_r,$$

где M_t – опрокидывающий момент, определяемый как сумма моментов всех активных сил относительно точки опрокидывания (наружное ребро фундамента стенки);

M_r – удерживающий от опрокидывания момент, определяемый как сумма моментов всех гравитационных сил относительно той же точки опрокидывания.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАНИЯ

Задание оформляется на стандартных листах формата А-4 (210x297 мм).

Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями и четкими схемами.

Графическая часть должна соответствовать требованиям единой системы конструкторской документации или системе проектной документации для строительства.

Масштабы изображения внутренних силовых факторов (M, Q, N), линий влияния усилий и перемещений должны выбираться из следующего ряда: 1:2; 1:4,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:20; 1:25; 1:50; 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000.

На эпюрах усилий и на линиях влияния необходимо проставлять значения характерных ординат в системе СИ.

Задание не соответствующее шифру, выданному студенту кафедрой, к рассмотрению не принимается.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А.В. Строительная механика [Текст]: учебник для строит. спец. вузов /А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб.:Лань, 2004.-656 с.
2. Прокофьев И.П. Теория сооружений. Часть I. - М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство, 1947 - 302с.
3. Прокофьев И.П. Теория сооружений. Часть II. - М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство, 1947 - 318с.
4. Прокофьев И.П., Смирнов А.Ф. Теория сооружений. Часть III. - М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство, 1948 - 242с.
5. Новичков Ю.Н., Гутьеррес П., Кружалов Ю.М. Теория сооружений. - М.: Колос, 1992-368с.
6. Волосухин, В.А. Автоматизация расчетов стержневых систем гидротехнического строительства [Текст]: учеб. пособие /В.А. Волосухин, С.И. Евтушенко, В.Б. Логвинов [и др.] - 2 – е изд. испр. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2006. – 160 с.
7. Волосухин, В.А. Расчет и проектирование подпорных стен гидротехнических сооружений: Учебное пособие/ В.А. Волосухин, В.П. Дыба, С.И. Евтушенко – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2005 - 105 с.
8. Ляпота, Т.Л. Строительная механика: практикум для студ. спец. 270104 – «Гидротехническое строительство»/ Т.Л. Ляпота; под ред. проф. В.А. Волосухина. – Новочеркасск, 2008 – 50с.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ СИСТЕМ	5
1.1. Задачи строительной механики	5
1.2 Типы элементов сооружений. Расчетные схемы сооружений	7
1.3 Образование и свойства плоских стержневых систем	8
1.3.1 Основные понятия	8
1.3.2 Виды связей между дисками и типы опор	10
1.3.3 Этапы анализа образования плоских систем	11
2 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ	17
2.1 Понятие о линиях влияния	17
2.2 Линия влияния опорных реакций и усилий в сечениях однопролетных балок	18
2.3 Основные свойства линий влияния. Определение усилий по линиям влияния	21
2.4 Построение линии влияния при узловой передаче нагрузки	22
2.5 Построение линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в стержнях плоских ферм	24
2.6 Определение невыгоднейшего положения нагрузки на сооружении ..	31
3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ	38
3.1 Работа внешних сил	38
3.2 Работа внутренних сил	41
3.3 Действительная работа внутренних сил. Потенциальная энергия	45
3.4 Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)	47
3.5 Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла)	48
3.6 Формула для определения перемещений в стержневых системах	

(строка О. Мора)	49
3.7 Практические приемы определения интеграла Мора $\int_{L_i} \bar{M}_i M_F dz$	53
4 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ.....	58
4.1 Степень статической неопределимости.....	58
4.2 Свойства статически неопределимых систем	60
4.3 Методы расчета статически неопределимых систем.....	60
4.4 Метод сил. Основная идея метода сил	61
5 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	78
5.1 Основные допущения и основные неизвестные метода перемещений	78
5.2 Определение числа неизвестных	80
5.3 Выбор основной системы метода перемещений	82
5.4 Канонические уравнения метода перемещений.....	84
5.5 Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений	85
5.6 Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.....	94
5.7 Построение расчетных эпюр М, Q и N в заданной системе	95
5.8 Проверки окончательных эпюр М, Q и N	95
5.9 Порядок расчета статически неопределимых рам методом перемещений	95
6 БОКОВОЕ ДАВЛЕНИЕ ГРУНТА И РАСЧЕТ ПОДПОРНЫХ СТЕН	96
6.1. Классификация подпорных стен	96
6.2 Основные расчетные предпосылки. Физико-механические характеристики и свойства грунтов.....	99
6.3 Виды бокового давления грунта.....	103

6.4 Методы определения давления грунта на ограждающую поверхность подпорных стен	104
6.5 Определение величины активного давления грунта	106
6.6 Распределение давления грунта по высоте подпорной стены.....	111
6.7 Влияние сплошной равномерно распределенной нагрузки	113
6.8 Давление слоистого грунта	115
6.9 Давление грунта при ломаном очертании напорной грани	116
6.10 Давление грунта и вышележащего слоя воды.....	117
6.11 Пассивное давление грунта при глубинном сдвиге на нескальных грунтах.....	119
6.11 Основные положения расчета подпорных стен на прочность и устойчивость	121
6.13 Расчет массивных подпорных стен на прочность. Контактные напряжения в подошве	121
6.14 Устойчивость подпорных стен при плоском сдвиге и опрокидывании	124
6.15 Понятия о выборе поперечного профиля массивных подпорных стен	128
ПРИЛОЖЕНИЕ. Варианты домашних заданий	130
ЗАДАЧА № 1	131
ЗАДАЧА № 2.....	137
ЗАДАЧА № 3.....	142
ЗАДАЧА № 4.....	145
ЗАДАЧА № 5.....	151
ЗАДАЧА № 6.....	154
ЗАДАЧА № 7.....	158
ЗАДАЧА № 8.....	165
ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАНИЯ	170
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	170

* *
*

Учебное издание

Виктор Алексеевич Волосухин
Александр Иванович Голышев
Тарас Леонидович Ляпота

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие
2-е изд., исправленное и дополненное

Компьютерная верстка А.И.Голышев

ISBN 978-5-89231-454-1



Подписано к печати 25.11.2013 Т. - 500 экз.
Формат 60x84 ¹/₁₆ Объем 10,25 уч.-из-д.л.

Печать ротационно-трафаретная. Бумага офисная.

Заказ №

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВПО МГУП
Отпечатано в лаборатории множительной техники МГУП

127550 Москва, ул.Прянишникова, 19