Библиографический список

1. Фаронов, В.В., DELPHI. В.В. Программирование на языке высокого уровня. Учебник для Вузов, СПБ, Питер, 2003г. 640 стр.
2. Карнаухов, В.М. Дихотомическая модель тестирования с двумя и более попытками для решения заданий теста// Информатизация образования и науки, №3(19), июль, 2013г., с. 159-166.
3. Карнаухов, В.М. Latex-генератор контрольных работ // Монография. Москва, ФГБОУ ВПО , 2014г.

УДК 378.016

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ КАК ОДИН ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПОДХОДОВ К ИЗУЧЕНИЮ ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Неискашова Елена Валентиновна*, заведующий кафедрой высшей математики, РГАУ-МСХА им.К.А.Тимирязева*

Аннотация*. В статье рассматривается вопрос об одном из возможных подходов к изучению основ математического анализа.*

Ключевые слова*: математический анализ; нестандартный анализ; бесконечно малые величины.*

Одним из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа является то, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины (т. е. не как функции, стремящиеся к нулю), а как величины постоянные. Такой взгляд на бесконечно малую хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. В самом деле, достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы встретить рассуждения, содержащие такие понятия, как например, бесконечно малые приращения или бесконечно малые объемы, при этом все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а как постоянные, значения которых почти равны нулю. Что же касается истории развития математического анализа, то, как известно, в эпоху своего возникновения дифференциальное и интегральное исчисления опирались на понятие актуальной бесконечно малой величины, то есть числа, которое не равно нулю, но абсолютная величина которого меньше любого положительного вещественного числа.

Лейбниц и его последователи развивали дифференциальное и интегральное исчисления, рассматривая бесконечно малые величины как «идеальные элементы, подобные мнимым числам», подчиняющиеся тем же законам, что и обычные числа. В своих сочинениях Лейбниц неоднократно утверждал, что бесконечно малые и бесконечно большие величины представляют собой не более чем удобные фикции, необходимые для облегчения рассуждений и открытий. В частности, он писал: «...Если кто-то не желает рассматривать бесконечно большие и малые в строго метафизическом смысле, как реально существующие, он может пользоваться ими как «идеальными понятиями», которые сокращают рассуждения, подобно мнимым корням в обычном анализе (вроде, например, $\sqrt{-2}$)...». [3]

Вместе с тем, несмотря на то, что первый печатный курс дифференциального исчисления (сочинение Лопиталя «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий») основывался на концепции бесконечно малых, математики того времени считали, что понятие бесконечно малой является внутренне противоречивым. Для решения этой проблемы, по мысли Лейбница, обычную числовую прямую следовало дополнить некими новыми элементами так, чтобы в расширенном множестве чисел можно было рассматривать и бесконечно малые и бесконечно большие числа. Однако Лейбниц не смог дать строгого обоснования своей идее, и последующее развитие основ математического анализа пошло иным путем: путем Коши и Вейерштрасса, где фундаментальные понятия анализа давались на «языке $\varepsilon-\delta$», а бесконечно малые из «очень маленьких чисел», какими их мыслили создатели математического анализа, превратились в переменные величины, т. е. в функции. Ныне этот подход является общераспространенным и с определениями на «языке $\varepsilon-\delta$» знакомы все студенты, изучавшие курс математического анализа или курс высшей математики.

Однако, идеи метода бесконечно малых, даже не имея строгого обоснования, были настолько привлекательны, что на их основе в 1932 году был создан учебник М. Я. Выгодского «Основы анализа бесконечно малых». В предисловии М.Я. Выгодский отмечал: «...даже на высших ступенях педагогического исследования зачастую первая разведка проблемы делается методом бесконечно малых, и лишь позднее, при уточненной разработке, вступает в силу метод пределов. Тем более необходимо дать учащемуся в руки этот важный аппарат для овладения техническими проблемами, стоящими в центре его внимания. В процессе применения этого аппарата учащийся его оценит, поймет необходимость его усовершенствования и изучит с высшей точки зрения»[1] и далее: «если язык бесконечно малых это тот язык, на котором думает математик, то язык пределов есть тот язык, на котором он изъясняется, излагая найденное решение». [1]

Между тем, как справедливо отмечал Л.С. Понтрягин: «Исторически интегральное и дифференциальное исчисление были уже хорошо развитыми областями математики до того, как появилась теория пределов. Последняя возникла как некоторая надстройка над существовавшей уже теорией. Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения» [4].

Лишь в 60-е годы 20-го столетия, в результате развития методов математической логики, появилось первое совершенно строгое решение проблемы обоснования анализа с использованием актуальных бесконечно малых, принадлежащее А. Робинсону. Тем самым бесконечно малые и бесконечно большие числа получили официальное признание в среде математиков и появилась еще одна возможность, помимо традиционной, изложения математического анализа – на основе идей нестандартного анализа. М. Дэвис по этому поводу замечал: «Развитие методов математической логики было обусловлено (по крайней мере, частично) стремлением достичь абсолютной строгости в анализе; но есть доля иронии в том, что эти самые методы обеспечили необходимый фундамент для оправдания некогда дискредитированного метода бесконечно малых. Возможно, что в действительности энтузиазм по отношению к нестандартным методам в какой-то мере связан со знакомым каждому стремлением к недозволенному. Но в еще большей степени этот энтузиазм объясняется математической простотой, элегантностью и красотой нестандартных методов и их богатыми приложениями».[2]

Каким же должен быть наш первый шаг при изучении математического анализа с позиций нестандартного анализа? Мы должны будем построить новую числовую систему, а именно, систему так называемых гипердействительных чисел, которая, во-первых, будет являться расширением системы действительных чисел и содержать при этом бесконечно малые и бесконечно большие числа, а во-вторых, так же, как и система действительных чисел, может быть описана как множество, элементы которого удовлетворяют некоторой системе аксиом.

Последовательное изложение курса математического анализа с позиций нестандартного анализа приведено в учебнике Кейслера «Элементарный анализ». [6]

Естественно, как только мы введем понятие гипердействительных чисел, сразу возникает вопрос: где же они находятся на числовой прямой, ведь, вроде бы, там уже «нет места» для новых чисел? Кейслер в своем курсе предлагает представить себе гипердействительную прямую как прямую, состоящую из своеобразных маленьких отрезков с центрами в действительных точках, при этом вокруг каждого действительного числа находится множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел.

В заключение хотелось бы отметить, что математика – это источник разнообразных моделей, пригодных для отображения разных сторон действительного мира. Так, при не слишком больших и не слишком малых пространственных размерах физическое пространство с достаточной точностью описывается обычной геометрией Евклида; при значительном же уменьшении или увеличении размеров эта точность начинается расшатываться. Например, в силу справедливости неравенства

$$\Delta x \geq l_p = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \qquad (1)$$

где Δx – погрешность в измерении длины;

h – постоянная Планка;

c – скорость света;

G – гравитационная постоянная.

Измерение расстояний, меньших l_p, невозможно и, следовательно, использование действительных чисел при изучении процессов, происходящих в микромире, нецелесообразно. Так, известный математик В.А. Успенский, относительно существования различных моделей окружающего нас мира, писал: «По-видимому, разумно принимать *принцип множественности моделей* и считать, что действительность описывается сразу целой совокупностью математических моделей, частично противоречащих друг другу. Так, скорее всего, разумно считать, что физическое пространство *одновременно* описывается несколькими моделями, одна из которых – обычная евклидова геометрия ...» [5]

Библиографический список

1. Выгодский, М.Я. Основы анализа бесконечно малых. – Л.: ГТТИ, 1933. – С.10 - 43.
2. Девис, М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980. – С.23.
3. Лейбниц, Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений/Сост. и пер. А. П. Юшкевич// УМН. – 1948. – Т.2, вып. 1 (23). – С.165–204.
4. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников. - М.: Наука, 1980. – С.64-65.
5. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – С.119.
6. Keisler H. J. Elementary Calculus. – Boston, Prindle: Weber & Schmidt, 1976.