УДК 631.3

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ДЛЯ АГРОИНЖЕНЕРОВ

Павлов Александр Егорович*, доцент кафедры сопротивления материалов и деталей машин, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева*

Чеха Ольга Вячеславовна*, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и деталей машин, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева*

Аннотация. *В настоящей работе авторы знакомят агроинженеров с современным эффективным методом анализа экспериментальных данных.*

Ключевые слова: *гармонический анализ сигналов, коэффициенты аппроксимации, коэффициенты детализации, многоуровневый одномерный вейвлет-анализ.*

Теория вейвлетов – альтернатива классическому гармоническому анализу, представляющая собой гибкую технику обработки сигналов. Вейвлетами называют семейства функций определённой формы, локализованных во времени и в пространстве [1]. Из материнских вейвлетов посредством композиции сдвигов и растяжений воспроизводится всё семейство базисных функций, составляющих полную ортонормированную систему функций с конечным носителем. За счёт изменения масштабов вейвлеты способны выявить особенности явлений на разных шкалах, а путём сдвига аргумента проанализировать свойства явлений на разных интервалах.

Ряды Фурье находят применение во всех областях науки и техники. В то же время, традиционный аппарат представления функций и сигналов в виде рядов Фурье малоэффективен для изучения функций с локальными особенностями. Исследование же импульсных и цифровых сигналов и изображений представляет большой научный и практический интерес [2]. Тригонометрические синусы и косинусы являются гладкими периодическими функциями, и по этой причине не способны адекватно описывать произвольные эмпирические данные [3].

Перед учёными эта задача аппроксимации стояла несколько веков, вплоть до открытия вейвлетов, с помощью которых, наконец, удалось решить эту хроническую проблему. В настоящее время вейвлет-анализ широко применяется для обработки нестационарных сигналов различной природы [4].

Имеем две материнские функции: масштабирующую функцию $\varphi(x)$ и вейвлет $\psi(x)$. Система функций:

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j}\varphi\left(2^j x - n\right), \qquad (1)$$

где $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ является ортонормированным базисом пространства $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$. Каждое подпространство V_{j+1} раскладывается в прямую ортогональную сумму $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, где W_j называется пространством вейвлетов и имеет базис, состоящий из функций:

$$\psi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j}\psi\left(2^j x - n\right). \qquad (2)$$

Система подпространств V_j образует бесконечную в обе стороны последовательность вложенных подпространств. Спроецируем функцию $f(x)$ на пространство V_j:

$$P_j: L^2(\mathbb{R}) \to V_j, \qquad f(x) \to P_j(f) \in V_j.$$

Оператор проецирования P_j задаётся с помощью скалярного произведения:

$$P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f, \varphi_{j,n}\right)\varphi_{j,n}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j,n}\, \varphi_{j,n}(x). \qquad (3)$$

Обозначим символом cA_0 набор коэффициентов разложения начального приближения $P_j(f)$:

$$cA_0 = \left\{a_{j,n}\right\}, \qquad a_{j,n} = \left(f, \varphi_{j,n}\right) = \int_R f(x)\overline{\varphi_{J,k}(x)}\, dx. \quad (4)$$

В базисах пространств V_{j-1} и W_{j-1} имеем:

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k}\, \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k}\, \psi_{j-1,k}(x), \qquad (5)$$

где $a_{j-1,k}$ – коэффициенты аппроксимации $(j-1)$ – го уровня разрешения:

$$a_{j-1,k} = \left(f, \varphi_{j-1,k}\right) = \int_R f(x)\overline{\varphi_{J-1,k}(x)}\, dx. \qquad (6)$$

и $d_{j-1,k}$ – детализирующие коэффициенты:

$$d_{j-1,k} = \left(f, \psi_{j-1,k}\right) = \int_R f(x)\overline{\psi_{J-1,n}(x)}\, dx.. \qquad (7)$$

Обозначим полученные наборы коэффициентов символами cA_1 и cD_1:

$$cA_1 = \left\{a_{j-1,k}\right\}, \qquad cD_1 = \{d_{j-1,k}\}.$$

Коэффициенты cA_1 описывают сглаженное приближение функции $f(x)$ в пространстве V_{j-1}, а коффициенты cD_1 описывают детали, которыми начальное приближение $P_j(f)$ отличается от $P_{j-1}(f)$. Повторяя процедуру N раз, мы получаем вейвлет – разложение $P_j(f)$ в виде серии коэффициентов:

$$P_j(f) = \{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}, \qquad (8)$$

где $cA_N = \{a_{j-N,k}\}$ – коэффициенты аппроксимации разложения глубины N и $cD_m = \{d_{j-m,k}\}$ – детализирующие коэффициенты разложения глубины $m = 1, 2, \dots, N$. Вейвлет - разложение можно изобразить в виде:

$$P_j(f) = cA_0 \to \{cA_1, cD_1\} \to \{cA_2, cD_2, cD_1\} \to \dots \to \{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}. \quad (9)$$

Вейвлет-преобразованием функции $f(x)$ называется нахождение коэффициентов вейвлет-разложения $\{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}$.

В итоге, вейвлет-анализ состоит из следующих шагов:

1. Выбираем уровень разрешения j такой, что аппроксимация $P_j(f)$ достаточно точно отражает функцию $f(x)$.
2. Выбираем глубину разложения N и находим коэффициенты разложения $\{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}$.
3. Анализируем эти коэффициенты и изменяем их в случае необходимости.
4. Восстанавливаем функцию $f(x)$, используя коэффициенты разложения:

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-N,k}\, \varphi_{j-N,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-N,k}\, \psi_{j-N,k}(x) + \dots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k}\, \psi_{j-1,k}(x). \quad (10)$$

Доказано, что произвольную функцию можно представить в виде суперпозиции вейвлетов. Существует устойчивый численный алгоритм вычисления коэффициентов такого разложения.

В силу своих универсальных свойств, вейвлеты нашли применение в задачах распознавания образов, при сжатии изображений, звука, в информационных и компьютерных технологиях, в экономике и финансах, при обработке сигналов в физике, биологии, медицине, сейсмологии, технике. Представляется логичным исследовать с их помощью временных рядов в задачах [5] механизации агропромышленного комплекса.

Библиографический список

1. Дьяконов, В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2010. – 400 с.
2. Дорохов, А.С. Система контроля качества деталей сельскохозяйственных машин / А.С. Дорохов, К.А. Краснящих, Д.М. Скороходов . М.: МЭСХ, 2019. – 192 с.
3. Skorokhodov, D. Theory and methods of means and modes selection of agricultural equipment spare part quality control / D. Skorokhodov, K. Krasnyashchikh, S. Kazantsev, A. Anisimov В сборнике: Engineering for Rural Development, 2020. – С. 1140-1146.
4. Мусалимов, В.М. Идентификация динамических систем фрикционного взаимодействия (MATLAB) / В.М. Мусалимов, И.И. Калапышина, К.А. Нуждин. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. –143 с.
5. Павлов, А.Е. Софья Васильевна Ковалевская / А.Е. Павлов, Л.А. Павлова, О.В. Чеха // сборник докладов ТСХА, 2020. – С.613-617.