

05.23.00 Строительство и архитектура

УДК 502/504:551.322

Д. В. КОЗЛОВ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева», г. Москва

К. Л. САВЕЛЬЕВ

Открытое акционерное общество «Институт «Гидропроект», г. Москва

МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ГИДРОЛЕДОТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ВОДОЕМОВ И ВОДОТОКОВ

Выполнен обзор наиболее интересных и востребованных в гидроледотермической практике научных работ российских и зарубежных специалистов, посвященных разработке моделей формирования температурного и ледового режимов водоемов и водотоков основанных на уравнениях теплового баланса или теплопроводности движения и неразрывности водной среды. Показаны необходимость и пути совершенствования существующих моделей расчета гидроледотермического режима на приплотинных участках гидроузлов. Отмечается, что определение гидроледотермического режима на приплотинных участках гидроузла возможно с использованием моделей для расчета коэффициента турбулентного обмена в горизонтальной плоскости, полных двумерных и трехмерных уравнений для расчета гидравлических характеристик и температуры воды, а также решения системы уравнений фазовых переходов, динамических уравнений и уравнений неразрывности. Открытым остается вопрос перехода внутреннего льда в поверхностный лед, для решения которого следует усовершенствовать методику оценки кинематической коагуляции частиц внутриводного льда, либо использовать другие эмпирические или полумпирические методики.

Температурный и ледовый режим, водоем, водоток, гидроузел, математическая модель, уравнения теплового баланса, теплопроводности, движения и неразрывности водной среды, турбулентный обмен, фазовые переходы воды и льда.

A review of the most interesting and popular in hydroicothermal practice of scientific works of Russian and foreign experts, dedicated to the development of models of the formation of temperature and ice regimes of ponds and watercourses, based on the equations of thermal balance or of heat conductivity, movement and the continuity of the aquatic environment. The necessity and ways of improvement of existing calculation models of the hydro ice thermal mode at barrage power stations of waterworks are shown. It is noted that the definition hydro ice thermal mode at barrage power stations of waterworks is possible with the use of models for the calculation of the coefficient of turbulent exchange in the horizontal plane, a complete two-dimensional and three-dimensional equations to calculate hydraulic characteristics and temperature of the water, and the solution to the system of equations of phase transitions, dynamic equations and equations of the continuity. In hydro ice thermal calculations of pools of hydraulic unit special attention should be paid to the velocities of the phase transition of water and ice. There is still the question remains open of the transition of the inner ice into the surface ice for the solution of which it is necessary to improve the methodology of evaluation of the kinematic particle coagulation of the underwater ice or to use other empirical or semi empirical methods.

Temperature and ice regime, pond, watercourse, hydraulic unit, mathematical model, equation of thermal balance, thermal conductivity, movement and continuity of the water environment, turbulent exchange, phase transitions of water and ice.

В последние десятилетия в мире наблюдается значительное увеличение объема гидрофизических исследований рек, озер, водохранилищ и нижних бьефов гидроузлов, что имеет свои причины. Человечес-

во в XX и начале XXI века интенсивно и настойчиво осваивало заполярные и отдаленные северные территории. Обеспечение национальных энергетических, транспортных и природоохранных программ многих

стран обусловило развитие гидроэнергетического, водохозяйственного, транспортного и природоохранного строительства, в том числе в малоосвоенных суровых климатических зонах. Строительство речных гидротехнических сооружений в северных и восточных районах России потребовало решения целого ряда сложных задач, связанных с обеспечением устойчивой и надежной эксплуатации гидроузлов в зимних условиях. Поэтому при проектировании, строительстве и эксплуатации таких сооружений и комплексов в первую очередь должны учитываться особенности зимнего режима водных объектов, такие как значительная продолжительность ледовых явлений и процессов, изменчивость температуры водных масс, возможность образования в руслах водотоков волн попусков и зимних паводков, а также ледовых затруднений (заторов, зажоров льда) [1].

Этот неполный перечень проблем определяет актуальность и большую экономическую значимость вопросов исследования, расчета и достоверного прогноза элементов гидроледотермического режима приплотинных участков водохранилищ и нижних бьефов гидроузлов с целью определения теплового состояния водных масс, характера и особенностей ледового режима водного объекта, пропускной способности русл.

В настоящее время для прогноза температурного режима бьефов гидроузлов используются три основные группы физически обоснованных методов расчета:

1. Метод подбора водоема-аналога, термический режим которого известен, который дает лишь общее представление о тепловом режиме рассматриваемого водного объекта и применяется, как правило, для выбора начальной температуры воды при расчете температурного режима водоема аналитическими методами.

2. Метод использования эмпирических зависимостей между температурой воды и факторами, определяющими ее изменение, который имеет локальное значение и дает возможность расчета лишь для температуры поверхности воды и может применяться только для того временного периода и того водного объекта, материалы наблюдений за которым использованы для получения этих связей.

3. Модели формирования температурного и ледового режимов водоемов и водотоков, основанные на уравнениях теплового баланса или теплопроводности, движения и неразрывности водной среды.

Применение в современной гидрологической и ледотермической практике аналитических методов третьей группы позволяет определить среднюю по глубине температуру воды в заданном створе реки или канала, на проточном участке водохранилища, а также получить распределение температуры воды по глубине в водном объекте в различные моменты времени. Ниже приводится критический обзор наиболее интересных и востребованных в гидроледотермической практике научных работ российских и зарубежных специалистов.

В работе Н. М. Абраменкова [2] предложена математическая модель определения характеристик шугоносных рек с учетом фазового перехода воды и льда. Система уравнений, предложенная в [2], состоит из уравнений неразрывности для каждой фазы воды и льда; одномерного уравнения баланса тепловой энергии и уравнения для определения ширины заберегов. В уравнения неразрывности для каждой фазы воды и льда входят члены, которые учитывают фазовые переходы – скорость перехода массы льда из i -го вида в k -ый, на единицу длины потока Φ_{ik} (Φ_{12} – образование внутриводного льда в процессе замерзания реки или таяния его в период потеплений, Φ_{13} – переход воды в поверхностный лед, Φ_{15} – переход воды в забереги, Φ_{23} – переход внутриводного льда в поверхностный лед, Φ_{34} – переход поверхностного льда в корку льда). Для определения Φ_{23} впервые в гидроледотермической практике использовалось кинематическое уравнение коагуляции внутриводного льда. В результате исследований Н. М. Абраменковым разработана модель замерзания шугоносных рек на основе использования уравнений, описывающих многофазную среду с учетом фазовых переходов, а также взаимных переходов различных видов льда; построена численная схема и составлена программа, реализующая модель замерзания реки; впервые показана возможность и пути использования кинематического уравнения для описания процесса формирования небольших скоплений внутриводного льда или шуги; разработаны численные схемы, а апробация модели была произведена на р. Амурдарья. Оригинальный подход Н. М. Абраменкова можно совершенствовать, в том числе путем добавления к основной системе уравнений уравнения сохранения движения для каждой из фаз, а также доработкой методики использования кинематического уравнения коагуляции внутриводного льда.

В работе А. А. Атавина и др. [3] разработана одномерная продольная математическая модель переноса тепла и взвешенных речных наносов в водохранилищах руслового типа. Перенос тепла и отдельных фракций наносов описывается конвективно-диффузионными уравнениями с учетом взаимодействия с боковыми емкостями, имитирующими подпертые устьевые участки боковых притоков. Система уравнений содержит одномерное уравнение движения, одномерное уравнение теплопроводности с конвективными и диффузионными членами и одномерное уравнение взвешенных наносов. Расчет проведен на примере водохранилища проектируемого Крапивинского гидроузла, в результате которого получены графики распределения температуры воды в период нагревания и охлаждения водоема, изменения температуры воды у плотины и боковой емкости, удаленной от плотины на 74 км, в сравнении с температурой воды, поступающей в водохранилище с р. Томь и бокового притока р. Н. Терсь. Перспективно было бы обобщить данную модель на двумерный случай: по глубине и вдоль водохранилища.

Работа В. В. Беликова [4] содержит информацию об основных направлениях численного моделирования в области гидроледотермики: моделирование наводнений и волн прорыва (в т. ч. волн прорыва и оценка ущербов, наводнения и гидрологическая безопасность пойменных территорий, каскадные аварии на гидроузлах), гидравлические расчеты гидротехнических сооружений, гидротермические расчеты.

Численное моделирование теплопереноса в водоемах необходимо для обоснованного выбора при проектировании и реконструкции систем внешнего охлаждения тепловых и атомных станций. Для этих целей применяется как экономичные 2D-модели (для хорошо перемешанных по глубине мелководных водоемов) на основе двумерных уравнений Сен-Венана и осредненного по глубине уравнения конвекции-диффузии тепла, так и трехмерные 3D численные модели, учитывающие температурную и плотностную стратификацию по глубине. Большой вклад в развитие этих моделей внесли ученые-сотрудники ОАО «НИИЭС» (В. М. Ляхтер, А. М. Прудовский, А. Н. Милитеев, С. Я. Школьников и др.). В частности, А. Н. Милитеев разработал эффективные численные алгоритмы решения задач теплопереноса в двумерной (плановой) постановке на основе двумерных уравнений Сен-Венана. В дальнейшем А.

Н. Милитеев с соавторами разработал трехмерную математическую и численную модель теплопереноса в водоемах [5–8]. Кроме того, коллективом модельеров НИИЭС разработана программа «SHALLOW 3D» для расчета влияния гидротехнических сооружений на гидротермический, литодинамический, экологический режимы в водотоках, водоемах и в прибрежной зоне морей и океанов.

Работы В. М. Белолипецкого, П. В. Белолипецкого [9–11] можно отнести к одному циклу публикаций. Авторами предложена математическая модель для исследования ветровых течений в замкнутых водоемах, основанная на уравнении движения стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, гидростатики «твердой крышки», на уравнениях «конвекции – диффузии» для температуры и солености.

Математическая модель включает в себя: трехмерную систему уравнений движения стратифицированной жидкости, которые содержат конвективные члены, диффузионные члены (с коэффициентами турбулентного обмена), члены учитывающие силу Кориолиса и подъемную силу в приближении Буссинеска. Коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальной плоскости считаются постоянными; в вертикальной плоскости определяются по формуле Прандтля-Обухова. Для вычисления давления используются гидростатическое приближение и трехмерное уравнение теплопроводности, которое содержит конвективные члены и диффузионные члены. Коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальной плоскости также считаются постоянными и в вертикальной плоскости определяются по формуле Прандтля-Обухова, уравнение солености, аналогично уравнению теплопроводности. В начальный момент времени задается стационарный режим с распределением температуры и солености по вертикали. Граничные условия принимаются на свободной поверхности и на поверхности русла и учитывают тепловой и солевой обмен с данными поверхностями. Численный алгоритм решения поставленной задачи сводится к методу расщепления.

В результате исследований в [9–11] разработан и построен в вертикальной плоскости численный двумерный алгоритм для математической модели гидрофизических процессов в озерах, а также разработан эффективный алгоритм решения данной задачи и комплекс компьютерных

программ. Выполнено численное моделирование гидрофизических процессов в озере Шира. Усовершенствование данной модели может быть связано с учетом изменчивости коэффициента турбулентного обмена в горизонтальной плоскости.

В работе Т. Б. Гранкиной [12] представлена одномерная математическая модель, включающая в себя: уравнение для расчета температуры в жидкой фазе, линейное распределение температуры в твердой фазе, уравнение для расчета толщины льда, основанного на условии Стефана. В процессе моделирования использовались: явная конечно-разностная схема для расчета температуры в жидкой фазе, неявная конечно-разностная схема для расчета температуры в жидкой фазе; схема расщепления по физическим процессам, схема Вабищевича-Самарского. В результате исследования численных схем получено, что точность по таким схемам практически одинакова, экономичнее оказалась явная схема, но схема Вабищевича-Самарского – проще в реализации. Совершенствование моделей, разработанных Т. Б. Гранкиной, может быть направлено на подключение уравнения движения жидкости для расчета гидравлических характеристик и тем самым сведение решаемой задачи к двумерному случаю.

Работа А. Ф. Воеводина и Т. Б. Гранкиной [13] является логическим продолжением работы [12], в которой к основной системе уравнений добавлено нестационарное одномерное уравнение для переноса примеси без учета конвективных членов.

Целью работы Е. И. Дебольской [14] является оценка скоростей течения и параметров турбулентности, характерных для зон, находящихся в области основного Черноморского течения и для областей не подверженных его влиянию.

Для достижения этой цели был проведен обзор зависимостей по определению коэффициента вертикального турбулентного обмена. С учетом последнего, была предложена система уравнений кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации ($k-\varepsilon$ модель). Для расчета скоростей потока была предложена упрощенная математическая модель, предполагающая стационарность поля скоростей и плотности в расчетный интервал времени в силу того, что временные масштабы изменения данных характеристик превышают время установления турбулентных характеристик. В результате исследований Е. И. Дебольской получены распределения

вдольбереговой скорости и коэффициента вертикального турбулентного обмена на разных разрезах. Работа [14] интересна, в первую очередь, тем, что из нее можно заимствовать модель определения коэффициента вертикального турбулентного обмена и на основе ее создать модель для определения коэффициента турбулентного обмена в горизонтальной плоскости.

Целью другой работы Е. И. Дебольской [15] является описание изменения рельефа дна в нижних бьефах гидроузлов в зимний период при наличии ледяного покрова в условиях резко нестационарного потока. Для реализации этой цели, была написана математическая модель, которая включает в себя: двухмерную систему уравнений движения жидкости, которые содержат конвективные члены, диффузионные члены (с переменными коэффициентами турбулентного обмена) и члены, учитывающие силы трения о нижнюю поверхность льда и дно русла, а также уравнение неразрывности и уравнение транспорта речных наносов. Представлены зависимости для определения коэффициента турбулентного обмена и сил трения о нижнюю поверхность льда и дно русла, которые можно использовать для определения гидравлических характеристик. В результате исследований получены характеристики деформации русла во времени. Усовершенствование модели в [15] может быть связано, например, с использованием полуэмпирических подходов определения пропускной способности руслового подледного потока, реализованных в [23].

Целью работы А. Т. Зиновьева [16] является описание вертикального переноса в неоднородных турбулентных течениях с использованием модифицированной модели турбулентности (рассматривается расширенный вариант $E-\varepsilon$ модели турбулентности, использующий алгебраическое соотношение для определения напряжений Рейнольдса). Математическая модель включает в себя упрощенное уравнение теплопроводности, имеющее члены производных по времени и по вертикали, и упрощенную систему уравнений для определения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости. Уравнения теплопроводности и движения жидкости имеют неизвестные величины осредненных вторых моментов турбулентных пульсаций скорости и температуры, для нахождения которых используются соответствующие дифференциальные уравнения. Среднее значение плотности берется в приближении Буссинеска. Принимая некоторые допущения в

уравнениях по определению вторых моментов турбулентных пульсаций, получены алгебраические уравнения для нахождения этих моментов. При всей трудоемкости предложенной модели она интересна тем, что позволяет более точно определять коэффициенты турбулентного обмена. Совершенствование, реализованной в [16] модели, может заключаться во введении в уравнения движения жидкости и температуропроводности конвективных членов, а также в решении системы уравнений вторых моментов турбулентных напряжений без использования принятых допущений.

Работа [17], являющаяся продолжением других работ В. И. Квона, Д. Б. Квона и Е. В. Квона по численному моделированию основной части Телецкого озера, посвящена численному моделированию устьевой зоны Телецкого озера с учетом метеорологических факторов и сжимаемости воды. Предложенная математическая модель включает в себя: двумерное уравнение движения жидкости в гидростатическом приближении, содержащее конвективные члены, диффузионные члены (с использованием коэффициентов турбулентного обмена) и член, описывающий минерализацию воды; уравнение неразрывности и двумерное уравнение теплопроводности, также содержащее конвективные и диффузионные (с использованием коэффициентов турбулентного обмена) члены. Для определения плотности воды использовались формулы, рекомендуемые объединенной комиссией ЮНЕСКО по океанографическим таблицам и стандартам. Граничные условия на водной поверхности, дне водоема, входной вертикальной границе озера, через которую вода втекает в него, и на открытой вертикальной границе, отделяющей рассматриваемую (предустьевую) область озера от остальной ее части. В результате исследований получены распределения температуры и скорости в предустьевой области озера и проведено сравнение расчетов на модели озера и предустьевой модели. При совершенствовании модели, изложенной в [17], можно отойти от гидростатического приближения при вычислении давления воды и использовать зависимости силы трения о боковую (ложевую) поверхность озера.

Работа Г. А. Трегуб [18] описывает практически весь комплекс методик инженерных расчетов ледотермического режима верхнего и нижнего бьефов гидроэлектростанций, в том числе определения зоны

влияния водозабора ГЭС на термический и ледовый режим водохранилища, расчета термического режима водохранилища в зоне и вне зоны влияния водозабора ГЭС, расчета ледового режима водохранилища, расчета элементов термического и ледового режимов нижнего бьефа с учетом условий работы ГЭС. В основу предлагаемого методического подхода положен принцип термического сопряжения бьефов, когда результаты расчета термического режима в верхнем бьефе ГЭС представляют собой исходную информацию для расчета ледотермического режима в нижнем бьефе гидроузла.

В частности, методика определения зоны влияния водозабора ГЭС на термический и ледовый режим водохранилища, предложенная Z. Mayer в [19], основывается на физической модели стационарного двумерного потока, движущегося к горизонтальному целевому водозабору высотой h с заглублением порога под уровень воды h_1 . Считается, что свободная поверхность воды и дно представляют собой горизонтальные плоскости, параллельные друг другу. Математически данная модель описывается двумерной системой уравнений Рейнольдса, в которых отсутствуют конвективные члены, а коэффициент турбулентной вязкости является постоянным. Аналитическое решение двумерной задачи представлено в переменной безразмерной функции тока, а пример использования данной методики приведен для задачи определения зоны влияния водозабора Колымской ГЭС. Расчет термического режима водохранилища основывается на Рекомендациях ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева [20], в которых приводится методика расчета температуры воды на основе решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности без конвективного члена. Предлагается решение сложных термических задач выполнять методом суперпозиции, основанном на использовании готовых решений простых термических задач. Методика определения температуры воды одинакова как для транзитного потока, так и для зоны влияния водозабора ГЭС, за исключением определения коэффициента турбулентной теплопроводности. В работе [18] представлена формула для определения коэффициента теплопроводности, который зависит от удельного расхода воды и глубины перемешивания. Для транзитного потока удельный расход равен удельному расходу транзитного потока, а глубина перемешивания определяется на основе анализа картины течения: для мелких водохранилищ совпадает с глубиной потока, для очень

глубоких водохранилищ равна расстоянию от свободной поверхности до места, где температура воды практически не изменяется, а для зоны влияния водозабора ГЭС глубина перемешивания и удельный расход воды определяются другими способами в зависимости от размеров циркуляционной зоны и значения безразмерной функции тока [18].

Расчет ледового режима водохранилища включает в себя определение даты начала ледостава, изменение толщины ледового покрова и прогнозирование даты его вскрытия. Дата начала ледостава определяется расчетным путем (как дата перехода температуры на поверхности воды через $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ плюс время, необходимое для образования устойчивого ледового ковра). Изменение толщины льда на акватории водохранилища находится на основании решения обыкновенного одномерного нестационарного дифференциального уравнения теплового баланса на границе фазового перехода [21].

Совершенствование методик, изложенных в работе Г. А. Трегуб [18], можно осуществить в части определения зоны влияния водозабора ГЭС путем использования трехмерной системы уравнений Рейнольдса с конвективными членами и с переменным значением коэффициента турбулентной вязкости, а при расчете температуры воды путем использования решения трехмерного уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Кроме того, в методику определения даты начала ледостава можно включить решение трехмерных уравнений Рейнольдса и теплопроводности, а также учесть фазовые переходы воды во внутриводный лед, внутриводный лед в поверхностный лед, а поверхностный лед в кромку льда путем добавления уравнений сохранения масс для каждой фазы в отдельности. Обобщению разработок Г. А. Трегуб и И. Н. Шаталиной посвящена монография, критический анализ которой приводится в [22].

Критический обзор публикаций в области практической гидрофизики водных объектов позволил классифицировать все проанализированные выше работы следующим образом:

1. Работы, которые используют уравнения движения жидкости с применением коэффициентов турбулентного обмена ([3], [4], [9–11], [14], [15], [17], [18]).

2. Работы, которые используют уравнения теплопроводности с применением коэффициентов турбулентного обмена ([3], [4], [9–11], [17], [18]).

3. Работы, позволяющие рассчитывать

коэффициенты турбулентного обмена с использованием моделей k - ε и E - ε ([13], [16]).

4. Работы, учитывающие фазовые переходы воды ([2], [12], [13], [18]) и требующие доработки в части определения скорости и объемов фазовых переходов, например, с использованием динамических уравнений движения жидкости, конвективного уравнения коагуляции частиц внутриводного льда или других теоретических и эмпирических подходов.

Практически все методы определения скорости движения (за исключением [18]) и температуры воды идентичны и востребованы практикой гидрофизических расчетов водоемов и водотоков. Но ни одна из этих работ не дает ответа на вопрос о том, как будет двигаться и прогреваться жидкость около вертикальной твердой стенки (например, затвора гидросооружения), а также, как в этом случае необходимо рассчитывать коэффициент горизонтального турбулентного обмена.

Выводы

1. Существующие модели расчета гидроледотермического режима на приплотинных участках гидроузлов требуют совершенствования для случаев двумерного и трехмерного движения воды.

2. Применяемые на практике модели для расчета температуры воды, гидравлических характеристик потока, фазовых переходов, разработаны главным образом для прямолинейных участков водотоков.

3. Определение гидроледотермического режима на приплотинных участках гидроузла возможно с использованием моделей для расчета коэффициента турбулентного обмена в горизонтальной плоскости, полных двумерных и трехмерных уравнений для расчета гидравлических характеристик и температуры воды, а также решения системы уравнений фазовых переходов, динамических уравнений и уравнений неразрывности.

4. В гидроледотермических расчетах бьефов гидроузлов особое внимание необходимо уделить определению скоростей фазового перехода воды и льда. Открытым остается вопрос перехода внутреннего льда в поверхностный лед, для решения которого следует усовершенствовать методику оценки кинематической коагуляции частиц внутриводного льда, либо использовать другие эмпирические или полуэмпирические методики.

1. Опасные ледовые явления на реках и водохранилищах России / Козлов Д. В. [и др.]; под общ. ред.

Д. В. Козлова. – М.: РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2015. – 348 с.

2. Моделирование процесса замерзания шугоносных рек / Абраменков Н. М. // Труды среднеазиатского регионального научно-исследовательского института им. В. А. Бугаева. – Выпуск 101 (182). – М.: Московское отделение Гидрометеоздат, 1984. – С. 3–100.

3. Одномерная продольная модель переноса тепла и взвешенных речных наносов в водохранилище / Атавин А. А., Жданов Е. П., Копылов Ю. Н. // Метеорология и гидрология. – 1995. – № 2. – С. 93–101.

4. Численные исследования при решении гидравлических задач / Беликов В. В., Ковалев С. В. // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 8. – С. 61–67.

5. Методика расчета стратифицированных водоемов / Милитеев А. Н. // Деп. в ВИНТИ. (3.11.93, № 2744-В93).

6. Трехмерная математическая модель движения наносов / Милитеев А. Н., Базаров Д. Р. // Сообщения по прикладной механике. – ВЦ РАН, 1997. – 17 с.

7. Two and three dimensional simulation of transport phenomena in a shallow aquatic environment / Militeev A, Sladkevich M., Rubin H., Kit E. // Journal of Hydraulic Engineering. – 2000 – Vol. 126. – № 2.

8. **Иваненко С. А., Корявов П. П., Милитеев А. Н.** Современные вычислительные технологии для расчета динамики открытых потоков // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29. – № 5. – С. 564–577.

9. **Белолипецкий П. В.** Численное моделирование гидрофизических процессов в стратифицированных озерах: автореф. дис. ... физ.-мат. наук: 05.13.18. – Новосибирск, Красноярск, 2008.

10. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле / Белолипецкий В. М., Генова С. Н. // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9. – № 2. – С. 9–25.

11. **Белолипецкий В. М., Белолипецкий П. В.** Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах методом расщепления. Гидростатическое приближение // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. – № 5. – С. 21–31.

12. Численные методы решения однофазной задачи Стефана: M1X / Гранкина Т. Б. // Динамика сплошной среды. – 2001. – Вып. 118. – С. 16–20.

13. **Воеводин А. Ф., Гранкина Т. Б.** Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сибирский журнал

индустриальной математики. – 2006. – Т. IX. – Вып. 1. – № 25. – С. 47–54.

14. **Дебольская Е. И., Якушев Е. В., Кузнецов И. С.** Оценка характеристик вертикального турбулентного обмена в верхнем 200-м слое Черного моря // Океанология. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 513–519.

15. **Дебольская Е. И., Дебольский В. К., Масликова О. Я.** Двухмерная модель русловых деформаций в условиях формирования ледовых заторов // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 5. – С. 41–45.

16. **Зиновьев А. Т., Яковенко С. Н.** Моделирование вертикального турбулентного обмена в пристенном стратифицированном течении // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т. 39. – № 6. – С. 57–64.

17. **Квон Д. В., Квон В. И., Филатова Т. Н.** Численное моделирование гидротермических процессов в предустьевой области Телецкого озера. // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5. – № 5. – С. 68–77.

18. Расчет термического и ледового режима в бьефах гидроузлов как основа термического сопряжения бьефов / Трегуб Г. А. // Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 1997. – Т. 230 – С. 46–82.

19. Vertical circulation in densitystratified Reservoir/ Mayer Z // I. of the Hydraulics Div. – 1982 – Vol. 108. – No HY7. – P. 853–873.

20. Рекомендации по термическому расчету водохранилищ: П-78-79//ВНИИГ – Л.: Гидрометеоздат. – 1977. – 39 с.

21. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1976. – 350 с.

22. **Козлов Д. В.** Решение ледовых проблем строительства и эксплуатации гидротехнических сооружений // Гидротехническое строительство. – 2014. – № 1. – С. 52–53.

23. **Алиев Т. А., Ерхов А. А., Козлов Д. В.** Полуэмпирический метод расчета пропускной способности руслового подледного потока // Гидротехническое строительство. – 1999. – № 5. – С. 30–37.

Материал поступил в редакцию 20.11.2015.

Козлов Дмитрий Вячеславович, доктор технических наук, профессор кафедры «Комплексное использование водных ресурсов и гидравлика»

Тел. 8(499)976-29-62

E-mail: kozlovdv@mail.ru

Савельев Константин Леонидович, ведущий инженер

E-mail: savelevkl@mail.ru