

УДК 502/504:551.435.1

К.Н. АНАХАЕВ, З.Т. АКШАЯКОВ, Х.А. АНАХАЕВ

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Высокогорный геофизический институт» Росгидромета (ФГБУ «ВГИ»), г. Нальчик, Кабардино-Балкария, Российская Федерация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМНО-ПЛОЩАДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОКРУГЛЫХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

При обследованиях различных природных объектов во многих случаях возникает необходимость срочной оценки объемно-площадных характеристик завалов, отдельных скальных обломков, блоков, а также объемов аккумулярованных прорывоопасных водоемов и др., особенно в оперативных условиях возникновения чрезвычайных ситуаций. Аналогичные вопросы возникают также при определении площадей и объемов природных округлых и округло-усеченных тел (камней, валунов, озер, холмов, различных выемок и насыпей), расположенных в труднодоступных местах. При таких условиях для принятия неотложных защитных мер наиболее востребованы именно упрощенные расчетные зависимости определения их объемно-площадных характеристик. На основе теоретического анализа и обработки данных экспериментов с 32 округлыми и округло-усеченными камнями получены аналитические зависимости для определения объемно-площадных характеристик различных округлых тел произвольной формы по значениям их внешних размеров. Для частных случаев геометрически правильных тел: эллипсоида, шара, полушара и др. – предложенные зависимости совпадают с известными точными формулами. Предложенные расчетные зависимости могут быть использованы при оперативных гидрологических, геоморфологических и гидротехнических расчетах естественных и искусственных водных объектов, а также для нахождения объемов, площадей, периметра и других характеристик округлых и округло-усеченных тел и емкостей произвольной формы, в том числе расположенных в труднодоступных местах.

Округлое тело, округло-усеченное тело, валун, озеро, холм, выемка, объем тела, площадь поверхности, периметр кругового тела.

Введение. При обследованиях различных природных объектов во многих случаях возникает необходимость определения их объемно-площадных характеристик, особенно в оперативных условиях возникновения чрезвычайных ситуаций. Например, землетрясение 12 мая 2008 г. в Китае привело к массовым оползням и обрушениям береговых склонов с завалом автодорог и перекрытием русел множества рек в труднодоступных ущельях. Ожидаемые прорывы завалов прямо угрожали масштабным затоплением большого числа населенных пунктов [1]. В этих тяжелых условиях для принятия неотложных оперативных защитных мер требовалась срочная оценка объемно-площадных характеристик завалов, отдельных скальных обломков и блоков, а также объемов аккумулярованных прорывоопасных водоемов и др., для чего оказались наиболее востребованными именно упрощенные расчетные зависимости.

Аналогичные вопросы возникают также при определении площадей и объемов природных округлых и округло-усеченных тел (камней, валунов, озер, холмов, различных выемок и насыпей), в том числе и при расположе-

нии их в труднодоступных местах: под водой, в космосе (астероиды и др.), в теле живых существ и т.д. Особую актуальность эти вопросы приобретают, в частности, при активизации камнепадных процессов на горных склонах, представляющих прямую угрозу жизнедеятельности населения и различным объектам экономики: зданиям и сооружениям, железным и автомобильным дорогам, линиям электропередач, газопроводам и т.д. Для защиты от камнепадов используют различные инженерные сооружения (бетонные и железобетонные стенки, камнезащитные сетки типа «Geobrugg», «Massaferrti» и др.), при расчетах которых на прочность и устойчивость неизбежно возникают вопросы по определению объемно-весовых характеристик падающих камней и валунов. При этом возникают определенные трудности по определению объемов природных валунов и камней, имеющих, как правило, неправильную геометрическую форму, что не позволяет напрямую использовать для этого математические зависимости «правильных» геометрических тел. Неверная же оценка последних может привести в конечном счете к принятию нерациональных и ошибочных технических решений. Ниже приводятся вы-

вод упрощенных расчетных зависимостей для определения объемов и площадей природных и искусственных округлых и округло-усеченных тел произвольной формы (рис. 1) со средней погрешностью 2-3%.

Материалы и методы. Для определения объемов округлых тел преобразуем известную формулу для определения объема эллипсоида $V_э$ с горизонтальными a , b и вертикальной h полуосями к виду:

$$V_э = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{2}{3} H \cdot S_э = \frac{\pi}{6} LBH, \quad (1)$$

в которой $S_э = \pi ab$ – максимальная площадь горизонтального сечения эллипсоида; L , B и H – значения длины, ширины и высоты эллипсоида.

Для частного случая $L = B = H = 2R$ формула (1) дает точное значение объема шара с радиусом R [2]:

$$V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (2)$$

Формула (1) позволяет также достаточно точно (табл. 1) находить по известным внешним размерам L , B и H объемы округлых тел произвольной формы.

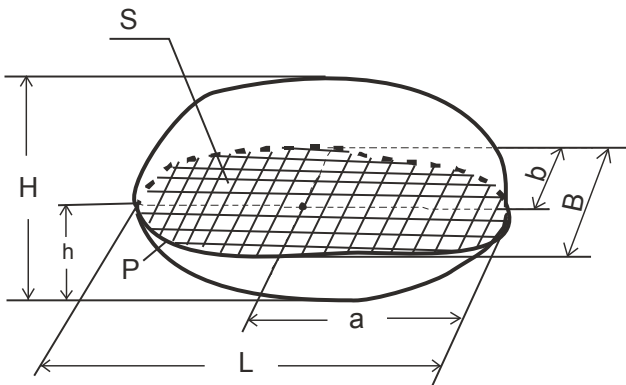


Рис. 1. Расчетная схема округлого (и округло-усеченного) тела

Для более полного учета особенностей неправильных округлых тел введем в качестве исходного параметра максимальное значение их горизонтального периметра P (рис. 1), для чего из формулы длины эллипса [3, 4]

$$P = 4a \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)(1 - b^2/a^2)} \quad (3)$$

выразим малую полуось b эллипса как

$$b = \frac{L}{2} \sqrt{(e^\beta - e^2) / (e^\pi - e^2)}, \quad (4)$$

в которой L – длина округлого тела, а степень β равна отношению $\beta = P/L$.

Обозначая в формуле (1) ширину рассматриваемого тела $B = 2b$ и подставляя в нее вместо b его значение из (4), получим расчетную зависимость для определения объема округлых тел V , выраженную через его длину L , высоту H и периметр наибольшего горизонтального сечения P как

$$V = \frac{\pi}{6} HL^2 \sqrt{(e^\beta - e^2) / (e^\pi - e^2)}. \quad (5)$$

Для частных случаев эллипсоида и шара полученная формула (5) дает точные значения их объемов.

Объемы округло-усеченных тел высотой h нижней (или верхней) части тела (рис. 1) также могут быть подсчитаны по формулам (1) и (5), если подставлять в них вместо H величину h .

Расчетные зависимости для определения округлых площадей (горизонтальных проекций) S (рис. 1) получим путем преобразований формул (1) и (5) для различных исходных значений:

- длины L и ширины B

$$S = \frac{\pi}{4} LB; \quad (6)$$

- длины L и периметра P

$$S = \frac{\pi}{4} L^2 \sqrt{(e^\beta - e^2) / (e^\pi - e^2)}. \quad (7)$$

Величина периметра P криволинейной округлой поверхности при заданных значениях площади S и длины L может быть определена из формулы (7):

$$P = L \cdot \ln \left[e^2 + (e^\pi - e^2) \cdot \left(\frac{4S}{\pi L^2} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Для частного случая – круговой поверхности – формулы (7) и (8) дают точные значения соответственно для площади круга и длины окружности.

Для оценки погрешностей полученных расчетных зависимостей (1), (5)-(7) по нахождению объемов и площадей округлых и округло-усеченных тел произвольной формы было выполнено сравнение их результатов с опытными данными. Эксперименты проводились с 28 округлыми и 4 округло-усеченными камнями (рис. 2), действительные объемы которых определялись по объему вытесненной ими воды (при 3-кратном проведении опытов). Для каждого образца тщательным образом измерялись также их максимальные площади и основные геометрические размеры: длина L , ширина B , высота H и периметр P .



Рис. 2. Образцы экспериментальных камней:
а) округленной формы; б) округло-усеченной формы

Сравнение опытных значений площадей (горизонтальных проекций) и объемов округлых и округло-усеченных тел (каменей) с результатами подсчетов их значений на основе аналитических зависимостей (1), (5)-(7) приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Сравнение опытных значений площадей и объемов округлых тел с результатами формул (1), (5)-(7)

№№ образцов	Параметры камней, см	Значения площадей S, см ²					Значения объемов V, см ³				
		опытные	по (6)	%	по (7)	%	опытные	по (1)	%	по (5)	%
1	L=24,8; B=20,9; H=12,7; P=70,5	386,6	407,1	+5,3	380,5	-1,6	3182,0	3446,61	+8,3	3221,61	+1,2
11	L=7,7; B=4,9; H=3,2; P=20,5	32,3	29,6	-8,3	30,9	-4,3	67,0	63,22	-5,6	65,94	-1,6
20	L=7,3; B=6,1; H=3,9; P=21,3	37,9	35,0	-7,7	35,2	-7,3	89,0	90,93	+2,2	91,40	+2,7
22	L=7,5; B=5,7; H=6,1; P=21,0	33,8	33,6	-0,7	33,5	-0,9	132,0	136,54	+3,4	136,22	+3,2
24	L=8,5; B=5,4; H=4,8; P=22,2	37,4	36,0	-3,6	35,7	-4,5	110,0	115,36	+4,9	114,23	+3,8
25	L=7,7; B=4,9; H=4,5; P=21,1	31,6	29,6	-6,3	33,4	+5,7	98,0	88,9	-9,3	100,19	+2,2
31	L=7,8; B=6,5; H=4,0; P=22,3	41,2	39,8	-3,4	38,2	-7,3	100,0	106,19	+6,2	101,80	+1,8
32	L=7,7; B=6,2; H=4,5; P=21,7	36,1	37,5	+3,9	35,9	-0,6	103,0	112,48	+9,2	107,67	+4,5
33	L=7,63; B=4,4; H=3,8; P=20,8	29,6	26,4	-10,9	32,4	+9,3	82,0	66,80	-18,5	81,95	-0,1
36	L=7,4; B=5,6; H=4,3; P=21,2	35,8	32,5	-9,1	34,5	-3,5	99,0	93,30	-5,7	99,01	+0,1
37	L=6,5; B=4,7; H=3,9; P=17,5	22,9	24,0	+4,8	22,7	-0,8	59,0	62,38	+5,7	59,04	-0,1
46	L=8,4; B=6,4; H=5,6; P=23,1	42,1	42,2	+0,3	40,1	-4,7	147,0	157,63	+7,2	149,76	+1,9
47	L=7,5; B=7,1; H=5,4; P=23,0	43,8	41,8	-4,5	41,8	-4,6	147,0	150,56	+2,4	150,37	+2,3
50	L=7,7; B=7,3; H=5,2; P=23,1	40,2	44,1	+9,8	41,8	+4,0	144,0	153,04	+6,3	144,93	+0,6
51	L=10,5; B=7,1; H=5,6; P=28,1	60,1	58,5	-2,6	58,3	-3,0	214,0	218,59	+2,1	217,65	+1,7
53	L=9,4; B=7,5; H=6,5; P=27,5	60,8	55,4	-9,0	58,7	-3,5	277,0	239,94	-13,4	254,20	-8,2

54	L=9,6; B=8,8; H=6,2; P=29,1	72,1	66,4	-8,0	66,6	-7,6	270,0	274,25	+1,6	275,26	+1,9
55	L=10,5; B=6,6; H=6,0; P=26,8	54,0	54,4	+0,8	50,9	-5,7	219,0	217,71	-0,6	203,71	-7,0
56	L=11,2; B=7,2; H=5,0; P=28,5	61,7	63,3	+2,6	57,4	-6,9	197,0	211,12	+7,2	191,38	-2,9
58	L=8,1; B=6,7; H=7,1; P=22,7	42,3	42,6	+0,8	39,2	-7,4	184,0	201,75	+9,6	185,35	+0,7
61	L=11,4; B=8,7; H=6,9; P=32,1	77,6	77,9	+0,4	78,5	+1,2	376,0	358,32	-4,7	361,11	-4,0
62	L=11,9; B=8,4; H=5,6; P=32,4	84,2	78,5	-6,8	78,4	-6,9	308,0	293,10	-4,8	292,79	-4,9
63	L=11,7; B=7,8; H=6,0; P=32,0	78,0	71,7	-8,1	76,7	-1,6	300,0	286,70	-4,4	306,89	+2,3
64	L=13,0; B=8,4; H=7,3; P=34,4	85,3	85,8	+0,5	86,6	+1,6	422,0	417,39	-1,1	421,63	-0,1
65	L=16,3; B=8,9; H=7,3; P=40,0	117,8	113,9	-3,3	108,4	-8,0	562,0	554,50	-1,3	527,23	-6,2
66	L=11,2; B=8,0; H=5,9; P=30,6	71,8	70,4	-2,0	70,1	-2,3	289,0	276,79	-4,2	275,76	-4,6
67	L=16,0; B=13,7; H=7,6; P=46,7	175,2	172,2	-1,7	169,0	-3,5	930,0	872,27	-6,2	856,28	-7,9
68	L=13,5; B=11,7; H=8,5; P=40,3	135,2	124,0	-8,2	127,0	-6,1	763,0	702,97	-7,9	719,70	-5,7
Осредненная погрешность				-2,7		-2,9			-0,4		-0,8

Таблица 2

Сравнение опытных значений площадей и объемов округло-усеченных тел с результатами формул (1), (5)-(7)

№№ образцов	Параметры камней, см	Значения площадей S, см ²					Значения объемов V, см ³				
		опытные	по (6)	%	по (7)	%	опытные	по (2)	%	по (5)	%
69	L=15,2; B=13,2; H=6,0; P=45,0	158,6	157,6	-0,6	157,8	-0,5	635,0	630,3	-0,7	631,4	-0,6
70	L=12,2; B=7,86; H=3,8; P=32,0	75,3	75,3	0	74,4	-1,1	197,0	190,8	-3,2	188,6	-4,2
71	L=7,16; B=5,9; H=2,4; P=20,4	33,1	33,2	+0,2	31,9	-3,6	49,5	53,08	+7,2	51,0	+3,1
72	L=6,44; B=6,2; H=5,9; P=20,0	31,0	31,4	+1,2	31,7	+2,3	130,0	123,3	-5,1	124,8	-4,0
Осредненная погрешность				+0,2		-0,7			-0,4		-1,4

Результаты и обсуждение. Как следует из таблиц 1, 2, величины объемов и площадей округлых и округло-усеченных тел, подсчитанные на основе формул (1), (5)-(7), при различных исходных линейных размерах дают достаточно приемлемые результаты для практических расчетов. При этом более точные значения для объемов указанных тел (с осредненной погрешностью до 2-3%) дает формула (5), рекомендуемая для инженерной практики.

Предлагаемые расчетные зависимости могут быть использованы также при гидрологических, геоморфологических и гидро-

технических расчетах для определения объемов и площадей озер, водохранилищ, зон затоплений селевых потоков, карьеров, холмов, курганов и других выемок и насыпей на поверхности Земли.

Имея геометрические объемно-площадные характеристики различных валунов и камней округлой и округло-усеченной формы, можно определять их массу m по формуле:

$$m = \rho V, \quad (9)$$

где ρ – плотность рассматриваемого тела, кг/м³, предварительное значение которой для различных тел и горных пород можно принять по таблице 3.

Плотность различных тел и горных пород

Горные породы и тела	Габбро	Гранит	Мрамор	Базальт	Кварц	Вулканический туф	Бетон	Лед
Плотность ρ , кг/м ³	2750-3100	2700	2700	2220-2850	2650	2650	2300	900

Вес (сила тяжести) рассматриваемых тел G определяется по формуле:

$$G = mg, \quad (10)$$

$$g = \gamma = 9,7803 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \sin^2 \varphi - 0,0000059 \cdot \sin^2 2\varphi) - 3,09 \cdot \nabla \cdot 10^{-6}, \text{ м/с}^2, \quad (11)$$

где φ – угол географической широты.

Для приближенных расчетов значение ускорения свободного падения на Земле g принимается равным $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Выводы

При обследовании различных природных округлых и округло-усеченных объектов (камней, валунов, озер, холмов, различных выемок и насыпей) во многих случаях возникает необходимость определения их объемно-площадных характеристик, в том числе в оперативных условиях при возникновении чрезвычайных ситуаций. На основе теоретического анализа и обработки данных экспериментов с 32 округлыми и округло-усеченными камнями получены аналитические зависимости для определения объемно-площадных характеристик различных округлых тел произвольной формы по их внешним размерам. Для частных случаев геометрически правильных тел: эллипсоида, шара, полусфера и др. – предложенные зависимости совпадают с известными точными формулами. Расчетные формулы могут быть использованы при оперативных гидрологических, геоморфологических и гидротехнических расчетах естественных и искусственных водных объектов, а также для нахождения объемов, площадей, периметра и других характеристик округлых и округло-усеченных тел и емкостей произвольной формы, в том числе расположенных в труднодоступных местах.

Библиографический список

1. Хуан Ж.Ц., Ли В.Л. Анализ опасных геологических процессов, вызванных Вэнь-

где g – ускорение силы тяжести на Земле, значение которого с учетом географического (широтного) местонахождения тела φ и высоты ∇ (м) над уровнем моря следует принять равным нормальному ускорению свободного падения γ , равному [5]

чуанским землетрясением 12 мая 2008 года в Китае // Геориск. 2010. № 1. С. 14-23.

2. Бронштейн Н.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике: Пер. с нем. М.: «Наука», 1980. 975 с.

3. Анахаев К.Н. О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7-9.

4. Анахаев К.Н. Эллиптические интегралы в инженерных задачах // Строительство и архитектура. 2014. Т. 2. Вып. 1(2). С. 58-63.

5. Цубой Т. Гравитационное поле Земли: Пер. с япон. М.: «Мир», 1982. 286 с.

Материал поступил в редакцию 11.09.2016 г.

Сведения об авторах

Анахаев Кошкинбай Назирович, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по селевой проблематике, эксперт РАН, ФГБУ «Высокогорный геофизический институт» Росгидромета; 360030, Россия, КБР, г. Нальчик, пр. Ленина, 2; тел.: 8-928-693-13-84; anaha13@mail.ru.

Акшайков Заур Тахирович, младший научный сотрудник ФГБУ «Высокогорный геофизический институт» Росгидромета; 360030, Россия, КБР, г. Нальчик, пр. Ленина, 2.

Анахаев Хасан Аубекирович, младший научный сотрудник ФГБУ «Высокогорный геофизический институт» Росгидромета; 360030, Россия, КБР, г. Нальчик, пр. Ленина, 2, тел.: 8(8662) 40-21-01; aha.1986@yandex.ru,

K.N. ANAKHAEV, Z.T. AKSHAYAKOV, KH.A. ANAKHAEV

Federal state budgetary institution «High mountain geophysical institute», Roshydromet (FSBI «VGI»)
Nalchik, Kabardino-Balkaria, Russian Federation

DETERMINATION OF VOLUME AND AREAL CHARACTERISTICS OF ROUNDED BODIES OF A FREE FORM

At inspections of various natural objects in many cases there is a need of the urgent assessment of volume and areal characteristics of blockages, separate rocky fragments, blocks, and also volumes of the accumulated breakthrough dangerous reservoirs, etc., in particular, in operational conditions of the emergency situation beginning. Similar questions arise also at the determination of areas and volumes of natural rounded and rounded-truncated bodies (stones, boulders, lakes, hills, various ditches and fills) located in hard-to-reach spots. Under such circumstances for taking urgent protective measures the exactly simplified rated dependences of determination of their volume and space characteristics are mostly needed. On the basis of the theoretical analysis and data processing of experiments with 32 rounded and rounded-truncated stones there are obtained analytical dependences for definition of volume and areal characteristics of various roundish bodies of a free form according to the values of their external sizes. For special cases of geometrically regular bodies: an ellipsoid, a sphere, a semi-sphere, etc. the offered dependences coincide with the known exact formulas. The proposed calculated dependences can be used at operative hydrological, geomorphologic and hydro technical calculations of natural and artificial water objects, and also for finding volumes, spaces, perimeter and other characteristics of rounded and rounded-truncated bodies and capacities of a free form including those located in hard-to-reach places.

Rounded body, rounded-truncated body, boulder, lake, hill, ditches, body volume, surface area, perimeter of a circular body.

References

1. Khuan Zh. Ts., Lee V.L. Analiz opasnyh geologicheskikh protsessov, vyzvannyh Vanjchuanskim zemletryaseniem 12 maya 200 goda v Kitae // Georisk. 2010. № 1. S. 14-23.
2. Bronshtein N.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike: Per. S nem. M.: «Nauka», 1980. 975 s.
3. Anakhaev K.N. O metodax rascheta potentsialnyh (filjtratsionnyh) potokov na osnove ellipticheskikh integralov // Hydrotehnicheskoe stroiteljstvo. 2008. № 8. S. 7-9.
4. Anakhaev K.N. Ellipticheskie integraly v inzhenernyh zadachah // Stroiteljstvo i arhitektura. 2014. T. 2. Vyp. 1(2). S. 58-63.
5. Tsuboj T. Gravitatsionnoe pole Zemli: Per. s yapon. M.: «Mir», 1982. 286 s.

The material was received at the editorial office
11.09.2016

Information about the authors

Anakhaev Koshkinbai Nazirovic, doctor of technical sciences, professor, FGBI «High mountain geophysical institute», deputy director on mud flow problems, 360030, Russia, KBR, Nalchik, pr. Lenina, 2; tel.: 8-928-693-13-84; anaha13@mail.ru.

Akshayakov Zaur Tahirovic, junior researcher FGBI «High mountain Geophysical Institute», 360030, Russia, KBR, Nalchik, pr. Lenina, 2; tel.: 8(8662) 40-21-01; akzaur@yandex.ru.

Anakhaev Hasan Aubekirovic, junior researcher FGBI «Mountain Geophysical Institute», 360030, 360030, Russia, KBR, Nalchik, pr. Lenina, 2; tel.: 8(8662) 40-21-01, axa.1986@yandex.ru.