

УДК 502/504:631.811.91

А. Е. ГУСЕВ

Государственное научное учреждение

Всероссийский научно-исследовательский институт систем гидротехники и мелиорации имени А. К. Костякова

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрены процессы конвективно-диффузионного переноса примеси, распространения загрязняющих веществ в водном объекте. Приведены формулы для нахождения коэффициента продольной диффузии и коэффициента скорости распада. Дан анализ распространения примеси в водотоке.

Одномерное уравнение конвекции-диффузии, распространение примеси в водотоке, коэффициент диффузии, коэффициент скорости распада.

The article deals with the processes of convection-diffusion transfer of admixtures, spreading of pollutants in the water object. Formulas for finding a coefficient of longitudinal diffusion and velocity coefficient of decay are given in the equation. The analysis of admixture spreading in the water stream is given.

One-dimensional convection-diffusion equation, admixture transfer in the water stream, coefficient of diffusion, velocity coefficient of decay.

При моделировании распространения примеси в стационарных течениях в большинстве случаев применяется классическое уравнение конвективно-диффузионного переноса примеси в одномерной постановке задачи [1]. Основные трудности при этом связаны с определением коэффициента продольной диффузии и коэффициента скорости распада:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (vC) - kC, \quad (1)$$

где C – концентрация загрязняющего вещества, мг/л; v – скорость потока воды, м/с; t – время, с; x – расстояние, м; D – коэффициент продольной диффузии, м²/с; k – коэффициент скорости распада, с⁻¹.

Конвективный перенос загрязняющих веществ $T_{x_0}^K$ через сечение x_0 равен произведению средней по сечению скорости воды v_{x_0} , площади поперечного сечения A , через которое происходит конвективный перенос, и средней концентрации C_{x_0} загрязняющего вещества:

$$T_{x_0}^K = v_{x_0} A C_{x_0}. \quad (2)$$

Предполагается, что диффузионный перенос загрязняющего вещества $T_{x_0}^D$ через сечение x_0 пропорционален градиенту концентрации $\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x-x_0}$ в сечении x_0 и

площади сечения A .

Полагая D_{x_0} коэффициентом диффузии в сечении x_0 , получим:

$$T_{x_0}^D = - D_{x_0} A \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x-x_0}. \quad (3)$$

Запись (3) сделана в предположении, что диффузия подчиняется закону распространения Фика [2]. Знак минус означает, что диффузионный перенос вещества направлен в сторону понижения его концентрации, т. е. в направлении, противоположном градиенту концентрации. Градиент концентрации определяется как предел отношения разницы концентраций в соседних сечениях к расстоянию между ними, когда это расстояние стремится к нулю:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C_{x+0,5\Delta x} - C_{x-0,5\Delta x}}{\Delta x}. \quad (4)$$

Коэффициент диффузии должен быть калиброван или получен в результате вычислений с использованием модели турбулентной диффузии.

Выражение $[D (\partial C / \partial x) - vC]$ в уравнении (1), умноженное на площадь поперечного сечения A , называют полным потоком вещества. Поток вещества в результате дисперсии $DA (\partial C / \partial X)$ пропорционален градиенту концентрации.

Коэффициент дисперсии D зависит от свойств жидкости и характеристик турбулентности водного потока. В этот параметрический коэффициент принято включать все процессы, затрагивающие распределение примеси, отличные от конвекции. С помощью выражения vAC определяется конвективный поток, вызванный движением воды, содержащей вещество с концентрацией C (скорость водного потока – v , площадь поперечного сечения – A).

В канале с установившимся движением производная концентрации примеси по времени $\partial C/\partial t$ равна нулю. В предположении, что единственной причиной изменения концентрации является естественный распад загрязняющего вещества, определенный как kC , уравнение получает свой окончательный вид (1). Уравнение (1) имеет аналитическое решение [3]:

$$C(t,x) = C_0 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{v}{2D}x\right) \cdot \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{D} \cdot \sqrt{\frac{v^2}{4D} + k_1}x}\right) \times \right. \\ \times \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D}} \frac{x}{\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{v^2}{4D} + k_1} \sqrt{t}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{1}{D}} \cdot \sqrt{\frac{v^2}{4D} + k_1}x\right) \times \\ \left. \times \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D}} \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{v^2}{4D} + k_1} \cdot \sqrt{t}\right) \right]. \quad (5)$$

Аналитическое решение значительно сокращает время и трудоемкость получения результатов для дальнейшего анализа. Для применения полученного аналитического решения целесообразно использовать математические компьютерные программы, облегчающие процесс получения конечных результатов: Maple, MathCAD, MatLab, Wolfram Mathematica.

Рассмотрим решения стационарного уравнения конвективно-диффузионного переноса загрязняющего вещества (рисунок). По оси абсцисс показано расстояние от точки выброса, по оси ординат – концентрация примеси загрязняющего вещества.

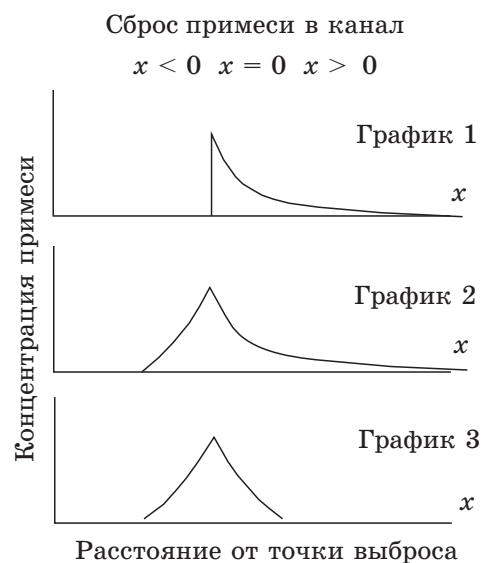
В речных потоках, не подверженных влиянию приливо-отливных воздействий, коэффициент диффузии является обычно малой величиной. График 1 показывает распространение концентрации примеси при $D = 0$ (присутствует конвективное перемещение примеси и отсутствует диффузное); на графике 3 – распространение в отсутствии конвективного переноса;

график 2 иллюстрирует конвективно-диффузионное распространение примеси.

Модели управления качеством воды часто используются для оценки влияния загрязнителя, поступающего в водный объект, на качество воды и для сравнения результатов расчета концентрации с установленными для этого объекта стандартами качества воды. Описанное уравнение установившегося течения (1) может быть использовано для построения модели. Наличие аналитического решения существенно сокращает время получения результатов и позволяет проводить оценку эффективности мероприятий по сокращению сбросов загрязняющих веществ, необходимых для удовлетворения требований стандартов качества на каждом участке канала или реки.

Предположим, что максимально допустимые концентрации загрязняющего вещества определены для каждого из выбранных створов. Чтобы определить необходимое сокращение сбросов, река должна быть разделена приблизительно на однородные участки. Каждый такой участок может иметь свои постоянные значения площади поперечного сечения A , коэффициента дисперсии D , константы распада k и скорости v , связанные с некоторыми проектными расходами воды и температурными условиями.

В условиях постоянного поступления загрязняющих веществ большой расход



Распределение концентрации примеси в водотоке при стационарном течении и точечном источнике загрязнения

воды в реке способствует разбавлению и, как следствие, уменьшению концентрации загрязняющих веществ, в то время как низкий расход воды может стать причиной недопустимо высоких концентраций загрязняющих веществ. Для того чтобы определить, выполняются ли требования стандартов качества воды в наихудших условиях, из имеющихся гидрологических данных обычно выбирают те, которые соответствуют низкому расходу. Подобная задача может решаться с помощью аналитического решения уравнения (1), что значительно сокращает время расчета.

С помощью большинства имитационных моделей качества воды вычисляют качество по последовательному ряду дискретных периодов времени. Расчетный период времени разделен на интервалы, и потоки приняты постоянными в пределах каждого из этих интервалов времени. Каждый водный объект разделен на сегменты или элементы объема, и они, как полагают, находятся в установившихся состояниях в пределах каждого периода времени моделирования. Предполагается, что в течение каждого периода времени существует только конвективный перенос загрязняющих веществ. Смешивание в конце каждого периода происходит в пределах определенного сегмента или элемента объема, таким образом получается

концентрация в сегменте или элементе объема на начало следующего шага. Решающий элемент моделирования подобных задач – определение и калибровка коэффициентов в уравнении (1).

1. **Ed. A. K. Biswat.** Models for water quality management. – Mc Graw Hill, 1981. – 348 p.

2. **Fick A.** Poggendorff's Annel // Physik. – 1855. – P. 59.

3. **Волинов М. А., Гусев А. Е., Евстигнеев Н. М.** Аналитическое решение одномерного нестационарного уравнения конвективно-диффузионного переноса неконсервативных примесей: Роль мелиорации в обеспечении продовольственной и экологической безопасности России: материалы Международной научно-практической конференции / ФГОУ ВПО МГУП, 2009. – Ч. 2. – С. 40–42.

4. **Ван Бик И., Лаукс П.** Планирование и управление водохозяйственными системами. Введение в методы, модели и приложения: монография; под ред. М. В. Селиверстовой; перевод с англ. А. В. Степанова [и др.]. – М.: Юстицинформ, 2009. – 660 с.

Материал поступил в редакцию 04.02.11.

Гусев Алексей Евгеньевич, аспирант

Тел. 8 (499) 153-21-33, 8 (926) 276-57-08

E-mail: preux@inbox.ru