УДК 502/504 : 624.042 : 627/626

В. П. ШАРКОВ, В. М. КАРНАУХОВ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева», г. Москва

О ВЕЛИЧИНЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ГРУНТЕ У СТЕН ЯЧЕИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Работа посвящена исследованию касательных напряжений, влияющих на горизонтальное давление грунта-заполнителя на стенки ячеистых конструкций подпорных гидротехнических сооружений (плотин, подпорных стен, устоев). Для исследований использована гипотеза о пропорциональной зависимости величины касательных напряжений в расчетной точке грунта и ее удаления от геометрического центра ячейки. Для решения поставленных задач авторы использовали математические методы. Решение выполнено в дифференциальном виде. Изучено влияния длины стенки на касательные напряжения в ячейках прямоугольной формы. Получена зависимость для определения касательных напряжений в грунте у стенок ячеистой конструкции прямоугольной формы с различным соотношением сторон. Для наиболее часто используемых в гидротехнической практике ячеек с соотношением сторон $0{,}5 \le b/a \le 3$, осредненное касательное напряжение превышает его значение посредине стенки в 1,04...1,72 раза. Показано, что для частного случая (квадратной в плане ячейки) касательное напряжение в углах стенки в 1,4 раза больше, чем у оси стенок, а осредненные в пределах стенки значения в 1,15 раза превышает величину, определенную по методике СНиП 2.06.07.87. Для определения касательных напряжений в прямоугольных ячейках с различным соотношением сторон предложен график.

Ячейка, грунт-заполнитель, напряжения, давление грунта, формула, интеграл.

The work is devoted to the investigation of shearing stresses influencing a horizontal pressure of the soil-filler on the walls of cellular constructions of retaining hydraulic structures (dams, breaswalls, piers). For investigations there was used a hypothesis on the proportional dependence of shearing stresses value in the design point of soil and its distance from the geometric cell center. For solution of the assigned tasks the authors used mathematical methods. The solution is fulfilled in a differential way. The influence of the wall length on shearing stresses was studied in cells of a rectangular form. The dependence was received for determination of shearing stresses in soil near the walls of the cellular structure of a rectangular form with different correlation of sides. For the mostly often used in hydrotechnical practice cells with a ratio of sides $0{,}5 \le b/a \le 3$ the averaged shearing stress exceeds its value in the middle of the wall by 1,04...1,72 times. It is shown that for a particular case (square in the plan cell) the shearing stress in the corners of the cell is by 1,4 times higher than near the walls axis, and the averaged values within the wall exceed by 1,15 times the value determined according to the methodic SNiP 2.06.07.87. For determination of shearing stresses in rectangular cells with different ratio of sides there is proposed a diagram.

Cell, soil-filler, stresses, pressure of soil, formula, integral.

Ячеистые конструкции нашли применение в гидротехнических сооружениях (плотинах, устоях, подпорных стенках). В этих конструкциях, представляющих собой «коробки», засыпанные грунтом, прочность стен определяется горизонтальным давлением грунта. Для определения этого давления используют описанную в [1] формулу Янсена, в которую входит гидравлический радиус. Использование этого параметра без поправочных коэффициентов в расчетах ячеек прямоугольной формы, широко распространенных в гидротехническом строительстве, приводит к ошибкам, величины которых возможно оценить при исследование касательных напряжений, напрямую влияющих на горизонтальное давление грунта.

В соответствии с формулой Янсена касательные напряжения в грунте у стен ячеистой конструкции определяется по зависимости :

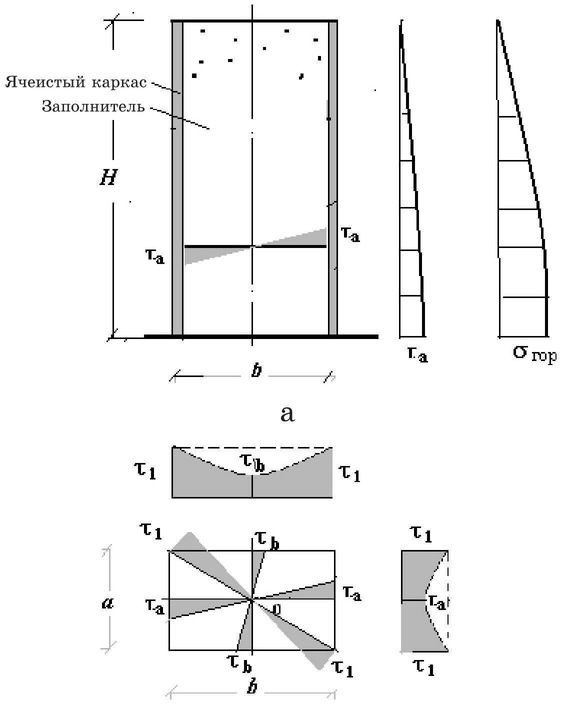
$$\tau = \gamma\ R\ [1 - \exp(-kz/R)], \qquad (1)$$

где γ – плотность грунта; k – коэффициент касательных напряжений; z – глубина расчетной точки от поверхности грунта-засыпки; R – гидравлический радиус:

$R = F/П$,

где F и П – площадь и периметр поперечного сечения ячейки.

Эпюра распределения касательных напряжений по высоте заполнителя в ячеистой конструкции представлена на рис. 1а.



б

Рис. 1. **Распределение касательных напряжений от грунта-заполнителя в ячеистой конструкции прямоугольной формы:** а – по высоте; б – в плане

Горизонтальное давление $\sigma_{гор}$ заполнителя на стенку в ячейке, как известно, определяется делением касательного напряжения $\tau_а$ на коэффициент трения грунта tg δ у стен, то есть. Если tg δ = const, то эпюра распределения $\sigma_{гор}$ по высоте похожа на эпюру касательных напряжений (рис. 1а).

При большой глубине ячейки, то есть при $z \to \infty$ в соответствии с формулой (1), касательное напряжение $\tau = \gamma\ R$ и постоянно по периметру ячейки. Однако это характерно только для ячеек цилиндрической формы, в которых у стенок $\tau = \gamma\ R = r\ \gamma/2 = \gamma_0\ r$, где r – радиус цилиндра (обозначим $\gamma/2 = \gamma_0$).

В ячейке квадратной формы касательные напряжения вдоль стенок неодинаковы: посередине стенки величина $\tau_а$ минимальна, у краев τ_1 максимальна (рис. 1б). Это связано с тем, что фактическая величина напряжения τ в грунте пропорциональна расстоянию расчетной точки от центра ячейки [2, 3]. В центре ячейки $\tau = 0$, а при удалении от него напряжение линейно возрастает (рис. 1б).

Аналогично в ячейках прямоугольного очертания с размерами стенок a и b касательное напряжение посредине b равно $\tau_а = \gamma_0\ a\ /2$, а у посередине a – $\tau_b = \gamma_0\ b/2$. Касательное напряжение в точке, расположенной в углу ячейки, можно определять как гипотенузу в прямоугольном треугольнике со сторонами $a/2$ и $b/2$ из выражения $\tau_1 = \gamma_0[(a/2)^2 + (b/2)^2]^{0,5}$.

Таким образом, в ячейке прямоугольной формы величины касательных напряжений в плане вдоль каждой из 4-х стен оказывается неодинаковыми, возрастая от их середины к углам по криволинейной зависимости (рис. 1б).

Такое распределение напряжений τ оказывает влияние на непосредственно связанное с ним давление грунта на стены.

Целью работы является вывод зависимости для определения фактических касательных напряжений вдоль стенок ячеистой конструкции прямоугольной формы и их осредненных значений в ячейках с различным соотношением сторон, а также оценка их значимости в расчетах сооружений.

В работе для упрощения рассматривается случай $z \to \infty$. При этом формула (1) имеет вид:
$\tau = \gamma R$.

Решение задачи предполагается в три этапа. На первом этапе определяется зависимость величины y от x, на втором – площадь криволинейной эпюры τ, на третьем – величина осредненного касательного напряжения у стенки.

С помощью рис. 2, на котором изображена ячейка прямоугольного сечения с размерами *a* и *b*, определяли зависимость y = f(x).

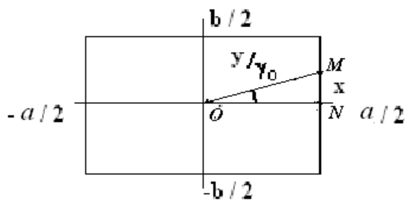


Рис. 2. **Зависимые величины y и x на чертеже**

Касательное напряжение в точке *N* зависит от ее удаления от центра ячейки, то есть от расстояния $ON = a/2$; в *M* – от *OM*, то есть от гипотенузы треугольника *MON* и $OM = y/\gamma_0$. Расположение точки *M* характеризует также абсцисса $x = MN$.

Из рис. 2 согласно теореме Пифагора $x^2 + (a/2)^2 = (y/\gamma_0)^2$, тогда $y^2 = \gamma_0^2(x^2 + (a/2)^2)$ или $y = (\gamma_0/2)\sqrt{4x^2 + a^2}$. Таким образом, фактическое касательное напряжение в точке *M* определяется по этой формуле как функция y = f(x).

На рис. 3 изображена криволинейная трапеция, площадь которой необходимо определить.

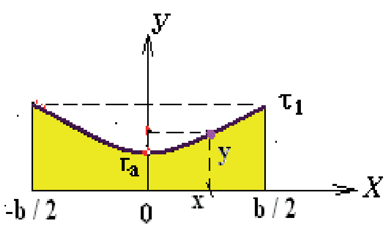


Рис. 3. **График зависимости величины y от x**

В силу симметричности графика относительно оси *OY* вычисляем площадь криволинейной трапеции при x > 0, результат удваиваем.

Для решения задачи запишем в дифференциальной форме выражение для элементарной площади d*S* эпюры τ для одной стороны прямоугольника, которая равна произведению ординаты y на элементарное значение абсциссы dx:

$dS = [(\gamma_0/2)(4x^2 + a^2)^{0,5}]dx.$ (2)

Определенный интеграл этого выражения на участке от 0 до *b*/2 имеет следующий вид:

$$S = 2\int_0^{b/2} \frac{\gamma_0}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,t, \quad 0 \le t \le \mathrm{arctg}(b/a) \\ dx = \dfrac{dt}{2\cos^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2\gamma_0}{2}\int_0^{\mathrm{arctg}(b/a)} \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = \frac{a^2\gamma_0}{2}\int_0^{\mathrm{arctg}(b/a)} \frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z = \sin t, \quad 0 \le z \le \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \text{т. к. } \mathrm{tg}\,t = b/a \Rightarrow 1 + \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\ t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2\gamma_0}{2}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{a^2\gamma_0}{2}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{1 - z^2 + z^2}{(1-z^2)^2}\,dz =$$

$$= \frac{\gamma_0 b}{4}\sqrt{a^2+b^2} - \frac{\gamma_0 a^2}{8}\ln\left|\frac{b - \sqrt{a^2+b^2}}{b + \sqrt{a^2+b^2}}\right|. \quad (3)$$

На следующем этапе для определения осредненного значения касательного напряжения необходимо площадь эпюры разделить на длину *b* стороны ячейки:

$$\tau_{ср} = \frac{\gamma_0 b}{4}\sqrt{a^2+b^2} - \frac{\gamma_0 a^2}{8}\ln\left|\frac{b - \sqrt{a^2+b^2}}{b + \sqrt{a^2+b^2}}\right|. \quad (4)$$

Выражение (4) имеет сложную форму. Рассмотрим частный случай с ячейкой квадратной формы, в которой при *a* = *b* выражение для площади (3) имеет вид:

$$S = \frac{\gamma_9\, a^2\sqrt{2}}{4} - \frac{\gamma_9\, a^2}{8}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| = 0,574\ \gamma_0\, a^2. \quad (5)$$

Осредненная ордината касательного напряжения вдоль стенки ячейки в (5) равна:

$$\tau_{ср} = S\,/\,a = 0,574\,\gamma_0\, a = 1,148\ \tau_а\,, \quad (6)$$

где $\tau_а = \gamma_0\, a/2$ – касательное напряжение в грунте у стенки и ее оси, совпадающее в данном случае с напряжением по формуле Янсена.

Для этого случая осредненное в пределах одной стенки касательное напряжение в 1,148 раза больше, чем по Янсену. В силу пропорциональности горизонтальное давление грунта на стенку во столько же раз больше полученного по этой формуле [4].

Так как выражение (6) имеет дробную и неудобную для расчетов форму, для упрощения рекомендуется зависимость:

$$\tau_{ср} = \frac{8}{7}\tau_а = \frac{8}{7}\gamma_0\, a\,/\,2. \quad (7)$$

Как показали оценки, при использовании выражения (7) ошибка составляет $< 1\ \%$, что приемлемо для практических целей.

Для обобщения данных в ячейках прямоугольной формы с плановыми размерами a и b ниже составлена таблица по изучению влияния длины стенки b на касательные напряжения (при постоянной длине стенки a), в которой приведены значения касательных напряжений $\tau_а$ по середине стенки длиной b и по краям τ_1 и осредненные по длине стенки значения $\tau_{ср}$.

Влияние длины стороны *b* прямоугольной ячейки на касательные напряжения

Длина стенки ячейки	Касательные напряжения				
	Посредине стенки $\tau_а$	По краям стенки $\tau_1 = (\gamma/2)(a^2 + b^2)^{1/2}$	Осредненные по длине стенки $\tau_{ср}$	По формуле Янсена $\tau_я$	$\tau_{ср}\,/\,\tau_я$
$a/2$	$\gamma_0\, a/2$	1,12 $\tau_а$	1,04 $\tau_а$	$\gamma_0\, a/3$	1,56
a	$\gamma_0\, a/2$	1,41 $\tau_а$	1,48 $\tau_а$	$\gamma_0\, a/2$	1,148
2 a	$\gamma_0\, a/2$	3,16 $\tau_а$	1,41 $\tau_а$	2 $\gamma_0\, a/3$	1,058
3 a	$\gamma_0\, a/2$	3,16 $\tau_а$	1,72 $\tau_а$	3 $\gamma_0\, a/4$	1,147
4 a	$\gamma_0\, a/2$	4,12 $\tau_а$	2,04 $\tau_а$	4 $\gamma_0\, a/5$	1,275
5 a	$\gamma_0\, a/2$	5,09 $\tau_а$	2,37 $\tau_а$	5 $\gamma_0\, a/6$	1,42

Как видно из таблицы, касательные напряжения по краям стенок во всех случаях больше их значений посредине, а в квадратной ячейке в 1,41 раза превышают значения посредине стенок.

Анализируя данные таблицы, можно сделать вывод, что в ячейках прямоугольной формы со стороной a при удлинении второй стороны b от 0,5a до 5a:

1. касательные напряжения по краям стенки возрастают при ее удлинении в диапазоне значений (1,12...5,09)$\tau_а$, то есть примерно в 5 раз;

2) осредненные касательные напряжения на этой стенке возрастают в диапазоне (1,04...2,37)$\tau_а$, то есть примерно в 2,3 раза (в 2,3 раза возрастает также осредненное давление грунта на стенку).

Из данных таблицы также следует, что для ячеек с соотношением сторон $0,5 \le b/a \le 3$, наиболее часто используемых в гидротехнике, осредненное касательное напряжение превышает его значение посредине стенки в 1,04...1,72 раза.

По данным таблицы построен график зависимости соотношений касательных напряжений, осредненных по длине стенки и определенных по формуле Янсена, в зависимости от относительной длины стенки ячейки (рис. 4).

Из рисунка 4 видно, что соотношение напряжений $\tau_{ср}/\tau_Я$ с ростом относительной длины стороны ячейки b/a от 0,5 до 2,0 уменьшается от 1,56 до 1,058, а далее с ростом соотношения b/a до 5,0 – возрастает до 1,42.

При этом наибольшие превышения фактических напряжений над значениями по формуле Янсена в 1,56...1,2 раза наблюдаются при длинах стенки $b = (0,5...0,8)a$ и $b = (2,4...3)a$, а наименьшие превышения в 1,06...1,1 раза – при $b = (1,2...2,6)a$.

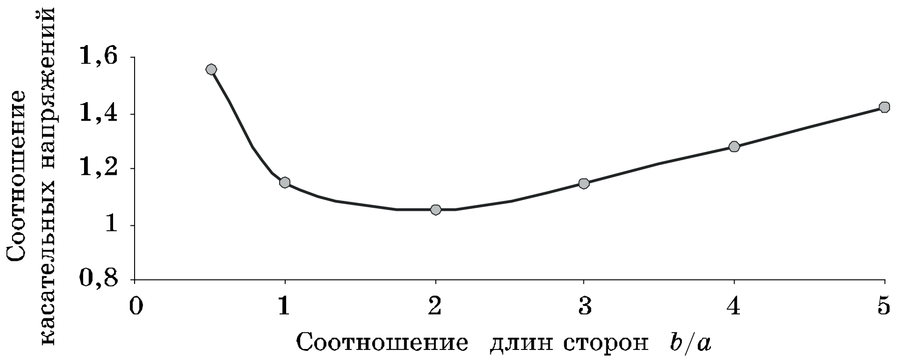


Рис. 4. **График зависимости соотношения касательных напряжений, осредненных значений и рассчитанных по Янсену $\tau_{ср}/\tau_{я}$, от соотношения длин сторон ячейки b/a**

Выводы

Осредненные касательные напряжения в грунте $\tau_{ср}$ у стен ячеек прямоугольной формы со сторонами a и b могут быть определены по следующей формуле:

$$\tau_{ср} = \frac{\gamma}{4}\sqrt{a^2+b^2} - \frac{\gamma a^2}{8b}\ln\left|\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Для упрощения расчетов касательных напряжений в ячейках квадратной формы может использоваться зависимость $\tau_{ср} = (8/7)\tau_{а}$.

Результаты исследований показали, что осредненные касательные напряжения для ячеек прямоугольной формы превышают рассчитанные по СНиП 2.06.07.87 в 1,06...1,56 раза, а для квадратной в плане ячейки это превышение составляет 14,8 %.

Наибольшие касательные напряжения и давления на стенки в ячейках прямоугольной формы со сторонами a и b наблюдаются при длине стенки $b = (0,5...0,8)a$ и $b = (2,4...3)a$, а наименьшие – при $b = (1,2...2,6)a$. Для точной оценки превышения фактических касательных напряжений над значениями по формуле Янсена может использоваться полученный график (рис. 4).

1. **Ianssen H. A.** Versuche in Silozelle // V.D.I. – 1895. – № 35.

2. **Гениев Г. А.** Вопросы динамики сыпучей среды. – М.: Госстройиздат, 1958. – 122 с.

3. **Шарков В. П.** Касательные напряжения в грунте у стен ячеистых сооружений и их предельные значения в условиях интенсивных осадок // Природообустройство. – 2010. – № 5. – С. 50–55.

4. Подпорные стены, судоходные шлюзы рыбопзащитные и рыбопропускные сооружения: СНиП 2.06.07.87. – М.: ЦИТП Госстроя, 1989. – 40 с.

Материал поступил в редакцию 16.06.14.

Шарков Вячеслав Петрович, *кандидат технических наук, доцент кафедры гидротехнических сооружений*

Тел. 8 (499) 976-24-60

Карнаухов Вячеслав Михайлович, *кандидат технических наук*

Тел. 8 (499) 976-16-50