УДК 502/504:539.3

П. Ф. САБОДАШ

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБОПРОВОДОВ

При решении задач гидроупругости рассмотрены характеристики распределения скоростей потока непосредственно за напорным органом по течению. Во многих задачах профиль скорости на входе в трубу и на выходе из нее можно принять приближенно постоянным по сечению. Представлена окончательная линеаризованная система уравнений гидроупругой динамики.

Спектральный состав пульсации скоростей, задачи гидроупругости, профиль скорости, линеаризованная система уравнений.

When solving the tasks of hydro-elasticity there are considered characteristics of velocities flow distribution directly after the head organ along the current. In many tasks the velocity profile in the pipe inlet and outlet may be assumed constant in the rough on the cross section. The final linearized equations system of hydro-elastic dynamics is presented.

Spectral structure of velocities pulsation, tasks of hydro-elasticity, velocity profile, linearized system of equations.

Рассмотрим трубопровод конечной длины, соединяющий два элемента, которые регулируют расход или давление, например два насоса. Труба представляет собой полый круговой цилиндр длиной L (радиус – R; толщина стенки – h). Материал трубы – линейно-упругий, изотропный. Кроме того, для труб $h << R$, что позволяет рассматривать трубу как оболочку. В связи с наличием касательных напряжений на внутренней поверхности оболочки и относительной толщиной h/R, большей, чем принято при использовании гипотез Кирхгофа–Лява, необходимо учитывать поперечные сдвиги и инерцию вращения. Такой подход приводит к уточненной теории оболочек типа Тимошенко. Как правило, подсоединение трубы к напорным органам является фланцевым. При расчетах фланцевые соединения обычно приближенно заменяют краевыми условиями типа Навье.

Жидкость в трубе обладает вязкостью (в соответствии с гипотезами Ньютона и Прандтля при ламинарном и турбулентном течении). Будем считать, что задан закон изменения расхода или давления жидкости на входе трубы или на выходе из нее и что известны характеристики распределения скоростей потока непосредственно за напорным органом по течению. Так, например, для многих устройств это распределение может быть принято постоянным, а возмущения, сносимые вверх по потоку от напорного органа в конце трубы, выравнивают профиль скоростей. Поэтому во многих задачах можно приближенно принимать профиль скорости на входе в трубу и на выходе из трубы постоянным по сечению. При этом радиальный компонент скорости жидкости в указанных сечениях равен 0, поскольку радиальная скорость, как в центре потока, так и на жесткой стенке в трубе, всегда равна нулю. С другой стороны, как правило, на выходе из регулирующих органов (кроме турбонасосов) закрученность потока мала и течение в трубе может считаться приближенно осесимметричным. Предположим, что течение не сопровождается кавитационными разрывами сплошности жидкости.

При анализе нестационарных движений жидкости динамические уравнения можно записать в предположении несжимаемости, а сжимаемость существенна лишь при анализе уравнения неразрывности и уравнения состояния.

Уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости; $\vec{v}$ – вектор скорости; t – время.

Связь давления и плотности в вязкой жидкости устанавливается формулой Леонтовича–Мандельштама:

$$dp = c^2 d\rho - \mu_2 d(\mathrm{div}\,\vec{v}), \qquad (2)$$

где p – давление жидкости; c – скорость звука, по Лапласу; μ_2 – коэффициент объемной вязкости, по Стоксу.

Динамическое уравнение при ламинарном течении жидкости:

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{F}-\mathrm{grad}p+ +\left(\mu_1+\mu_2\right)\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\vec{v}+ +\mu_1\Delta\vec{v}=0, \qquad (3)$$

где ρ_0 – начальная плотность жидкости; $\vec{F}$ – вектор внешних объемных сил, действующих на жидкую частицу; μ_1 – первый (сдвиговый) коэффициент вязкости, по Стоксу; Δ – оператор Лапласа.

Для вывода уравнений турбулентного течения выпишем уравнение движения сплошной среды в форме:

$$\rho\overline{\omega} = \vec{F} + \mathrm{div}P, \qquad (4)$$

где $\vec{\omega}$ – вектор ускорения; $\vec{F}$ – вектор массовых сил; P – тензор напряжений.

При турбулентном движении жидкости это уравнение может быть записано так, как предложил О. Рейнольдс:

$$\overline{\rho\vec{\omega}}+\left(\rho\vec{\omega}\right)'=\vec{F}+\mathrm{div}\left(\overline{P}+P'\right),$$

где чертой сверху обозначены усредненные величины.

Согласно Озену, $\left(\rho\vec{\omega}\right)<<'\ \overline{\rho\vec{\omega}}$, следовательно, уравнение (5) можно записать так:

$$\overline{\rho\vec{\omega}}=\vec{F}+\mathrm{div}\left(\overline{P}+P'\right). \qquad (6)$$

Для обобщенной жидкости Ньютона–Прандтля при турбулентном течении элементы тензора напряжений имеют следующий вид:

$$P_{xx}=-P+2\left(\mu_1+\mu_3\right)\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x}+\mu_2\mathrm{div}\,\vec{\vartheta};$$

$$P_{yy}=-P+2\left(\mu_1+\mu_3\right)\frac{\partial\vartheta_y}{\partial y}+\mu_2\mathrm{div}\,\vec{\vartheta},$$

где $\mu_{3u} = \mu_1\cdot\mathrm{Re}'$; $\mathrm{Re}'=-\dfrac{v'l'\rho_0}{\mu_1}$; l' – длина пути перемешивания; $\vartheta = v$ – скорость.

Предполагая, вследствие несжимаемости, что $\overline{\rho\vec{\omega}}=\rho\dfrac{\partial\overline{\vec{\vartheta}}}{\partial t}$ и опуская черту при записи среднестатистических величин, получим следующие динамические уравнения:

$$-\rho\frac{\partial\overline{\vec{\vartheta}}}{\partial t}+\vec{F}-\mathrm{grad}\,p+ +\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,\vec{v}+ +\left(\mu_1+\mu_3\right)\Delta\vec{v}=0. \qquad (7)$$

Как обычно делается в технической гидродинамике, пренебрежем зависимостью μ_1 от режима течения, хотя μ_1 есть материальная константа, в то время как μ_3 существенно зависит от производства и диссипации турбулентной энергии и от режима течения в целом.

На стенке трубы для скорости жидкости ставятся условия непроницаемости и прилипания:

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta}\nabla\right)\tilde{w}=\vartheta_r,\quad \frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta}\nabla\right)\tilde{u}_x=\vartheta_x,$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial t}+\left(\vec{\vartheta}\nabla\right)\tilde{u}_\theta=v, \qquad (8)$$

где $\tilde{w}$, $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_\theta$ – нормальное, осевое и тангенциальное смещения стенки соответственно; ∇ – оператор Гамильтона.

В силу предположения об осевой симметрии задачи $\tilde{u}_\theta=v_\theta=0$ условие (8) выполняется тождественно. Выпишем полную систему соотношений, описывающих нестационарное течение жидкости в отсутствие массовых сил в трубе с учетом введенных гипотез, исключив ρ с помощью соотношений (1) и (2):

$$-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(2\overline{\mu_1}+\mu_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]- -\overline{\mu_1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial x}-r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)=0;$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r}-\rho_0\frac{\partial v_r}{\partial t}+\left(2\overline{\mu_1}+\mu_2\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]- -\overline{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=0;$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t}-c^2\rho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]+$$
$$+\mu_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)=0. \qquad (9)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}v_x=v_{r'}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{h}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}v_x-$$
$$-\frac{h}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t}v_x+\psi v_r=v_x. \qquad (10)$$

где v, u, ψ – смещения срединной поверхности и угол поворота нормали оболочки.

Связь w, u, ψ дается линеаризированными соотношениями теории оболочек типа Тимошенко (принято $k = 1$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu^2}{Eh}p_x-p_*\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$
$$\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{w}{R^2}+\frac{1-\mu^2}{Eh}q-$$
$$-p_*\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0; \qquad (11)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{6(1-\mu)}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-p_*\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.$$

где ρ_* – плотность; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона для материала оболочки;

$$p_x=\bar{\mu}_1\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right);$$
$$q=-p+2\bar{\mu}_1\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+$$
$$+\mu_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right). \qquad (12)$$

В равенствах (9)...(12) x – продольная, r – радиальная координаты; $\bar{\mu}_1=\mu_1$ – при ламинарном течении; $\bar{\mu}_1=\mu_1+\mu_2$ – при турбулентном течении.

Дополняя соотношения (9)...(12) граничными условиями для жидкости на входе в трубу и на выходе из трубы условиями для перемещений оболочки на торцах и начальными условиями, приходим к корректной смешанной задаче для системы уравнений типа Коши–Ковалевской с граничными условиями высокого порядка.

Перейдем к безразмерным переменным для координат, скоростей, перемещений оболочки и давления:

$$x^*=\frac{x}{R};\quad r^*=\frac{r}{R};\quad t^*=\frac{t}{\tau};\quad \tau=\frac{R}{c};\quad v_x^*=\frac{v_x}{V_x};$$
$$v_r^*=\frac{v_r}{V_r}; \qquad (13)$$
$$u^*=\frac{R}{h^2}u;\quad w^*=\frac{R}{h^2}w;\quad \psi^*=\left(\frac{R}{h}\right)^2\psi;$$
$$p^*=\frac{p}{pcv_x};\quad \eta=\frac{L}{R},$$

где V_x и V_r – соответственно характерные скорости в радиальном и осевом направлениях, например: V_x = max v_x; V_r = max v_r.

Тогда уравнения (9)...(12) имеют вид:

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}-\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*}-Mv_x^*\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}-M\lambda v_r^*\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*}+$$
$$+\left(\frac{2}{\mathrm{Re}_2}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial^2 v_x^2}{\partial x_*^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*}\right)+$$
$$+\lambda\left(\frac{2}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^*v_r^*)}{\partial r^*}\right)=0;$$
$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*}-\frac{\partial v_r^*}{\partial t^*}-Mv_x^*\frac{\partial v_r^*}{\partial x^*}-M\lambda\frac{1}{r^*}v_r^*\frac{\partial(r^*v_r^*)}{\partial r^*}+$$
$$+\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial^2 v_x^2}{\partial r^*\partial x_*^2}+\frac{\lambda}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial^2 v_r^2}{\partial x_*^2}+$$
$$+\lambda\left(\frac{2}{\mathrm{Re}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^*v_r^*)}{\partial r^*}\right)=0;$$
$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*}+\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2 v_x^2}{\partial x^*\partial t^*}+\lambda\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^*v_r^*)}{\partial r^*}+$$
$$+\frac{\lambda}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^*v_r^*)}{\partial r^*}\right)=0;$$
$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+M\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\vartheta_x^*=\lambda\left(\frac{R}{h}\right)^2Mv_r^*;$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t^*}+M\frac{\partial u^*}{\partial x^*}v_x^*+$$
$$+\frac{1}{2}M\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}v_x^*+\lambda M\psi^*v_r^*=\left(\frac{R}{h}\right)^2Mv_x^*; \qquad (14)$$
$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_*^2}-\mu\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+e_1p_x^*-e_2\frac{\partial^2 u^*}{\partial t_*^2}=0;$$
$$\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2}+\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}\right)+\mu\frac{\partial u^*}{\partial x^*}-w^*+e_1q_*-$$
$$-e_2\frac{\partial^{2*}w}{\partial t_*^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_*^2}-6(1-\mu)\left(\frac{R}{h}\right)^2\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+\psi_*\right)-e_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t_*^2}=0;$$

$$p_x^*=\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*}+\lambda\frac{\partial v_r^*}{\partial x^*};$$

$$q^*=2\lambda\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(r^*v_r^*\right)}{\partial r^*}+\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2}\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}+\frac{\lambda}{r^*}\frac{\partial\left(r^*v_r^*\right)}{\partial r^*}\right)-$$

$$-p\,\mathrm{Re}_1,$$

где $e_1=\frac{1-\mu^2}{E}\rho_0 M\frac{c^2}{\mathrm{Re}_1}\left(\frac{R}{h}\right)^3$; $e_1=\rho_* c^2\frac{1-\mu^2}{E}$;

$\mathrm{Re}_1=\frac{\rho_0 cR}{\bar{\mu}_1}$; $\mathrm{Re}_2=\frac{\rho_0 cR}{\mu_2}$; $M=\frac{v_x}{c}$; $\lambda=\frac{v_e}{v_x}$.

Как правило, в напорных трубопроводах $M << 1$, что позволяет искать решения системы (14) в виде разложений в ряды по малому параметру M. Отметим, что погрешность теории оболочек типа Тимошенко имеет порядок $\left(\frac{h}{R}\right)^-$, что для труб с $h = 0{,}001$ м, $R = 0{,}1$ м составляет $\delta\approx 0{,}01$.

Обычно скорость жидкости в напорной трубе по порядку величины составляет 10 м/с, скорость звука в воде – 1500 м/с, поэтому погрешность нулевого приближения метода малого параметра в случае течения жидкости в трубе совпадает с погрешностью теории оболочек типа Тимошенко, следовательно, уравнения (13)...(14) в пределах точности теории оболочек могут быть линеаризованы.

Окончательная линеаризированная система уравнений гидроупругой динамики может быть записана так (звездочки при безразмерных переменных опущены):

$$-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial^2 v_x^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)+$$
$$+\lambda\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)=0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r}-\lambda\frac{\partial v_r}{\partial t}+\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial r}+$$
$$+\lambda\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{\lambda}{\mathrm{Re}_1}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_2}=0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2 v_x^2}{\partial x\partial t}+$$
$$+\lambda\frac{1}{2}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\lambda}{\mathrm{Re}_2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r\partial t}=0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\lambda\left(\frac{R}{h}\right)^2 M\,v_r;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{R}{h}\right)^2 Mv_x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial w}{\partial x}-e_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+e_1 p_x=0;$$

$$\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\mu\frac{\partial u}{\partial x}-w+e_1 q-$$
$$-e_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-6(1-\mu)\left(\frac{R}{h}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-e_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0;$$

$$p_x=\frac{\partial v_x}{\partial r}+\lambda\frac{\partial v_r}{\partial x};$$

$$q=-p\,\mathrm{Re}_1+\frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2}\left(\frac{R}{r}\frac{\lambda}{R}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+$$
$$+2\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}. \qquad (15)$$

Малость конвективного члена в уравнениях (14)...(15) может быть объяснена тем, что он обусловлен деформацией линий тока, вызываемой изменением объема течения и сжимаемостью. Сжимаемость жидкости мала, малы и перемещения оболочки.

В прямолинейных отрезках трубопроводов при соответствующей организации потока обычно $v_r << v_x$, или, что то же самое, $\lambda << 1$. Тогда уравнения (14)...(15) могут быть еще более упрощены.

Предполагая далее, что $\frac{\partial v_x}{\partial t}=0$, $\frac{\partial p}{\partial r}=0$, $v_x=v(x,t)$ и отбрасывая условия непротекания и прилипания, получим:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{2}{\mathrm{Re}_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}_2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial t}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial w}{\partial x} - e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e_1 p_x = 0;$$

$$\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - w + e_1 q -$$

$$-e_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 6(1-\mu)\left(\frac{R}{h}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right) - e_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0;$$

$$p_* = 0; \; q = -\mathrm{Re}_1 p + \frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Сформулируем теперь граничные условия. Для потока в трубе будем считать, что при $t < t_.$ где $t_.$ – момент времени, больший нуля, жидкость равномерно истекает в атмосферу по трубопроводу длиной L с постоянным давлением p_0 и постоянной скоростью v_0, а в момент времени t_1 срабатывает устройство, задающее закон изменения расхода $\widetilde{Q}(t)$. Краевые условия запишем так:

$v(x, 0) = v_0$; $p(x, 0) = p_0$; $w(x, 0) = w_0$; $u(x, 0) = u_0$; $\psi(x, 0) = \psi_0$; $w(0, t) = w(\eta, r) = 0$; $u(0, t) = u(\eta, t) = 0$; (17)

$$\psi(0, t) = \psi(\eta, r) = 0; \; \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$v(0,t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2 \rho_0},$$

где $$Q(t) = \begin{cases} \pi \rho R^2 v_0; & t \le t_1 \\ Q(t). & t_1 < t \end{cases} \qquad (18)$$

Характеристики функции расхода на входном сечении оболочки $x = 0$ существенно зависят от многих факторов, например: от типа перекачивающего устройства, размеров системы и т.п. Поэтому спектральный состав пульсаций скоростей и значения оценок в каждом конкретном конструкционном случае системы требуют дальнейшей детализации и уточнения.

Введем в рассмотрение обобщений вектор, элементами которого являются скорость течения жидкости в оболочке, давление, нормальное, тангенциальное и угловые перемещения:

$$\vec{f} = (v, p, w, u, \psi). \qquad (19)$$

Рассмотрим расчетную область цилиндрической оболочки, расположенную в поле некоторого агрегата, перекачивающего жидкость, с помощью которой осуществляются краевые закрепления оболочки в сечении $x = L$. Очевидно, что в указанной области можно выделить две характерные зоны и провести для каждой спецификацию полей скоростей, давлений, перемещений и напряжений.

Предположим, что все рассматриваемые поля являются стационарными по времени. Тогда в первой зоне мы будем иметь неоднородные по продольной координате поля элементов вектора $\vec{f}$. Во второй зоне будем иметь однородные поля перемещений в силу удаленности этой зоны от краевых закреплений, которые вносят искажения в эти поля.

На основе предложенной спецификации полей представим элементы вектора $\vec{f}$ в виде суммы их соответствующих пульсаций:

$$\vec{f}(x, t) = \left\langle \vec{f}(x, t) \right\rangle + \vec{f}'. \qquad (20)$$

Здесь элементы вектора математических ожиданий $\left\langle \vec{f} \right\rangle$ необходимо определять из системы (16) с граничными и начальными условиями (17). При этом целесообразно использовать преобразование Папакси с последующим численным или аналитическим определением (по Лапласу) и численным выполнением обратного преобразования.

Рассмотрим задачу об определении пространственно-временных перемещений и напряжений в зоне торцевых краевых гидроупругих эффектов. Для этого используем процедуру метода дискретных трансформант Фурье, подробно изложенную применительно к решению линейных задач.

В силу принятых предположений для элементов вектора $\vec{f}$ будет справедливо следующее каноническое разложение:

$$\vec{f}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(k, \omega) \vec{f}(k, \omega, x) e^{i,\omega,t} dk d\omega, \qquad (21)$$

где k, ω – волновое число и частота; $C(k, \omega)$ – дельта-коррелированная функция с известным спектром $S(k, \omega)$ пульсаций скоростей.

Подставляя разложение (21) в систему (16), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно трансформант Фурье скорости, давления и перемещений, которая содержит комплексные коэффициенты. Представим ее решение: $\widetilde{v} = V_r + iV_m$; $\widetilde{p} = p_r + ip_m$; $\widetilde{w} = W_r + iW_m$;

$$\tilde{u} = U_r + iU_m;\ \tilde{\psi} = \psi_r + \psi_m, \qquad (22)$$

где r относится к действительной, а индекс m – к мнимой части соответствующих трансформант.

Приходим к следующей системе:

$$\frac{d^2V_r}{dx^2} = -\frac{\omega}{a_1}V_m - \frac{a_2}{a_1}\frac{d^2V_r}{dx^2} - \frac{1}{a_1\omega}\frac{d^2V_m}{dx^2};$$

$$\frac{d^2V_m}{dx^2} = -\frac{\omega}{a_1}V_r - \frac{a_2}{a_1}\frac{d^2V_m}{dx^2} - \frac{1}{a_1\omega}\frac{d^2V_r}{dx^2};$$

$$\frac{d^2U_m}{dx^2} = \mu\frac{dW_r}{dx} - e_2\omega^2U_r;$$

$$\frac{d^2U_m}{dx^2} = \mu\frac{dW_m}{dx} - e_2\omega^2U_m;$$

$$\frac{d^2W_r}{dx^2} = \frac{d\psi_r}{dx} - \frac{\mu}{b}\frac{dU_r}{dx} + \frac{1-e_2\omega^2}{b}W_r - \frac{(e_1\mathrm{Re}_1 a_2 + b_1)}{b}\frac{dV_r}{dx} - \frac{e_1\mathrm{Re}_1}{b\omega}\frac{dV_r}{dx}; \qquad (23)$$

$$\frac{d^2W_m}{dx^2} = \frac{d\psi_m}{dx} - \frac{\mu}{b}\frac{dU_m}{dx} + \frac{1-e_2\omega^2}{b}W_m - \frac{(e_1\mathrm{Re}_1 a_2 + b_1)}{b}\frac{dV_m}{dx} - \frac{e_1\mathrm{Re}_1}{b\omega}\frac{dV_r}{dx};$$

$$\frac{d^2\psi_r}{dx^2} = b_2\frac{dW_r}{dx^2} + (b_2 - e_2\omega^2)\psi_r;$$

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} = b_2\frac{dW_m}{dx} + (b_2 - e_2\omega^2)\psi_m.$$

Здесь проведено исключение при помощи второго уравнения (16):

$$p_n = -\frac{\omega a_2}{a_1}\frac{dV_r}{dx} - \frac{1}{\omega}\frac{dV_m}{dx};$$

$$p_m = \frac{1}{\omega}\frac{dV_r}{dx} - \frac{\omega a_2}{a_1}\frac{dV_m}{dx}.$$

Система уравнений (23) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестнадцатого порядка, которая решается при фиксированной частоте ω.

1. **Лятхер В. М.** Турбулентность в гидросооружениях. – М.: Энергия, 1968. – 234 с.
2. **Смирнов Д. Н., Зубов Л. Б.** Гидравлический удар в напорных водоводах. – М.: Стройиздат, 1975. – 126 с.
3. **Джеваршейшвили А. Г., Кирмелашвили Г. И.** Определение величин давления гидравлического удара в установках гидромеханизации // Сообщение АН Грузинской ССР. – 1965. – Т.19. – № 2. – С. 403–408.
4. **Вольмир А. С., Грач М. С.** Колебания оболочки с протекающей жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 6. – С. 162–166.
5. **Катаев В. П., Плуталов А. Е.** Динамика трубопроводов с нестационарным потоком жидкости / Прикладная математика и механика: научные труды. – М.: АН СССР, 1985. – Т. 20. – Вып. 3. – С. 131–144.

Материал поступил в редакцию 27.05.10.

Сабодаш Петр Филиппович*, доктор технических наук, профессор*