

Оригинальная статья

УДК 502/504:626.82:691.11

DOI: 10.26897/1997-6011-2022-4-57-62

ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ БЕТОННОЙ СМЕСИ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТКОСА КАНАЛА

ЖАРНИЦКИЙ ВАЛЕРИЙ ЯКОВЛЕВИЧ [✉], д-р техн. наук, профессор
zharnitskiy@mail.ru

КОРНИЕНКО ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ, заведующий лабораторией
kornienko.p.a@mail.ru

СМИРНОВ АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ, канд. техн. наук, доцент
sxodnyasmirnov@mail.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева; 127434, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49, Россия

В оценке гидродинамических параметров бетонных смесей, укладываемых в монолитные облицовки каналов, важнейшим моментом является разработка математических моделей, которые описывают процессы сползания бетонной смеси с учетом динамики снижения скорости и повышения вязкости бетонной смеси во времени. Исследуются основные закономерности гидродинамического многослойного сдвигового течения бетонной смеси на поверхности плоского откоса канала, где многослойный плоскопараллельный вязкий поток движется под действием силы тяжести. Решается краевая задача двухслойного течения бетонной смеси, рассматривается система из двух слоев вязких несжимаемых жидкостей со свойствами каждого соответственно, толщиной придонного и верхнего слоя с учетом скорости скольжения частиц вязкой жидкости, расположенных друг над другом. Полученное аналитическое решение задачи в стационарном режиме сдвигового двухслойного течения двух различных несмешивающихся вязких жидкостей с различными свойствами позволяет сформулировать основные закономерности таких течений и описать процессы сползания многослойной бетонной смеси с учетом динамики снижения скорости и повышения вязкости бетонной смеси во времени. Разработана математическая модель, где отдельно для каждой представлены динамическая и кинематическая структуры многослойного сдвигового течения в обеих вязких слоях.

Ключевые слова: каналы водохозяйственного назначения, гидродинамические параметры бетонной смеси, монолитные бетонные облицовки каналов, двумерный поток бетонной смеси, линейная гидродинамическая модель, граничные условия

Формат цитирования: Жарницкий В.Я., Корниенко П.А., Смирнов П.А. Обоснование математической модели многослойного сдвигового течения бетонной смеси по наклонной поверхности откоса канала // Природообустройство. – 2022. – № 4. – С. 57-62. DOI: 10.26897/1997-6011-2022-4-57-62.

© Жарницкий В.Я., Корниенко П.А., Смирнов П.А., 2022

Original article

SUBSTANTIATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF MULTILAYER SHEAR FLOW OF CONCRETE MIXTURE ALONG THE INCLINED SURFACE OF THE CHANNEL SLOPE

ZHARNITSKIY VALERIY YAKOVLEVICH [✉], doctor of technical sciences, professor
zharnitskiy@mail.ru

KORNIENKO PAVEL ALEKSANDROVICH, head of the laboratory
kornienko.p.a@mail.ru

SMIRNOV ALEKSANDR PETROVICH, candidate of technical sciences, associate professor
sxodnyasmirnov@mail.ru

Russian state agrarian university – MAA named after C.A. Timiryazev; 127434, Moscow, Timiryazevskaya, 49, Russia

In assessing the hydrodynamic parameters of concrete mixtures placed in monolithic channel linings, the most important point is the development of mathematical models that

describe the processes of concrete mixture slippage, taking into account the dynamics of speed reduction and increase in the viscosity of the concrete mixture over time. The main regularities of the hydrodynamic multilayer shear flow of a concrete mixture on the surface of a flat channel slope, where a multilayer plane-parallel viscous flow moves under the action of gravity, are investigated. The boundary value problem of a two-layer flow of a concrete mixture is solved, a system of two layers of viscous incompressible liquids is considered with the properties of each, respectively, the thickness of the bottom and upper layers, taking into account the sliding velocity of particles of a viscous liquid located one above the other. The obtained analytical solution of the problem in the stationary regime of a two-layer shear flow of two different immiscible viscous fluids with different properties makes it possible to formulate the main laws of such flows and describe the processes of sliding of a multilayer concrete mixture, taking into account the dynamics of speed reduction and increase in the viscosity of the concrete mixture over time. A mathematical model has been developed where the dynamic and kinematic structures of a multilayer shear flow in both viscous layers are presented separately.

Keywords: channels for water management, hydrodynamic parameters of concrete mixture, monolithic concrete lining of channels, two-dimensional flow of concrete mixture, linear hydrodynamic model, boundary conditions

Format of citation: Zharnitsky V.Ya., Kornienko P.A., Smirnov P.A. Substantiation of the mathematical model of multilayer shear flow of concrete mixture along the inclined surface of the channel slope // Prirodoobustroystvo. – 2022. – № 4. – S. 57-62. DOI: 10.26897/1997-6011-2022-4-57-62.

Введение. Одна из основных проблем каналов водохозяйственного назначения заключается в повышении их коэффициента полезного действия. Самым эффективным решением этой проблемы является устройство различного рода противофильтрационных одежд: монолитных бетонных и железобетонных; сборных железобетонных; бетоноплочных и грунтоплочных облицовок [1].

Бетонные облицовки каналов, несмотря на сравнительно высокую стоимость, при комплексном сравнении с другими противофильтрационными мероприятиями зачастую оказываются наиболее экономичными. Они надежны и эффективны. Их применяют, чтобы увеличить пропускную способность каналов, сократить объемы земляных работ при уменьшении габаритов канала, защитить от деформации русла и его зарастания.

Монолитные бетонные облицовки каналов, несмотря на сложность их устройства, в сравнении со сборными чаще всего оказываются наиболее экономичным решением.

В оценке гидродинамических параметров бетонных смесей, укладываемых в монолитные облицовки каналов, важнейшим моментом является разработка математических моделей, которые описывают процессы сползания бетонной смеси с учетом динамики снижения скорости и повышения вязкости бетонной смеси во времени [2-7].

Материалы и методы исследований. Исследуются основные закономерности гидродинамического многослойного сдвигового течения бетонной смеси на поверхности плоского откоса канала (рис.).

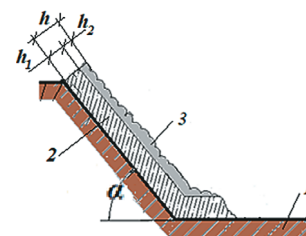


Рис. Схема многослойного сдвигового течения бетонной смеси на поверхности плоского откоса канала:

- 1 – профиль русла канала;
- 2 – зона с постоянной скоростью течения;
- 3 – зона течения с повышенными скоростями;
- α – угол заложения откоса

Fig. Scheme of the multilayer shear flow of the concrete mixture on the surface of the flat slope of the channel:

- 1 – channel bed profile; 2 – a zone with a constant flow rate;
- 3 – flow zone with increased speeds; α – the angle of the slope

В силу шероховатости поверхности откоса в ее плоскости вязкий поток тормозится и поэтому формируется зона с относительно постоянной скоростью течения. Над этой зоной формируется другая – зона течения с повышенной скоростью частиц. В результате образуется сложная кинематическая структура потока [8-10].

В общем виде рассматривается поток, состоящий из плоскопараллельных слоев несмешивающихся жидкостей.

Многослойный плоскопараллельный вязкий поток движется под действием силы тяжести. Свойства материалов многослойного сдвигового потока характеризуются плотностями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots, \rho_m$, динамическими вязкостями $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots, \eta_m$, глубиной $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots, h_m$. Геометрические

и физико-механические параметры отдельных слоев соответствуют бетонным смесям.

Результаты и их обсуждение. Предположим, что плоское двумерное движение системы m слоев вязких несмешивающихся жидкостей, помещенных в поле силы тяжести, описывается уравнениями для каждого:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g \cdot \sin \alpha &= \rho \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g \cdot \cos \alpha &= \rho \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

К этой системе уравнений необходимо присоединить условие несжимаемости двумерного потока бетонной смеси

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Тогда для первого слоя эта система 3-х дифференцированных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta_1 \left(\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial z^2} \right) + \rho_1 \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \rho_1 \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \eta_1 \left(\frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z^2} \right) - \rho_1 \cdot g \cdot \cos \alpha \\ \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial x^2} &= 0 \\ 0 < z < h_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

Движение вязкой жидкости во втором слое описывается системой линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial v_{x2}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta_{21} \left(\frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial z^2} \right) + \rho_2 \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \rho_2 \frac{\partial v_{z2}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \eta_2 \left(\frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial z^2} \right) - \rho_{12} \cdot g \cdot \cos \alpha \\ \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{z2}}{\partial z^2} &= 0 \\ h_1 < z < h_1 + h_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ. \end{aligned} \quad (4)$$

В верхнем слое с учетом свободной границы эта система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial v_{xm}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_m}{\partial x} + \eta_m \left(\frac{\partial^2 v_{xm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{xm}}{\partial z^2} \right) + \rho_m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ \rho_m \frac{\partial v_{zm}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_m}{\partial z} + \eta_m \left(\frac{\partial^2 v_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{zm}}{\partial z^2} \right) - \rho_{1m} \cdot g \cdot \cos \alpha \\ \frac{\partial^2 v_{xm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{zm}}{\partial z^2} &= 0 \\ h_1 + h_2 + \dots + h_{m-1} < z < h_1 + h_2 + \dots + h_m, \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ. \end{aligned} \quad (5)$$

На внутренних плоскостях контакта различных несмешивающихся жидкостей с различными свойствами выполняются граничные условия, выражающие равенство кинематических и динамических параметров потока вязких жидкостей:

$$\begin{aligned} v_{xk} &= v_{x,k+1}, \quad v_{zk} = v_{z,k+1}, \quad \sigma_{zk} = \sigma_{z,k+1} \\ z &= z_k = h_1 + h_2 + \dots + h_{k1}, \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.4) \quad (6)$$

На наружных плоскостях, ограничивающих многослойный поток вязкой жидкости, формируются следующие краевые условия.

В точках свободной поверхности действует только атмосферное давление, поэтому граничные условия записываются как

$$\begin{aligned} \sigma_{zm} &= -p_o, \quad \tau_{zxm} = 0, \\ z &= h_1 + h_2 + \dots + h_m, \end{aligned} \quad (7)$$

где $z = \sum_{i=1}^m h_i$ – положение свободной поверхности.

Нижняя плоскость $z = 0$ сжимается плоскостью с шероховатой поверхностью, в точках которых в ноль обращаются скорости частиц (выполняются граничные условия прилипания):

$$v_{x1} = 0, \quad v_{z1} = 0, \quad z = 0 \quad (3.6) \quad (8)$$

Начальные условия не рассматриваются.

Системы линейных дифференцированных второго порядка с постоянными коэффициентами (3)...(5), описывающие сдвиговое течение внутри каждого из m слоев могут быть проинтегрированы как для стационарных, так и переходных процессов, возникающих при движении вдоль откосов бетонной смеси и определенной устойчивости облицовок земляных русел каналов.

Для решения краевой задачи двухслойного течения бетонной смеси рассматривается система из двух слоев вязких несжимаемых жидкостей со свойствами ρ_1, η_1 и ρ_2, η_2 соответственно; толщина придонного слоя – h_1 , а толщина верхнего слоя – h_2 (рис.); v_{x2} и v_{x1} – скорости скольжения частиц вязкой жидкости, расположенных друг над другом.

Используются только системы дифференцированных уравнений (3) и (4), дополненные следующими граничными условиями на внутренней границе $z = h_1$, разделяющей оба несмешивающихся потока:

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z1}, \quad v_{x1} = v_{x2}, \quad v_{z1} = v_{z2}, \quad z = h_1 \quad (3.7) \quad (9)$$

Режим контактного взаимодействия вязкой жидкости с шероховатым наклонным основанием сводится к заданию граничных условий примыкания частиц жидкости к шероховатой плоскости:

$$v_{x1} = 0, \quad v_{z1} = 0, \quad z = 0 \quad (3.8) \quad (10)$$

На свободной поверхности действует только атмосферное давление, следовательно, граничные условия записываются как

$$\sigma_{z2} = -p_o, \quad \tau_{zx2} = 0, \quad z = h_1 + h_2 \quad (3.9). \quad (11)$$

Переходим к исследованию сдвигового течения двух несмешивающихся жидкостей постоянной глубины h_1 и h_2 с физическими параметрами ρ_1, ρ_2 и η_1, η_2 . Кинематическая структура двухслойного сдвигового вязкого потока строится на базе следующих допущений.

Течение происходит с весьма малыми скоростями, и их изменение тоже мало. Это предположение позволяет пренебрегать силами инерции в уравнениях (3) и (4), то есть

$$\rho_1 \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} = 0; \quad \rho_1 \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} = 0; \quad (12)$$

$$\rho_2 \frac{\partial v_{x2}}{\partial t} = 0; \quad \rho_2 \frac{\partial v_{z2}}{\partial x} = 0;$$

Принимается, что поперечные компоненты векторов скорости сдвигового потока обращаются в ноль:

$$v_{z1} = 0, \quad v_{z2} = 0. \quad (13)$$

А составляющие v_{x1}, v_{x2} зависят только от переменной z :

$$0 < z < h_1, \quad h_1 < z < h_1 + h_2.$$

Тогда придонное течение описывается следующей системой неоднородных дифференцированных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\eta_1 \frac{d^2 v_{x1}}{dz^2} + \dots + \rho_1 \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dp_1}{dz} + \rho_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad 0 < z < h_1.$$

В верхнем слое эти уравнения принимают вид:

$$\eta_2 \frac{d^2 v_{x2}}{dz^2} + \rho_{21} \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dp_{21}}{dz} + \rho_{21} \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ \quad h_1 < z < h_1 + h_2.$$

К уравнениям линейной гидродинамической модели (14) и (15) следует присоединить граничные условия: на поверхности $z = h_1$, разделяющей два потока вязкой жидкости и на наружных поверхностях $z = 0; z = h_1 + h_2 = h$.

На поверхности контакта $z = h_1$ двух движущихся несмешивающихся вязких жидкостей

выполняются следующие силовые и кинематические граничные условия:

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad v_{x1} = v_{x2}, \quad z = h_1. \quad (16)$$

Сдвиговое течение в придонном слое $0 < z < h$ по основанию в режиме их контактного взаимодействия с трением сводится к граничному условию «прилипания» частиц к шероховатому основанию откоса:

$$\tau_{zx1} \neq, \quad v_{x1} = 0, \quad z = 0 \quad (3.15). \quad (17)$$

Касательное напряжение τ_{zx1} в точках шероховатости основания $z=0$ отлично от нуля и зависит от степени неровностей опорной стенки (основания).

Во всех точках свободной поверхности $z = h_1 + h_2 = h$ действует атмосферное давление, поэтому граничные условия записываются как

$$\tau_{z2} = -p_o, \quad \tau_{zx2} = 0, \quad z = h_1 + h_2 \quad (3.16). \quad (18)$$

Интегрируем систему обыкновенных дифференцированных уравнений (14). Ее общее решение, выраженное через три произвольные постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3 , представляется в виде:

$$\frac{dv_{x1}}{dz^2} = -\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \Rightarrow \frac{dv_{x1}}{dz} = -\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot z + c_1$$

$$\frac{dp_1}{dz} = -\rho_1 g \cdot \cos \alpha \Rightarrow p_1(z) = -\rho_1 g \cdot \cos \alpha \cdot z + c_3 \quad (19)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -p \quad \tau_{zx} = \eta \cdot \frac{dv_x}{dz}$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{z1} = -p(z),$$

$$\tau_{zx1} = \eta_1 \cdot \left(-\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot z + c_1 \right) = -\rho_1 g \cdot \sin \alpha \cdot z + \eta_1 \cdot c_1.$$

В приповерхностном слое $h_1 < z < h$ общее решение записывается в аналогичном виде (D_1, D_2, D_3 – произвольные постоянные интегрирования):

$$\frac{dv_{x2}}{dz} = -\frac{\rho_2 g \cdot \sin \alpha}{\eta_2};$$

$$v_{x2} = -\frac{\rho_2 g \cdot \sin \alpha}{\eta_2} \cdot \frac{z^2}{2} + D_{1z}, \quad (20);$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_2 g \cdot \cos \alpha \Rightarrow p_2(z) = -\rho_2 g \cdot \cos \alpha \cdot z + D_3$$

$$\sigma_{x2} = \sigma_{z2} = -p_2(z), \quad \tau_{zx2} = \eta_2 \cdot \left(-\frac{\rho_2 g \cdot \sin \alpha \cdot z}{\eta_2} + D_1 \right);$$

$$-\rho_2 gh \cdot \cos \alpha + D_3 = -p_o, \quad -\rho_2 gh \cdot \sin \alpha + \eta_2 + D_1 = 0$$

$$D_3 = -p_o + \rho_2 gh \cdot \cos \alpha \quad D_1 = \frac{\rho_2 gh \cdot \sin \alpha}{\eta_2}.$$

Граничное условие на шероховатой наклонной плоскости (17) дает

$$-\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot \frac{0}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Граничные условия на поверхности контактного взаимодействия $z=h$ двух разнородных вязких жидкостей (с различными свойствами) дают уравнения:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \eta \cdot \frac{dv_x}{dz} & \tau_{zx1} &= \tau_{zx2} \\ \rho_1 g \cdot \cos \alpha - c_3 &= \rho_2 g h_1 & \cos \alpha &= D_3 \\ \eta_1 \cdot \left(-\frac{\rho_1 g h_1 \cdot \sin \alpha}{\eta_1} + c_1 \right) &= \eta_2 \cdot \left(-\frac{\rho_2 g h_1 \cdot \sin \alpha}{\eta_2} + D_1 \right) \\ -\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot \frac{h_1^2}{2} + c_1 \cdot h_1 + c_2 &= & (21) \\ = -\frac{\rho_2 g \cdot \sin \alpha}{\eta_2} \cdot \frac{h_1^2}{2} + D_1 \cdot h_1 & (3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 g h_1 \cdot \cos \alpha - \rho_2 g h_1 \cdot \cos \alpha &= c_3 - D_3 \\ (\rho_1 - \rho_2) \cdot g h_1 \cdot \cos \alpha &= c_3 - D_3 \\ c_3 &= D_3 + (\rho_1 - \rho_2) \cdot g h_1 \cdot \cos \alpha \\ c_3 &= -p_o + \rho_2 \cdot g h \cdot \cos \alpha + (\rho_1 - \rho_2) \cdot g h_1 \cdot \cos \alpha \\ c_3 &= -p_o + g \cdot (\rho_2 \cdot (h - h_1) + \rho_1 \cdot h_1) \cdot \cos \alpha \\ c_3 &= -p_o + g \cdot (\rho_1 \cdot h_1 + \rho_2 \cdot (h - h_1)) \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку D_2 не влияет на скорости частиц, произвольная постоянная интегрирования D_2 равна нулю, так как эта постоянная не влияет на определение динамических напряжений $p_2(z)$ и τ_{zx2} в верхнем слое вязкой жидкости. Она представляет собой скорость потока вниз как единого целого (твердого тела).

Постоянные интегрирования c_2 и D_2 не влияют на относительную скорость частиц двухслойной вязкой среды, поэтому их можно приравнять к нулю, то есть $c_2 = D_2 = 0$.

Уравнение системы (18) решаем относительно произвольной постоянной интегрирования c_1 :

$$c_1 \cdot h_1 = \frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot \frac{h_1^2}{2} - \frac{\rho_2 g \cdot \sin \alpha}{\eta_2} \cdot \frac{h_1^2}{2} + D_1 \cdot h_1.$$

Сокращаем его на множитель h_1 и получаем

$$c_1 = g \sin \alpha \cdot \left(\frac{h_1}{2} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} - \frac{\rho_2}{\eta_2} \right) + \frac{\rho_2}{\eta_2} h \right). \quad (23)$$

Если физические свойства обеих вязких слоев одинаковы, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, то эта формула значительно упрощается:

$$c_1 = \frac{\rho g h \cdot \sin \alpha}{\eta} \quad (3.19). \quad (24)$$

Следовательно, частные решения граничной задачи для сдвигового двухслойного вязкого течения в поле силы тяжести выражаются следующими аналитическими зависимостями:

$$\begin{aligned} v_{x1}(z) &= -\frac{\rho_1 g \cdot \sin \alpha}{\eta_1} \cdot \frac{z^2}{2} + \\ &+ g \cdot z \cdot \left(\frac{h_1}{2} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} - \frac{\rho_2}{\eta_2} \right) + \frac{\rho_2}{\eta_2} \cdot (h_1 + h_2) \right) = \\ &= g \cdot \sin \alpha \cdot z \cdot \left[-\frac{\rho_1 \cdot z}{2\eta_1} + \frac{h_1}{2} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} - \frac{\rho_2}{\eta_2} \right) + \frac{\rho_2}{\eta_2} \cdot (h_1 + h_2) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p_1(z) &= -\rho_1 g \cdot \cos \alpha + c_3 = \\ &= -\rho_1 g \cdot \cos \alpha \pm p_o + g \cdot (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \cdot \cos \alpha; \\ p_1(z) &= -p_o - \rho_1 g z \cdot \cos \alpha + g \cdot (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \cdot \cos \alpha = \\ &= -p_o - g \cdot \cos \alpha \cdot (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 - \rho_1 z) \\ &0 < z < h_1, \end{aligned} \quad (26)$$

Если физический облик слоёв одинаков, то есть $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то выражение для давления $p_1(z)$ представляется как

$$\begin{aligned} p_1(z) &= -p_o - \rho g z \cdot \cos \alpha + \rho g h \cdot \cos \alpha = \\ &= -p_o + \rho g \cdot \cos \alpha \cdot (h - z). \end{aligned} \quad (27)$$

Величина касательного напряжения τ_{zx1} в придонном слое вязкой жидкости – соответственно

$$\tau_{zx1}(z) = g \cdot \left[-\rho_1 z + \frac{h_1}{2} \cdot \left(\rho_1 - \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \rho_2 \right) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \rho_2 \cdot h \right] \cdot \sin \alpha. \quad (28)$$

Если физические свойства вязких жидкостей в обоих слоях одинаковы $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, то это касательное напряжение принимает вид:

$$\tau_{zx1}(z) = g \cdot [-\rho z + \rho h] \cdot \sin \alpha = \rho \cdot (h - z) \cdot \sin \alpha. \quad (29)$$

Кинематические и динамические характеристики верхнего слоя вязкой жидкости определяются соответственно, то есть

• скорость потока при $h_1 < z < h$ по формуле:

$$v_{x2} = \frac{\rho_2 g \cdot z}{\eta_2} \cdot \left(h - \frac{z}{2} \right) \cdot \sin \alpha; \quad (30)$$

• гидродинамическое давление в приповерхностном слое – из выражения:

$$p_2(z) = -p_o - \rho_2 g \cdot (h - z) \cdot \cos \alpha; \quad (31)$$

• касательное напряжение, которое линейно вырастает с глубиной, для $h_1 < z < h$ вычисляется как

$$\tau_{zx2} = \rho_2 g \cdot (h - z) \cdot \sin \alpha, \quad h_1 \leq z \leq h. \quad (3.25) \quad (32)$$

Тогда динамическая и кинематическая структуры многослойного сдвигового течения в обеих вязких слоях отдельно можно представить в виде следующей математической модели:

$$v_{x1}(z) = gz \cdot \left[\frac{h_1}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) + \frac{1}{v_2} \cdot (h_1 + h_2) - \frac{z}{2 \cdot v_1} \right] \cdot \sin \alpha, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (3.26)$$

$$p_1(z) = p_0 + g \cdot (\rho_1 \cdot (h_1 - z) + \rho_2 \cdot h_2) \cdot \cos \alpha, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (3.27) \quad (33)$$

$$\tau_{zx1}(z) = g \cdot \left[\frac{\rho_1 v}{v_2} \cdot h + \frac{h_1}{2} \cdot \left(\rho_1 - \frac{v_1}{v_2} \cdot \rho_2 \right) - p_1 z \right] \cdot \sin \alpha, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (3.28)$$

$$v_{x2}(z) = \frac{\rho_2 gz}{\eta_2} \cdot \left(h - \frac{z}{2} \right) \cdot \sin \alpha, \quad h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \quad (3.29)$$

$$p_2(z) = p_0 + g \cdot \rho_2 \cdot (h - z) \cdot \cos \alpha, \quad h_1 \leq z \leq h_1 + h_2 \quad (3.30) \quad (34)$$

$$\tau_{zx2}(z) = \rho_2 g \cdot (h - z) \cdot \sin \alpha, \quad h_1 \leq z \leq h_1 + h_2. \quad (3.31)$$

Выводы

Полученное аналитическое решение задачи в стационарном режиме сдвигового двухслойного течения двух различных несмешивающихся вязких жидкостей с различными свойствами

позволяет сформулировать основные закономерности таких течений и описать процессы сползания многослойной бетонной смеси с учетом динамики снижения скорости и повышения вязкости бетонной смеси во времени.

Библиографический список

1. Обеспечение безопасности и надежности низконапорных гидротехнических сооружений: монография / В.Н. Шедрин, Ю.М. Косиченко, Д.В. Бакланова, и др. – Новочеркасск: РосНИИПИМ, 2016. – 283 с.
2. Стрелков Г.П. Некоторые вопросы природы ползучести бетона: Автореф. ... канд. техн. наук / Харьковский инженерно-строительный институт. – Харьков, 1968. – 16 с.
3. Корниенко П.А., Прозоровский А.Г., Сабодаш П.Ф. Об учете массовых сил в расчетах плоско-параллельного слоя бетонной смеси на наклонном грунтовым массиве: Материалы научно-технической конференции, 18-21 апреля 2000 г. – М.: МГУП, 2000. – С. 93-94.
4. Борделяну Г.В. Экспериментально-статистические исследования деформаций ползучести заводского бетона с построением математических моделей второго порядка для их вычисления и прогнозирования: Автореф. ... канд. техн. наук / Кишиневский политехнический институт им. С. Лазо. – Кишинев, 1974. – 23 с.
5. Васильев Л.И. Некоторые вопросы ползучести бетона. – Л., 1974.
6. Галустов К.З. Двухкомпонентная теория. Развитие и уточнение теории ползучести бетона: Автореф. ... д-ра техн. наук. – М., 1980. – 35 с.
7. Карапетян К.С. Экспериментальное исследование ползучести бетона. – Ереван, 1966.
8. Жарницкий В.Я., Корниенко П.А. Обоснование линейной математической модели сдвигового течения бетонной смеси под действием силы тяжести по наклонной поверхности откоса // Природообустройство. – 2020. – № 1. – С. 88-93.
9. Жарницкий В.Я., Корниенко П.А. Экспериментальные исследования безвибрационного метода укладки бетонной смеси в облицовках каналов // Природообустройство. – 2021. – № 3. – С. 88-94.
10. Жарницкий В.Я., Корниенко П.А. Кинетика гидратации цемента, пластическая прочность бетона облицовки канала и ее термонапряженное состояние // Природообустройство. – 2021. – № 5. – С. 85-90.

Критерии авторства

Жарницкий В.Я., Корниенко П.А., Смирнов П.А. выполнили практические и теоретические исследования, на основании которых провели обобщение и написали рукопись. Жарницкий В.Я., Корниенко П.А., Смирнов П.А. имеют на статью авторское право и несут ответственность за плагиат.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов.

Статья поступила в редакцию 29.05.2022

Одобрена после рецензирования 12.09.2022

Принята к публикации 19.09.2022

References

1. Obespechenie bezopasnosti i nadezhnosti nizkonapornykh gidrotehnicheskikh sooruzhenij / Shchedrin V.N., Kosichenko Yu.M., Baklanova D.V., Baev O.A., Mikhailov E.D. / Monografiya. – Novocherkassk: RosNIIPM, 2016. – 283 s.
2. Strelkov G.P. Nekotorye voprosy prirody polzuchesti betona [Tekst]: Avtoreferat dis. na soiskanie uchenoj stepeni kand. tehn. nauk. / Khark. inzh. – stroit. in-t. – Kharkov: 1968. – 16 s.
3. Kornienko P.A., Prozorovsky A.G., Sabodash P.F. Ob uchete massovykh sil v raschetah plosko – parallelnogo sloya betonnoj smesi na naklonnom gruntovom massive. Mat-ly nauchno-tehn. konf. 18-21 aprelya 2000. – M.: MGUP, 2000. – S. 93-94.
4. Bordelyanu G.V. Experimentalno-statisticheskie issledovaniya deformatsij polzuchesti zavodskogo betona s postroeniem matematicheskikh modelej vtorogo porjadka dlya ih vychisleniya i prognozirovaniya [Tekst]: Avtoreferat dis. na soiskanie uchenoj stepeni kand. tehn. nauk. / Kishinev. politehn. in-t im. S. Lazo. – Kishinev, 1974. – 23 s.
5. Vasiljev L.I. Nekotorye voprosy polzuchesti betona. – L.: 1974.
6. Galustov K.Z. Dvuhkomponentnaya teoriya. Razvitiye i utochnenie teorii polzuchesti betona. Avtoref. dis. doktora. tehn. nauk. – M.: 1980. – 35 s.
7. Karapetyan K.S. Experimentalnoe issledovanie polzuchesti betona. – Yerevan: 1966.
8. Zharnitsky V.Ya., Kornienko P.A. Obosnovanie linejnoj matematicheskoy modeli sdvigovogo techeniya betonnoj smesi pod dejstviem sily tyazhesti po naklonnoj poverhnosti otkosa / Prirodoobustrojstvo. – 2020. – № 1. – S. 88-93.
9. Zharnitsky V.Ya., Kornienko P.A. Experimentalnye issledovaniya bezvibratsionnogo metoda ukkladki betonnoj smesi v oblitsovkah kanalov // Prirodoobustrojstvo. – M. – 2021. – № 3. – S. 88-94.
10. Zharnitsky V.Ya., Kornienko P.A. Kinetika gidratatsii tsementa, plasticheskaya prochnost betona oblitsovki kanala i ee termonapryazhennoe sostoynie // Prirodoobustrojstvo. – 2021. – № 5. – S. 85-90.

Criteria of authorship

Zharnitsky V.Ya., Kornienko P.A., Smirnov A.P. carried out theoretical studies, on the basis of which they generalized and wrote the manuscript. have a copyright on the article and are responsible for plagiarism.

Conflict of interests

The authors state that there are no conflicts of interests

The article was submitted to the editorial office 29.05.2022

Approved after reviewing 12.09.2022

Accepted for publication 19.09.2022