

УДК 502/504:551.461

**И. А. КОЖЕВНИКОВА**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва

**В. И. ШВЕЙКИНА**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт водных проблем Российской академии наук, г. Москва

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ КАСПИЙСКОГО МОРЯ**

*Рассматриваемая статья посвящена моделированию колебаний уровня Каспия. В начале статьи дается обоснование использования нелинейных методов, которое опирается на теплофизические достижения современной науки. Основной вывод этой части заключается в том, что для Каспийского моря характерна не только внешняя непредсказуемость, создаваемая климатическими изменениями, но и внутренняя, обусловленная неустойчивой нелинейной динамикой водного баланса. Затем приводится нелинейная стохастическая модель колебаний уровня моря, основой которой является автономное нелинейное дифференциальное уравнение. Проведен тщательный анализ остаточной последовательности с использованием методов спектрального анализа, в результате которого определены и выделены полигармонические составляющие. В итоге получена стохастическая модель, чья адекватность исходным данным доказана с помощью современных статистических методов. Моделированные траектории, полученные с помощью построенной модели, переходят от одного устойчивого уровня к другому, не выходя за пределы максимального и минимального значений исходного ряда. Далее в статье приведен пример моделирования колебаний уровня Каспийского моря с помощью линейной модели, основанной на авторегрессии 1-го порядка. Моделированные таким образом траектории постепенно с течением времени могут принимать сколь угодно большие значения и имеют только один устойчивый уровень, равный начальному значению. Прогноз на основе подобных моделей даст именно то значение, с которого начинается моделирование. Такие модели могут быть использованы для прогноза только на 1 год вперед. Основной вывод статьи заключается в следующем. Для получения более долгосрочных прогнозов уровня Каспийского моря необходимо использовать нелинейные модели, пример которых приведен в статье.*

*Нелинейная стохастическая модель, регрессионный и спектральные анализы, авторегрессия 1-го порядка, случайное блуждание, устойчивое состояние.*

*The article is devoted to the simulation of fluctuations of the Caspian sea level. At the beginning of the article there is given a substantiation of the use of nonlinear methods which relies on the thermal physical achievements of the modern science. The main conclusion of this part is that for the Caspian sea not only the external unpredictability created by climatic changes is characteristic but also internal due to the unstable nonlinear dynamics of the water balance. Then follows a nonlinear stochastic model of sea level fluctuations based on the nonlinear autonomous differential equation. A thorough analysis of the residual sequence was performed using the methods of spectral analysis resulted in determination and identification of polyharmonic components. This resulted in the stochastic model which adequacy to the initial data is proved by means of modern statistical methods. The simulated trajectories obtained using the constructed model move from one stable level to another without going beyond the maximum and minimum values of the initial series. Further in the article there is given an example of fluctuations simulation of the Caspian sea level using a linear model based on auto regression of the 1st order. The simulated in such a way trajectories gradually in the course of time can take any large values and have only one stable level equal to the initial value. The forecast on the basis of such models will give exactly the value with which modeling starts. Such models can be used to predict only for 1 year ahead. The main conclusion of the article is as follows. For more long-term forecasts of the Caspian sea level it is necessary to use nonlinear models such as those presented in the article.*

*Nonlinear stochastic model, regression and spectral analyses, autoregressive of the 1st order, random walk, stable state.*

Уровенный режим Каспийского моря всегда отличался неустойчивостью. Только в прошлом столетии наблюдалось два экстремальных явления в многолетнем ходе уровня моря: продолжительное падение с 1930 по 1977 гг. на 3,2 м и вслед за этим продолжительный подъем с 1978 по 1995 гг. почти на 2,5 м. В настоящее время уже более 25 лет уровень моря колеблется около значения –27 м абс. Приблизительно 100 лет уровень находился на отметке –26 м абс. и около 40 лет на отметке –28 м абс. Причиной резкого и порой катастрофического изменения уровня моря, по мнению авторов, является неустойчивость системы «море – атмосфера – суша».

В рамках теории, предложенной С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем в 1946 г., единственным механизмом, управляющим уровенным режимом, считается механизм отрицательной обратной связи: при повышении уровня площадь зеркала испарения увеличивается, что заставляет уровень вернуться к исходному положению. Однако этот механизм не является единственным. В. И. Найденов показал, что главную роль в образовании неустойчивости водного баланса Каспия играет испарение с мелководий, занимающих треть площади моря [1].

По современным теплофизическим представлениям, у свободной поверхности воды образуется очень тонкий слой паровоздушной смеси, в котором концентрация водяных паров экспоненциально увеличивается с ростом температуры. Ввиду нелинейной зависимости влагосодержания от температуры среднегодовая величина слоя испарения оказывается не только функцией среднегодовой температуры поверхности, но и амплитуды температурных колебаний. Расчеты показывают, что скорость испарения – сильно возрастающая нелинейная функция этой амплитуды. Амплитуда температурных колебаний – убывающая функция глубины моря. Эта зависимость способна генерировать тепловую неустойчивость: уменьшение глубины водоема способствует росту его прогрева в летнее время, увеличению испарения и дальнейшему прогрессирующему уменьшению глубины.

Кроме этого, существует еще один тепловой механизм неустойчивости

испарения, но уже с поверхности водосбора Каспия. Уменьшение континентальности климата ведет к пониженному испарению с поверхности суши из-за низких летних температур. Но уменьшение испарения увеличивает влагозапас почвы, что еще больше понижает летние температуры и т. д.

Такая положительная обратная связь приводит к тепловой неустойчивости испарения. Проведенные В. И. Найденовым теоретические исследования позволили выдвинуть следующую гипотезу. В достаточно широком диапазоне испарение может уменьшаться с ростом влагозапаса, так как значительная часть солнечного тепла будет уходить не только на испарение, но и на нагрев увеличивающегося объема воды. Физически это означает, что при определенном запасе влаги речной бассейн может прогрессирующе накапливать воду при неизменном количестве осадков.

Таким образом, для Каспийского моря характерна не только внешняя непредсказуемость, создаваемая климатическими изменениями, но и внутренняя, обусловленная неустойчивой нелинейной динамикой водного баланса. Полиmodalность уровня Каспия приводит к практически непредсказуемому его поведению и опрокидывает прогнозы, выполненные на основе линейных моделей водного баланса. Также несостоятельными будут любые прогнозы, основанные на всевозможных корреляциях уровня с климатическими процессами или даже с колебаниями солнечной активности. Однако именно такие методы используются в настоящее время для прогноза уровня Каспийского моря [2]. В оперативной практике официально используется метод, использующий корреляцию, т. е. только линейную зависимость, между уровнем моря и индексами атмосферной циркуляции. Такой метод позволяет составлять прогнозы помесячного хода уровня моря с годовой заблаговременностью. При этом, ежегодно, добавляя данные последнего года, параметры прогностического уравнения пересчитываются. Перейти на качественно иной уровень моделей можно, только используя нелинейные методы описания процесса колебаний уровня моря.

**Нелинейная стохастическая модель колебаний уровня Каспия.** Подобные

модели начали разрабатываться в Институте водных проблем РАН с 1992 г. [3]. В то время оценка плотности вероятностей (нормированная гистограмма) для годовых данных по городу Баку за 169 лет показала, что Каспий имеет два устойчивых уровня и один неустойчивый. Однако с течением времени в колебаниях уровня моря возник третий устойчивый уровень. На это указывает гистограмма, построенная для среднемесячных наблюдений в городе Махачкала с 1900 по 2011 гг. Полученная более 20 лет назад стохастическая модель колебаний уровня моря в настоящее время нуждается в корректировке. Как и прежде в качестве модели рассмотрено автономное дифференциально-разностное уравнение со случайной вынуждающей силой:

$$\Delta H = \varphi(H) + \varepsilon(t),$$

где  $H$  – уровень моря;  $\Delta H$  – приращения уровня моря;  $\varphi(H)$  – некоторая функция уровня, задаваемая исследователем и называемая регрессией;  $\varepsilon(t)$  – случайная вынуждающая сила.

Основу модели составляет связь приращений уровня моря с самим уровнем  $\varphi(H)$ , которую авторы нашли в виде полинома 9-ой степени, имеющего вид:

$$\varphi(Z) = 0,00067 - 0,02563Z - 0,05055Z^2 + 0,3512Z^3 + 0,2849Z^4 - 1,3749Z^5 - 0,4676Z^6 + 2,0107Z^7 - 0,2252Z^8 - 1,0063Z^9,$$

при этом  $Z(t)$  – нормированные стандартным образом значения колебаний уровня моря. Искомая модель принимает вид:

$$Z(t+1) - Z(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i Z(t)^i + \gamma^{(k)}(t), \quad (1)$$

где  $k$  – порядок полинома, равный 9;  $\alpha_i$  – неизвестные коэффициенты полинома, которые оцениваются по статистическому ряду наблюдений;  $\gamma^{(k)}(t)$  – остаточная последовательность, характеризующая действие случайной вынуждающей силы.

Порядок полинома выбирается из условия минимума остаточной суммы квадратов. Кроме того, будем пока рассматривать полиномы, задающие устойчивую динамическую систему, для которой производная полинома для наименьшего и наибольшего корней отрицательна. Такие полиномы имеют нечетный порядок и задают систему, которая начинается с устойчивого состояния и заканчивается с устойчивым состоянием. Полученная регрессия имеет 5 действительных корней, из них устойчивым состоянием равновесия соответствуют значения:  $H_1 = -28,3169$ ,  $H_3 = -27,1818$ ,  $H_5 = -25,9764$ ;

неустойчивым –  $H_2 = -27,7553$  и  $H_4 = -26,4060$  м абс.

**Полигармоническое отбеливание.** Вычитая из приращений нормированных среднемесячных колебаний уровня моря значения, удовлетворяющие уравнению автономной регрессии, получаем остаточную последовательность  $\gamma^{(9)}(t)$ . Оценка корреляционной функции для  $\gamma^{(9)}(t)$  имеет размах, который превышает 0,4, временами достигая 0,45, и сохраняется на протяжении всей области определения корреляционной функции. Этот факт, несмотря на сравнительно малую остаточную сумму квадратов, свидетельствует о том, что в остаточной последовательности содержится неиспользованная информация.

Исследование периодограммы [4] остаточной последовательности показало наличие в ней периодических составляющих с частотами 0,083, 0,167 и 0,25. Нелинейная регрессия удалила из исходных данных полиномиальный тренд, сохранив все периодические составляющие. Для выделения периодической составляющей из остаточной последовательности проводим «полигармоническое отбеливание», при котором составляющая представляется в виде тригонометрического полинома [4]. Используя аддитивную схему, представим остаточную последовательность автономной нелинейной регрессии 9-го порядка  $\gamma^{(k)}(t)$ , в дальнейшем обозначаемую  $\varepsilon(t)$ , в виде суммы периодической составляющей и вновь полученной остаточной последовательности:

$$\varepsilon(t) = A_m(t) + \varepsilon_0(t),$$

при этом предполагается, что периодическая составляющая состоит только из синусоидальных компонент [4].

$$A_m(t) = A + \sum_{j=1}^m [A_j \cos(2\pi v_j t) + B_j \sin(2\pi v_j t)], \quad (2)$$

где  $v_j$  – частота скрытой периодичности;  $j = 1, 2, \dots, m$ , – число периодических компонент временного ряда, которое априори неизвестно, причем  $m \ll$  длины выборки;  $\varepsilon(t)$  – исходная остаточная последовательность, полученная для нелинейной регрессии 9-го порядка;  $\varepsilon_0(t)$  – остаточная последовательность, полученная после удаления скрытых периодичностей;  $A_k$  – коэффициенты при косинусах;  $B_k$  – коэффициенты при синусах.

После удаления периодичностей с наибольшими пиками оставшиеся пики возрастают в силу нормировки периодограммы. Периодичности удалялись до

тех пор, пока высоты всех оставшихся на периодограмме пиков не превышали 10. На основании полученных оценок частот

были решены системы нормальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_0 - A_3$  и  $B_1 - B_3$  (табл. 1).

Таблица 1

**Оценки коэффициентов периодических составляющих и частот скрытых периодичностей в остаточной последовательности автономной нелинейной регрессии  $\gamma^{(k)}(t)$**

| $k$ | Частота (1/мес) | $A_{0k}$     | $A_k$        | $B_k$        | Остаточная сумма квадратов | Период (год) |
|-----|-----------------|--------------|--------------|--------------|----------------------------|--------------|
| 1   | 0,083459310     | -0,000054156 | -0,011634878 | 0,028744558  | 2,1707                     |              |
| 2   | 0,083963215     | 0,000001164  | -0,001548783 | 0,001469603  | 1,5317                     | 0,9992       |
| 3   | 0,166792643     | 0,000023283  | -0,007797237 | -0,017793199 | 1,2822                     |              |

**Проверка гипотезы о независимости остаточной последовательности.** Чтобы установить адекватность модели (1), надо проверить гипотезу о независимости остаточной последовательности, полученной в результате удаления перечисленных скрытых периодичностей.

Для проверки гипотезы воспользуемся известным критерием автокорреляции, в котором в качестве статистики критерия используется линейная комбинация оценок коэффициентов корреляции [5, 6]:

$$r_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Статистика критерия распределена асимптотически нормально. Для значений  $n > 100$  справедливо следующее заключение: если

$$r_k^* = \frac{|r_k - Er_k|}{\sqrt{Dr_k}} > u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad (3)$$

гипотеза независимости последовательности отвергается. Оценки стандартного отклонения и математического ожидания, входящие в формулу (3), соответственно равны 0,0049 и 0 [6]. Проверяем гипотезу на уровне значимости 0,05, тогда  $\gamma = 0,95$ , и строим двусторонний доверительный интервал при  $u_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1,96$  для оценки корреляционной функции, показанной на рис. 1.

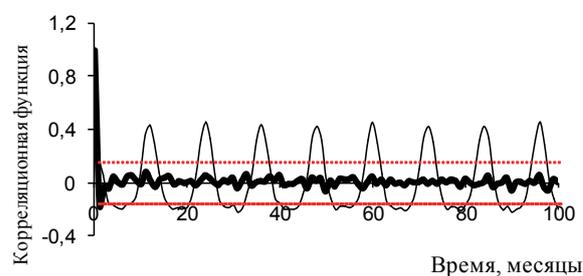


Рис. 1. Корреляционные функции остаточной последовательности колебаний уровня Каспийского моря до и после удаления периодических составляющих

Выбранный критерий показал, что гипотеза независимости справедлива на уровне значимости 0,05. В итоге, получена стохастическая модель колебаний уровня Каспийского моря в виде суммы:

$$Z(t+1) = Z(t) + \sum_{i=0}^k a_i \Phi(Z(t)) + A_m(t) + \varepsilon_0(t), \quad (4)$$

где  $Z(t)$  – уровень моря в нормированном масштабе в момент времени  $t$ ;  $A_m(t)$  – суммарная периодичность; определенная формулой (2);  $\varepsilon_0(t)$  – остаточная последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин;  $\sum_{i=0}^k a_i \Phi(Z(t))$  – нелинейная регрессия 9-го порядка.

Моделированная траектория (рис. 2), полученная по этой модели, качественно похожа на кривую колебаний уровня Каспийского моря.

**Расчет вероятности.** Для расчета вероятности достижения конкретного уровня, моделируем достаточное количество траекторий ( $10^2 \dots 10^6$ ) и подсчитывают, сколько траекторий из числа моделированных достигло заданный уровень.

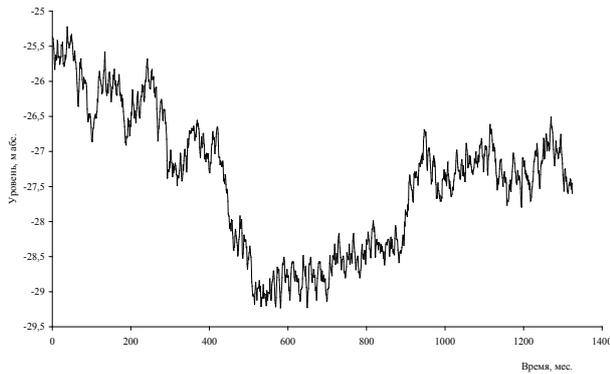


Рис. 2. Траектория колебаний уровня Каспийского моря, моделированная на основании модели (4)

Такая таблица, например, для уровня Каспия приведена в работе [7]. Кроме вероятностей достижения уровня были вычислены средние времена переходов из фиксированной точки  $x_0$  к тому или иному устойчивому уровню на основании обратного уравнения Колмогорова [8].

Кроме этого, приведем формулу вычисления вероятности превышения уровня  $a$  за 1 шаг, начиная с момента времени  $t$  на основании плотности распределения остаточной последовательности  $\varepsilon_0(t)$  модели (4):

$$P(Z(t+1) > a) = \int_{a - (Z(t) + \varphi(Z(t)) + A_m(t))}^{\infty} p(x) dx. \quad (5)$$

Аналогично формуле (5) получим вероятность превышения уровня  $a$  за  $k$  шагов:

$$P(Z(t+k) > a) = \int_{a - \left( Z(t) + \sum_{j=0}^{k-1} (\varphi(Z(t+j)) + A_m(t+j)) \right)}^{\infty} p_k(x) dx,$$

где  $p_k(x)$  – плотность суммы  $\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_0(t+j)$   $k$  независимых случайных величин.

### Пример моделирования колебаний уровня Каспия линейной моделью

Для сравнения для аппроксимации приращений колебаний уровня Каспийского моря рассмотрим линейную модель стационарной авторегрессии 1-го порядка AP(1). Имеем статистические наблюдения – среднегодовые значения уровня Каспийского моря на в/п в г. Махачкала 1900–2011 гг.  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ,  $n = 112$ . Ряд приращений обозначим  $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ . Для построения модели потребовались оценки коэффициента корреляции  $\alpha$ , приращений  $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$  и стандартного отклонения остаточной последовательности  $\varepsilon_t$ , их оценки соответственно равны 0,401 и 0,124.

При этом  $X_1 = \alpha X_0 + \varepsilon_1$ ,  $X_2 = \alpha X_1 + \varepsilon_2$  или  $X_2 = \alpha^2 X_0 + \alpha \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  и т. д.  
 $X_t = \alpha^t X_0 + \alpha^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$ ,  $\alpha \varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, t$ ,

последовательность независимых одинаково распределенных  $N(0, 0,124^2)$  случайных величин. Для перехода от приращений к уровню воспользуемся случайным блужданием  $S_t$  за время  $t$  с AP(1) и начальным значением  $X_0 = Y_1 = -25,58$  м абс.:  

$$S_t = \sum_{k=0}^t X_k = X_0 \sum_{k=0}^t \alpha^k + \sum_{n=1}^t \varepsilon_n \frac{1 - \alpha^{t-(n-1)}}{1 - \alpha}.$$

Границы случайного блуждания вычисляются по формуле

$$Z(t) = \pm c \sqrt{\frac{D\varepsilon_1}{(1-\alpha)^2} \left( t - \frac{2(1-\alpha^t)}{\alpha^{-1}-1} + \frac{1-\alpha^{2t}}{\alpha^{-2}-1} \right)} + X_0, \quad (5)$$

где  $\frac{D\varepsilon_1}{(1-\alpha)^2} \left( t - \frac{2(1-\alpha^t)}{\alpha^{-1}-1} + \frac{1-\alpha^{2t}}{\alpha^{-2}-1} \right)$  – дисперсия случайного блуждания  $S_t$  в момент времени  $t$ ;  $c$  – постоянный коэффициент, в рассматриваемом случае  $c = 3$ .

Из формулы (5) следует, а на рис. 3. ясно видно, что дисперсия случайного блуждания постоянно возрастает и, следовательно, границы, вмещающие моделированные траектории, расширяются со временем.

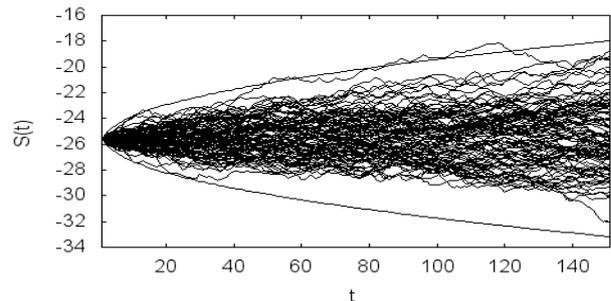


Рис. 3. Траектории, моделированные на основании случайного блуждания с AP(1) для приращений Каспия, начальная точка всех траекторий –25,58 м абс.

Моделированный процесс колебаний уровня на основании случайного блуждания является медленно расходящимся в бесконечность. В отличие от предложенной нелинейной стохастической модели, имеющей равновесные состояния, к которым траектории постоянно возвращаются, в линейной модели AP(1) есть только одно устойчивое состояние. Оптимальным в среднеквадратическом смысле прогнозом на 1 шаг, являющимся линейной оценкой величины  $X_{t+1}$  по значениям  $X_1, X_2, \dots, X_t$  служит просто величина  $\alpha X_t$  [9]. При прогнозировании на  $k$  шагов вперед имеет место следующая формула

$\alpha^k X_t$ . Так как  $|\alpha| < 1$ , это означает, что при  $k > 1$ , прогнозируется арифметическое среднее  $AR(1)$ . Если при этом и возникает кажущийся переход от одного уровня к другому, то такие траектории, как правило, достигают достаточно больших значений, выходящих за пределы имеющегося интервала значений уровня, даже при моделировании последовательности хотя бы на 150 значений. Это наглядная иллюстрация к тому, что временные зависимости, построенные на определенном временном интервале, имеют силу только для интервала наблюдений и не могут быть использованы для экстраполяции на будущее время. Для прогноза могут быть использованы только зависимости, не содержащие в явном виде переменную «время». Такая зависимость для вероятностного прогноза уровня Каспийского моря приведена в статье.

#### Заключение

В статье приводится обоснование необходимости использования нелинейных моделей для описания колебаний уровня Каспийского моря и приведен пример такого моделирования. Показано, что если применять линейные модели, например, авторегрессию первого порядка, ничего, кроме математического ожидания этой регрессии, равного исходной точке моделирования, получить невозможно.

В статье описаны возможности расчета вероятности достижения фиксированного уровня. Приведены формулы расчета вероятностей превышения заданного уровня с использованием плотности распределения остаточной последовательности. Указанным способом можно получить вероятностный прогноз значений уровня и на 5, и на 6, и, возможно, на 10 лет вперед. Для сегодняшних прогнозов уровня Каспийского моря такая возможность является актуальной.

1. **Найденов В. И.** Нелинейная динами-

ка поверхностных вод суши. – М. Наука, 2004. – 318 с.

2. **Абузьяров З. К.** Методика фонового прогноза уровня Каспийского моря на 6 лет [Электронный ресурс]. – URL: <http://method.meteorf.ru> (дата обращения 16.12.2015).

3. **Найденов В. И.** Нелинейная модель колебаний уровня Каспийского моря // Математическое моделирование. – 1992. – Т. 4. – № 6. – С. 50–64.

4. **Теребиж В. Ю.** Анализ временных рядов в астрофизике. – М.: Наука, 1992. – 392 с.

5. **Knobe James D.** Testing for randomness against autocorrelated alternatives: the parametric case // *Biometrika*. – 1975. – Vol. 62. – No. 3. – P. 571–575.

6. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.

7. **Кожевникова И. А., Найденов В. И.** Нелинейная стохастическая модель колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы. – 1998. – Т. 25. – № 6. – С. 661–670.

8. **Швейкина В. И., Кожевникова И. А.** О вероятностях перехода уровня Каспия из одного состояния в другое на основе решения обратного уравнения Колмогорова // Водные ресурсы. – 2008. – Т. 35. – № 1. – С. 45–52.

9. **Ширяев А. Н.** Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 638 с.

Материал поступил в редакцию 10.06.2015.

**Кожевникова Ирина Аркадьевна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры «Математическая статистика и случайные процессы»

Email: [irina\\_kozhev@mail.ru](mailto:irina_kozhev@mail.ru)

**Швейкина Валентина Ивановна**, кандидат географических наук, старший научный сотрудник лаборатории глобальной гидрологии

Email: [shvek@aqua.laser.ru](mailto:shvek@aqua.laser.ru)