

Оригинальная статья

УДК 502/504:627.5:004.94

DOI: 10.26897/1997-6011-2022-1-63-69

## ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДНОГО ОБЪЕКТА БИОГЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

**КАРПЕНКО НИНА ПЕТРОВНА** <sup>✉</sup>, д-р техн. наук, доцент  
npkarpenko@yandex.ru

**ШИРЯЕВА МАРГАРИТА АЛЕКСАНДРОВНА**, бакалавр  
margaretshiryeva@gmail.com

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева; 127434, г. Москва, ул. Прянишникова, 19, корп. 28. Россия

*В статье представлены результаты разработки трехмерного моделирования и результатов прогнозирования загрязнения водного объекта биогенными элементами на примере реки Пехорка Балашихинского района Московской области. Для решения проблемы повышения экологической безопасности речного бассейна разработана математическая трехмерная модель прогнозирования загрязнения биогенными элементами. В качестве оценки загрязнения реки Пехорки был выбран метод оценки воздействия по показателю химического загрязнения. Разработка математической модели переноса загрязнителей проводилась с использованием среды программирования Python Version 3.8. Математические модели рассматривали два сценария загрязнения реки: фактическое загрязнение реки биогенными загрязняющими веществами и прогнозируемое загрязнение. В результате моделирования был определен характер перемешивания и продольного рассеивания по потоку реки. Было установлено, что вертикальное перемешивание происходит довольно быстро на расстоянии нескольких глубин реки. Латеральное перемешивание происходит намного медленнее, но обычно заканчивается в пределах нескольких километров ниже по течению. Трехмерные математические модели прогнозирования загрязнения водного объекта предназначены для количественной оценки динамических процессов массопереноса в пространстве и времени и позволяют решать задачи экологической безопасности водосборных территорий и водных объектов.*

**Ключевые слова:** трехмерное моделирование, водный объект, речная система, водосборная территория, биогенные элементы

**Формат цитирования:** Карпенко Н.П., Ширяева М.А. Трехмерная математическая модель прогнозирования загрязнения водного объекта биогенными элементами // Природообустройство. – 2022. – № 1. – С. 63-69. DOI: 10.26897/1997-6011-2022-1-63-69.

© Карпенко Н.П., Ширяева М.А., 2022

Original article

## THREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE POLLUTION OF A WATER BODY WITH BIOGENIC ELEMENTS

**KARPENKO NINA PETROVNA** <sup>✉</sup>, doctor of technical sciences, associate professor  
npkarpenko@yandex.ru

**SHIRYAEVA MARGARITA ALEXANDROVNA**, holder of a bachelor's degree  
margaretshiryeva@gmail.com

Russian state agrarian university – MAA named after C.A. Timiryazev; 127434, Moscow, Pryanishnikova, 19, bldg. 28. Russia

*The article presents the results of the development of three-dimensional modeling and the results of forecasting the pollution of a water body with biogenic elements on the example of the Pekhorka River in the Balashikhinsky district of the Moscow region. To solve the problem of improving the environmental safety of the river basin, a mathematical three-dimensional model for predicting*

*pollution by biogenic elements has been developed. As an assessment of the pollution of the Pekhorka River, the method of assessing the impact on the indicator of chemical pollution was chosen. The development of a mathematical model of pollutant transport was carried out using the Python Version 3.8 programming environment. The mathematical models considered two scenarios of river pollution: actual river pollution with biogenic pollutants and forecast pollution. As a result of modeling, the nature of mixing and longitudinal dispersion along the river flow was determined. It was found that vertical mixing occurs quite quickly at a distance of several depths of the river, lateral mixing occurs much slower, but usually ends within a few kilometers downstream. Three-dimensional mathematical models for predicting water body pollution are designed to quantify the dynamic processes of mass transfer in space and time and allow solving problems of environmental safety of catchment areas and water bodies.*

**Keywords:** *three-dimensional modeling, water object, river system, catchment area, biogenic elements*

**Format of citation:** *Karpenko N.P., Shiryaeva M.A. Three-dimensional mathematical model for predicting the pollution of a water body with biogenic elements // Prirodoobustrojstvo. – 2022. – № 1. – S. 63-69. DOI: 10.26897/1997-6011-2022-1-63-69.*

**Введение.** Математическое моделирование как количественное исследование процессов транспорта воды и растворов используется в различных областях знаний включая экологию, природопользование, ирригацию, водопотребление и т.д. В последние годы значительный интерес проявляется к проблеме оценки качества воды и уровня загрязнения водных объектов и речных систем, то есть к решению вопросов повышения экологической безопасности речных бассейнов и водосборных территорий. В качестве основного инструментария для определения речного стока и распространения различных поллютантов по руслу реки широко применяются моделирование и разрабатываются математические модели [1, 2].

Можно выделить три типа моделирования качества воды: физические модели, которые состоят из визуализации реальности в масштабе; аналитические модели, основанные на формальном тождестве математических уравнений и описывают различные явления; математические модели, которые интерпретируют реальные условия с помощью числовых значений, используемые для количественной оценки процессов и явлений природной среды [3, 4].

Распространение поллютантов и их примесей в текучей среде (водном объекте) – это результат конвекционного процесса, вызванного движением воды и диффузией загрязняющих веществ. Русло реки характеризуется сложностью геометрических форм и наличием островных частей и притоков, что неравномерно влияет на перенос веществ по реке, поэтому использование аналитических методов при таких условиях становится невозможным.

Следует отметить, что в настоящее время экологическая ситуация многих речных бассейнов России остается достаточно напряженной,

особенно бассейнов малых рек европейской территории РФ. Это заставляет исследователей решать проблемы повышения экологической безопасности речных бассейнов [5]. Разработка трехмерной математической модели прогнозирования загрязнения водного объекта является актуальной, поскольку пространственные трехмерные модели наиболее достоверно описывают поведение природно-антропогенных процессов в речном бассейне и позволяют наиболее точно составить прогнозы загрязнения водного объекта.

**Материалы и методы исследований.** В качестве исследуемого объекта была выбрана р. Пехорка в Балашихинском районе Московской области, а именно участок ПК 127,00-129,00 (рис. 1).

В качестве оценки загрязнения реки Пехорки был выбран метод оценки воздействия по показателю химического загрязнения (ПХЗ-10). ПХЗ-10 рассчитывался для III и IV классов опасности по 10 ингредиентам с максимальным отношением концентрации к ПДК [6]:

$$\text{ПХЗ} - 10 = \sum_{i=10}^{\max} \left( \frac{c_i}{\text{ПДК}_i} \right). \quad (1)$$

Согласно полученному интегральному показателю состояние воды оценивают следующим образом:

- экологическое бедствие при ПХЗ-10 > 500 (III и IV классы опасности);
- чрезвычайная экологическая ситуация при ПХЗ-10 > 50 (III и IV классы опасности);
- относительно удовлетворительная ситуация ПХЗ-10 > 10 (III и IV классы опасности).

При разработке математической модели переноса загрязнителей использовалась среда программирования Python Version 3.8

и рассматривались два сценария загрязнения реки: фактическое загрязнение реки биогенными загрязняющими веществами и прогнозируемое загрязнение. Моделирование рассеивания загрязняющих веществ проводилось

с использованием программной среды Python и программы Autodesk 123D и 3ds Max, в которых были заданы параметры реки, уровни загрязнения по биогенным элементам и построена модель топографической местности.

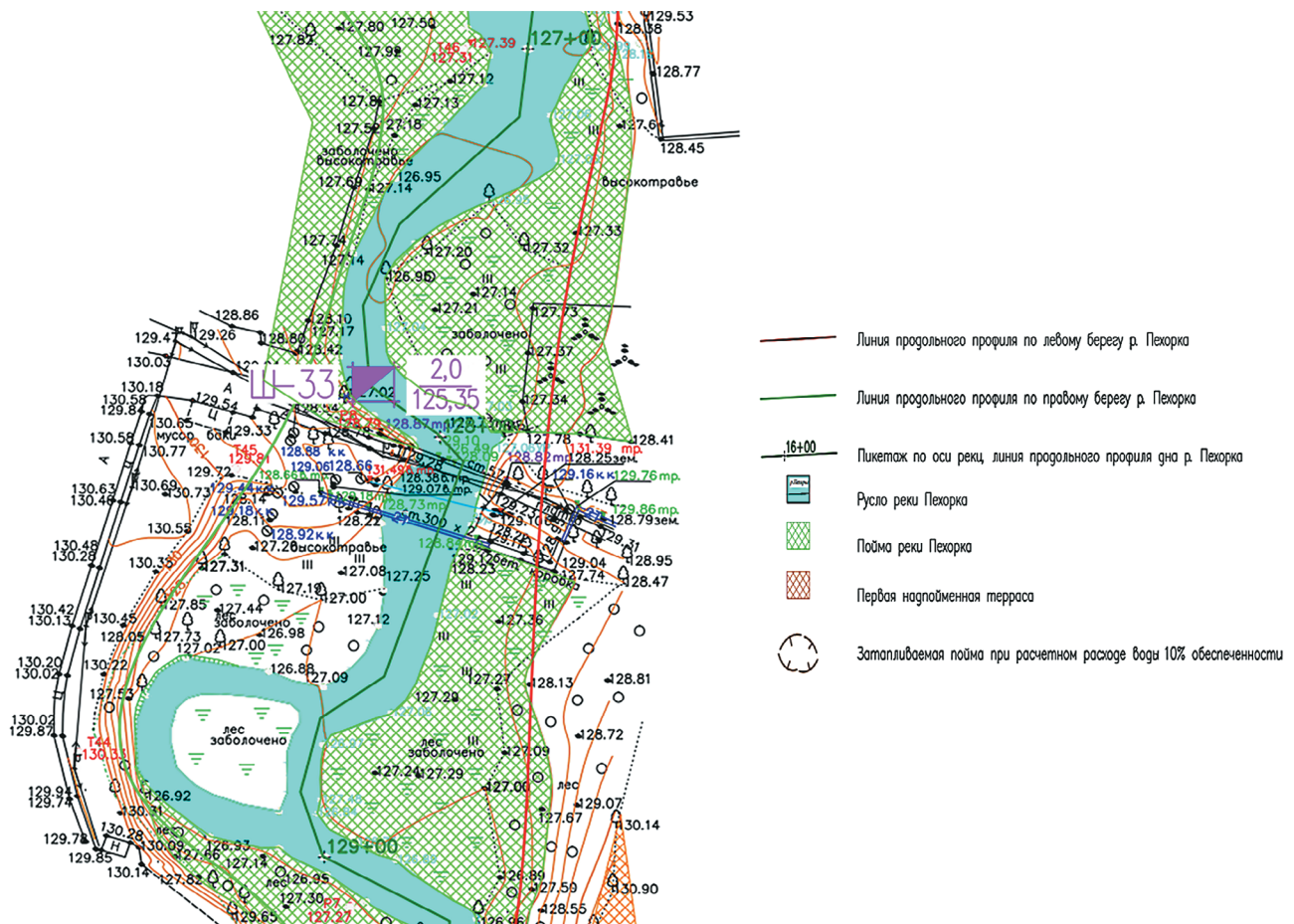


Рис. 1. План исследуемого участка реки Пехорка на участке ПК +127,00+129,00

Fig. 1. The plan of the investigated section of the Pekhorka River on the site PC +127,00+129,00

Движение, теплопередача и распространение поллютантов текучей среды моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса. Система уравнений принимает следующий вид [7, 8]:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dx_k}(pu_k) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d(pu_k)}{dt} + \frac{d}{dx_k}(pu_k u_k - \tau_{ik}) + \frac{dP}{dx_i} = S_i \quad (3)$$

$$\frac{d(pE)}{dt} + \frac{d}{dx_k}((pE + P)u_k + q_k - \tau_{ik} u_i) = S_k u_k + Q_H, \quad (4)$$

где  $t$  – время;  $u$  – скорость воды, м/с;  $p$  – плотность воды;  $P$  – давление;  $S_i$  – внешние массовые силы;  $E$  – полная энергия единичной массы воды;  $Q_H$  – тепло, выделяемое тепловым источником в единичном объеме воды;  $\tau$  – тензор вязких сдвиговых напряжений;  $q$  – диффузный поток.

В качестве последнего шага модель конвекции-дисперсии применяется для моделирования случайных загрязнений в программном блоке.

Рассматривались два типа переноса загрязняющих веществ. Первый тип – конвекционный транспорт, представляющий собой механизм, переносящий поллютант в водный объект. Это перенос, зависящий от действительной скорости воды, поэтому для расчета важна гидродинамическая часть. Второй тип – это дисперсионный перенос, определяемый законом Фика (самопроизвольный перенос). Для этого в уравнения вводятся поток загрязняющих веществ и градиент концентрации [8, 9]:

$$\partial_t(hC) + \nabla(hC\bar{u}) = \nabla(K_c \nabla C) + C_{se} S_{se}, \quad (5)$$

где  $C$  – концентрация, мг/л;  $\bar{u}$  – поле скоростей, м/с;  $K_c$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $C_{se}$  – исходная концентрация;  $S_{se}$  – поток загрязняющего вещества, м/с.

**Результаты исследований и обсуждение.** Согласно классификации по интегральному показателю химического загрязнения состояние р. Пехорки по биогенным элементам относится к относительно удовлетворительному. Были проведены полевые исследования по отбору проб воды в реке для оценки количественного содержания нитратов, нитритов, фосфатов, ортофосфатов, калия, магния, серы, железа, аммонийного азота, калия, растворенного кремния, натрия, хлора и др.

Эти элементы являются наиболее важными, поскольку избыток биогенных элементов в воде ведет к процессу эвтрофикации и нарушению экологического равновесия водных объектов, вредит рыболовству и отрицательно влияет на использование вод в питьевых, хозяйственно-бытовых и рекреационных целях [10].

Загрязнение водоемов избытком биогенных веществ повышает уровень первичной продукции: в эвтрофных водоемах происходят

массовое развитие микроскопических водорослей и «цветение» воды. Увеличение количества микроскопических водорослей снижает прозрачность воды. Кроме того, биогенное загрязнение влияет на организмы проживания в водотоках, уменьшение количества доступного кислорода в воде. Это приводит к ухудшению их состояния и может вызвать асфиксию организмов, увеличение мутности воды, ограничивая тем самым поступление света, необходимого фотосинтеза, увеличивая количество бактерий и, наконец, снижая биоразнообразие.

Концентрация веществ рассчитывалась для каждого участка реки. Для каждого пробоотбора река была разделена на три зоны: левобережную, правобережную и центральную – для учета процесса перемешивания и дисперсии.

Данные по концентрациям некоторых загрязняющих веществ на 2020 г. представлены в таблице.

Таблица

#### Осредненные концентрации некоторых биогенных элементов в реке Пехорка, мг/л

Table

#### Average concentrations of some biogenic elements in the Pekhorka River, mg/l

Местоположение/вещество <i>Location/substance</i>	Осреднённые концентрации некоторых биогенных элементов <i>Average concentrations of some biogenic elements</i>						
	NO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	K <sup>+</sup>	S <sup>-</sup>	Na <sup>+</sup>
<b>Правый берег реки</b> <i>The right bank of the river</i>	0,24	26,8	1,23	0,12	20,2	0,027	100
<b>Центральная часть реки</b> <i>The central part of the river</i>	0,12	20,0	0,87	0,09	12,0	0,005	75
<b>Левый берег реки</b> <i>The left part of the river</i>	0,22	36,5	1,0	0,08	12,0	0,012	96

Данные по загрязнению на исследуемом участке представлены на рисунке 2.

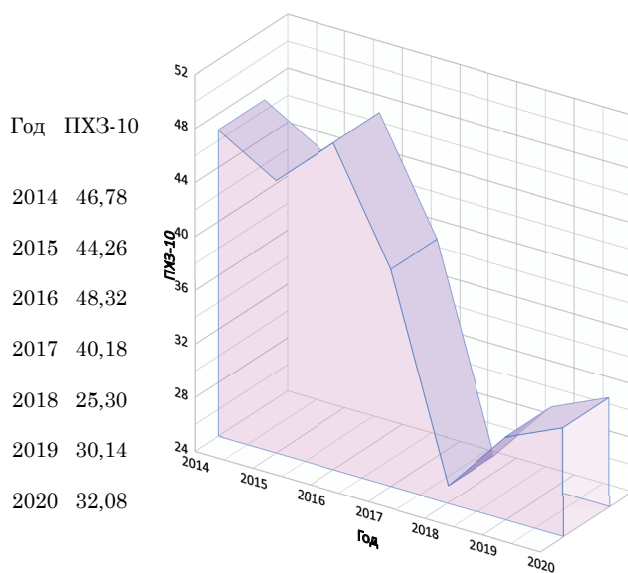
Из графика следует, что с 2016 по 2018 гг. наблюдалось снижение загрязнения на исследуемом участке реки. Однако с 2019 г. значения начали резко расти, что может говорить о переходе степени загрязненности от умеренно удовлетворительной до чрезвычайно экологической по ПХЗ-10 для биогенных элементов.

Стандартные инструменты численного моделирования, используемые для моделирования стока с высоким разрешением, выявляют различия между инструментами с точки зрения практических аспектов. Интеграция топографических данных с высоким разрешением может быть выполнена должным образом, но инструменты моделирования не могут в равной степени удовлетворить требование создания адаптированной дискретизации. С точки

зрения простоты создания адаптированной сетки и с точки зрения ограничений временной дискретизации здесь именно так и происходит. Инструменты моделирования не могут с одинаковой степенью вероятности представить все категории и варианты сценариев (осадки/начальная глубина воды). Стабильность инструментов моделирования для обработки возникновения высоких градиентов, обработки движущихся границ и колебаний накладывает различные ограничения, связанные с дискретизацией и используемой численной схемой.

Модуль HD является основой для моделирования адвекции-дисперсии (AD). После калибровки моделей HD был смоделирован перенос загрязняющих веществ с использованием различных параметров. Были выбраны два сценария для представления случайного загрязнения реки Пехорка: неконсервативный

загрязнитель и консервативный загрязнитель. Коэффициент затухания определен экспериментальным исследованием, когда он варьируется от 0,006 до 0,6 сут.<sup>-1</sup> Здесь для обоих сценариев коэффициент убывания принят равным 0,4 сут.<sup>-1</sup> Коэффициент дисперсии разделяется на две слагаемые: продольную дисперсию и поперечную дисперсию. Второй определяется как в 10 раз больший, чем первый. Следовательно, вычисления продольной дисперсии достаточно, чтобы получить два коэффициента дисперсии.



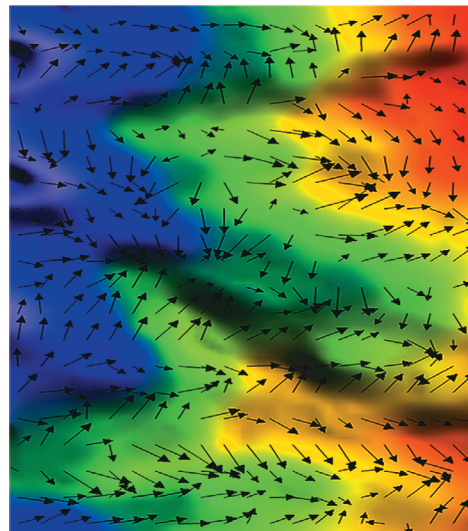
**Рис. 2. Динамика изменения концентраций элементов в реке Пехорка (мг/л) по ПХЗ-10 в летний период 2014-2020 гг.**

**Fig. 2. Dynamics of changes in the concentrations of elements in the Pekhorka River (mg/l) according to PCZ-10 in the summer period of 2014-2020**

Был определен характер перемешивания и продольного рассеивания по потоку реки. Вертикальное перемешивание обычно завершается довольно быстро на расстоянии нескольких глубин реки. Латеральное перемешивание происходит намного медленнее, но обычно заканчивается в пределах нескольких километров ниже по течению. Продольная дисперсия происходит повсеместно. Иными словами, вертикальное перемешивание, вероятно, будет преобладать в секции I, которая находится на весьма коротком расстоянии. На участке II поперечное смешивание все еще происходит быстро, поэтому смешение и дисперсия являются важными процессами между участками I и III.

После участка III преобладающим процессом переноса является продольная дисперсия, поэтому можно предположить, что концентрация

загрязняющего вещества будет однородной в поперечном сечении. Продольная дисперсия является доминирующим процессом, который происходит между измерительными сечениями, и поэтому поллютант перемещается вниз по потоку на средней скорости потока (рис. 3).



**Рис. 3. Моделирование процесса массопереноса по течению реки на основе модели «Конвекция-дисперсия»**

**Fig. 3. Modeling of the process of mass transfer along the river flow on the basis of the convection-dispersion model**

Важным аспектом было использование достаточно четкой пространственной дискретизации, чтобы продолжать представлять структуры, влияющие на сток с высоким разрешением. Для наглядности водосбора инженерно-топографический план был построен в программах AutoCad 2016 в программном продукте Geonics. В программную среду импортировались геологические и геодезические данные в базу данных. В модуле «ТОПОПЛАН» был выделен рельеф. С помощью топографических классификаторов подбирались необходимые линейные и точечные знаки. Далее строилась трехмерная модель рельефа с помощью примитивов и базы данных в модуле «ГЕОМОДЕЛЬ», а с помощью дополнительных инструментов в программе AutoCad нанесены недостающие составляющие.

С помощью программы, созданной в среде программирования Python, были интегрированы данные с фактическими концентрациями загрязняющих веществ и прогнозные значения. После интеграции полученные данные были автоматически перенесены на пространственную модель. На выходе получены два сценария по загрязнению реки биогенными элементами (рис. 4).



Рис. 4. Фактический и прогнозный сценарии изменения загрязнения участка р. Пехорка: ПК +127,00-+129,00

Fig. 4. Actual and forecast scenarios of changes in pollution of the Section of the Pekhorka River PK +127.00-+129.00

Морфометрические и гидрологические характеристики усиливают поперечное перемешивание за счет двух различных механизмов: в двумерных потоках усиление перемешивания вызывается степенью фокусировки потока, уменьшая длину перемешивания, которую необходимо покрыть поперечной дисперсией. В трехмерных потоках этот эффект может быть менее выраженным. Однако сложная геометрия и топология потока позволяют закручивать поток вод, что гораздо более эффективно для увеличения поперечной дисперсии, чем эффект фокусировки потока, наблюдаемый в 2D.

Разработанная математическая модель является динамической. На ее основе проведены расчеты на период прогнозного времени 10 лет. Для решения вопросов повышения экологической безопасности водосборных территорий необходима организация работ при эксплуатации и восстановлении водных объектов.

### Выводы

По показателю химического загрязнения по 10 ингредиентам качество воды в исследуемом

участке р. Пехорка оценено как относительно удовлетворительное. Однако с 2019 г. наблюдается рост поллютантов, что может говорить о переходе степени загрязненности от умеренно удовлетворительной до чрезвычайно экологической по ПХЗ-10 для биогенных элементов.

Разработана трехмерная пространственная модель с интегрированными из среды программирования данными по биогенному загрязнению и технологии прогнозирования качества воды по биогенным компонентам. Усовершенствована методика прогнозного расчета для оценки динамики изменения концентрации загрязняющих веществ по течению реки в период  $T = 10$  лет.

На основе прогностических расчетов по гидродинамическим законам, законам Навье-Стокса и Фика на трехмерную модель были нанесены уровни загрязнения воды биогенными элементами и составлен прогнозный сценарий изменения концентрации ЗВ на период  $T = 10$  лет. Перспективой предусмотрено интенсивное перемешивание загрязняющих веществ по длине реки, что свидетельствует об отрицательной динамике биогенного загрязнения.

### Библиографический список

1. Полосков И.Е. Компьютерное моделирование динамики загрязнения бассейна реки с учетом запаздывания и случайных факторов // Вычислительные технологии. – 2005. – № 1. – С. 103-115.
2. Антошкина Л.И. Численное моделирование процессов загрязнения поверхностных и подземных вод. – Ростов/на/Д.: Изд-во ЧП Свидлера А.Л., 2004. – С. 168.
3. Finaud-Guyot P. 1D-2D coupling for river flow modeling / P. Finaud-Guyot C. Delenne, V. Guinot, C. Llovel // Comptes Rendus Mecanique. – 2011. – № 339. – P. 226-234.
4. Wang Q., Li S. A review of surface water quality models. The Scientific World Journal. – 2013. – 7 p.

### References

1. Poloskov I.E. Kompjuternaya modelirovanie dinamiki zagryazneniya bassejna reki s uchetom zapazdyvaniya i sluchajnyh faktorov // Vychislitelnye tehnologii. – 2005. – № 1. – S. 103-115.
2. Antoshkina L.I. Chislennoe modelirovanie protsessov zagryazneniya poverhnostnyh i podzemnyh vod. – D.: Izd-vo CHP Svidlera A.L., 2004. – S. 168.
3. Finaud-Guyot P. 1D-2D coupling for river flow modeling / P. Finaud-Guyot C. Delenne, V. Guinot, C. Llovel // Comptes Rendus Mecanique. – 2011. – № 339. – P. 226-234.
4. Wang Q., Li, S. A review of surface water quality models. The Scientific World Journal, 2013, 7 p.

5. **Карпенко Н.П.** Оценка геоэкологической ситуации речных бассейнов на основе атрибутивных показателей и обобщенных геоэкологических рисков // Природообустройство. – 2018. – № 2. – С. 15-22.

6. **Карпенко Н.П., Ширяева М.А.** Трехмерное моделирование как система отображения суммарного химического загрязнения почв // Природообустройство. – 2021. – № 1. – С. 6-14.

7. **Кучмент Л.С.** Развитие методов гидрологических прогнозов и смена их парадигмы // Избранные труды Института водных проблем РАН: 1967-2017. – 2017. – С. 5-24.

8. **Раткович Л.Д.** Факторы влияния диффузного загрязнения на водные объекты / Маркин В.Н., Глазунова И.В., С.А. Соколова, С.А. // Природообустройство. – 2016. – № 3. – С. 64-75.

9. **Karpenko N.P., Shiryayeva M.A., Bogomazova Yu.S.** Calculation methods of groundwater backwater in the zone of influence of hydraulic structures. – IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2021.

10. **Карпенко Н.П., Глазунова И.В.** Организация работ при эксплуатации и восстановлении водных объектов г. Москвы // Мат-лы Междун. юбилейной научно-практ. конф. «Проблемы развития сельскохозяйственных мелиораций и водохозяйственного комплекса на базе цифровых технологий» (23-24 октября 2019 г.). – Т. II. – ФГБНУ ВНИИГиМ, 2019. – С. 95-100.

#### Критерии авторства

Карпенко Н.П., Ширяева М.А. выполнили теоретические исследования, на основании которых провели обобщение и написали рукопись, имеют на статью авторское право и несут ответственность за плагиат.

#### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов

Статья поступила в редакцию 28.06.2021 г.

Одобрена после рецензирования 18.10.2021 г.

Принята к публикации 09.02.2022 г.

5. **Karpenko N.P.** Otsenka geoekologicheskoy situatsii rechnykh bassejnov na osnove atributivnykh pokazatelej i obobshchennykh geoekologicheskikh riskov // Prirodoobustrojstvo. – 2018. – № 2. – С. 15-22.

6. **Karpenko N.P., Shiryayeva M.A.** Trehmernoe modelirovanie kak sistema otobrazheniya summarnogo himicheskogo zagryazneniya pochv // Prirodoobustrojstvo. – 2021. – № 1. – С. 6-14.

7. **Kyuchment L.S.** Matematicheskoe modelirovanie rechnogo stoka. – L: Gidrometeoizdat, 1972. – 191 s.

8. **Shestakov V.M.** Hidrogeodinamika. – M.: izd-vo MGU. 1985. – 146 s.

9. **Karpenko N.P., Shiryayeva M.A., Bogomazova Yu.S.** Calculation methods of groundwater backwater in the zone of influence of hydraulic structures. – IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2021.

10. **Karpenko N.P., Glazunova I.V.** Organizatsiya rabot pri expluatatsii i vosstanovlenii vodnykh objektov g. Moskvy. / Mat-ly mezhd. yubilejnoj nauchno-prakt. konf. “Problemy razvitiya selskohozyajstvennykh melioratsij i vodochozyajstvennogo kompleksa na baze tsifrovyykh tehnologij” (23-24 oktyabrya 2019 g.). Tom II. – FGBNU VNIIGiM, 2019. – С. 95-100.

#### Criteria of authorship

Karpenko N.P., Shiryayeva M.A. carried out theoretical studies, on the basis of which they generalized and wrote the manuscript, have a copyright on the article and are responsible for plagiarism.

#### Conflict of interests

The authors state that there are no conflicts of interests

The article was submitted to the editorial office 28.06.2021

Approved after reviewing 18.10.2021

Accepted for publication 09.02.2022