УДК 502/304:556.3:517.9

Д. А. МАНУКЬЯН

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ПРИНЦИПЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЛАНОВО-НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ

Рассматриваются современные теории и методы решения обратных задач геофильтрации, связанные с поиском гидрогеологических параметров планово-неоднородных потоков. В работе сформулированы основные принципы идентификации кусочно-однородных параметров водоносных горизонтов, включающие построение геолого-гидрологической модели среды, выбор целевой многопараметрической функции «овражного» типа, поиск глобального минимума целевой функции на основе комбинаторных планов («латинский квадрат»).

Гидрогеологические параметры, обратные задачи математической физики, планово-неоднородные потоки, целевая функция, поиск минимума многопараметрических функций, комбинаторные планы.

There are considered modern theories and methods of solving inverse problems of geo-filtration connected with finding hydro-geological parameters of planned-heterogeneous flows. There are formulated basic principles of identification of piece-homogeneous parameters of aquifer comprising geological-hydrological models of the medium, choice of the objective multi-parametric function of «ravine» type, search of the global minimum of the objective function on the basis of the combinative plans («latin quarter»).

Hydrological parameters, inverse problems of the mathematical physics, planned-heterogeneous flows, objective function, search of the minimum of multi-parametric functions, combinative plans.

Период времени, охватывающий последнее десятилетие прошлого века и особенно первые годы XXI столетия, отличает революционное по сравнению с предыдущим периодом развитие и внедрение информационных технологий в различные области человеческой деятельности. Для последних лет характерно создание вычислительной техники, решающей современные задачи в следующих областях: космических технологий, военно-промышленного и агропромышленного комплексов, разведки и добычи полезных ископаемых, в области создания и производства новых машин и материалов на основе нанотехнологий.

Наряду с созданием современных вычислительных средств совершенствуются и соответствующие модели исследуемых объектов и целых систем. Большинство из перечисленных объектов и процессов описывается либо одним, либо системой дифференциальных уравнений и имеет детерминированный характер. Соответственно в структуру модели подобного объекта или процесса должны входить краевые условия, а также определенный комплекс коэффициентов уравнений, отражающих физические свойства исследуемого объекта и изменчивость этих свойств и параметров в пространстве и во времени.

Однако в настоящее время появилось значительное расхождение между точностью решения краевых задач и точностью определения используемых при их решении параметров. С одной стороны, проводится большой комплекс исследований в теории движения флюидов в пористых и трещиноватых средах, рассматриваются весьма тонкие вопросы теории влаго-, соле- и массопереноса, совершенствуются различные численные методы решения дифференциальных уравнений. С другой стороны, достижение высокой точности решения краевых задач в значительной степени обесценивается весьма низкой точностью закладываемых в соответствующие модели коэффициентов.

В современном моделировании процессов теплопроводности, геофильтрации и других задачах математической физики широкое распространение получило разделение решаемых при этом частных задач на прямые и обратные. Подобная классификация правомерна лишь в том случае, когда математическое моделирование перечисленных процессов воспроизводится с помощью соответствующих дифференциальных уравнений математической физики.

В *прямых* задачах математической физики искомыми являются величины температурного режима или гидродинамические характеристики фильтрационного потока (напоры, уровни, скорости или расходы подземных вод), которые находятся в результате решения соответствующих дифференциальных уравнений при известных параметрах среды, начальных и граничных условиях.

В *обратных* задачах известны данные температурного поля или данные об изменении уровней подземных вод, скоростей или расходов, известны начальные и граничные условия в пределах исследуемой области. В зависимости от искомых характеристик выделяют два типа обратных задач.

К *первому типу* обратных задач относятся задачи, в которых искомыми величинами являются следующие: физические параметры вещества, теплопроводность, теплоемкость, теплота плавления – в задачах теплопроводности; фильтрационные и емкостные параметры водовмещающих пород – в задачах геофильтрации.

Второй тип обратных задач предполагает (при известных параметрах вещества или природной среды) определение значений внутреннего или внешнего тепло- или водообмена. В частности, в задачах геофильтрации это может быть связано с оценкой величины инфильтрационного питания подземных вод, внутреннего перетекания через раздельные слои или окна, степени взаимосвязи подземных вод с водотоками и т.п.

Отсутствие достоверной информации о внешнем воздействии окружающей среды на исследуемый объект, о физических свойствах последнего и другой необходимой информации делает проведение инженерных расчетов и прогноз состояния объекта совершенно невозможным. В частности, решение некоторых обратных задач связано с интерполяцией и экстраполяцией электрических, температурных, геофильтрационных и других полей, найденных по их измерениям во внутренних точках тела в области, примыкающей к его наружной поверхности. Однако интерполируемые и экстраполированные значения полей и потоков обладают большими погрешностями, чем измеренные величины. Поэтому всегда можно указать ту часть пространства, где экстраполированное решение существенно больше своей погрешности – область регулярности решения. Соответственно вне указанной области абсолютная или относительная погрешности превосходят допустимые значения. Выбор допускаемой погрешности экстраполированного поля определяет область регулярности решения (по А.Н. Тихонову), а сам метод выбора такой области получил название *метода регуляризации* (решения обратных задач).

Суть этого метода решения некорректных задач математической физики вообще и задач геофильтрации в частности заключается в поиске минимума регуляризации функционала, роль которого состоит в «подавлении» высокочастотных вычислительных погрешностей или «сглаживании» решения на каждом этапе вычислительного цикла.

В зависимости от сложности исходной информации – геолого-гидрогеологических моделей, природно-антропогенных условий, расчетной геофильтрационной схемы – в общем случае рассматриваются методы решения обратных задач на основе аналитических, численно-аналитических и численных методов решения исходных прямых задач. При этом обратные задачи геофильтрации могут считаться поставленными корректно (по Тихонову), если выполняются следующие условия: априори известно, что решение задачи существует для некоторого класса данных L и принадлежит оно некоторому заданному множеству M функционального пространства; решение единственно в некотором классе данных L и в классе решений, принадлежащих M; бесконечно малым вариациям данных задачи, не выводящим решение за пределы множества M, соответствуют бесконечно малые вариации решения, т.е. существуют алгоритмы построения решений, устойчивых по входным данным. В качестве примера, иллюстрирующего возможности и эффективность применения разработанного автором алгоритма решения обратных задач, используется гидрогеологический объект, приведенный в «Руководстве по применению MODINF».

В пределах области фильтрации, размеры которой составляют около 11 000х11 000 м, гидрогеологические условия имеют простой характер – водоносный горизонт представлен однослойной толщей с относительно простыми очертаниями в плане (рис. 1).

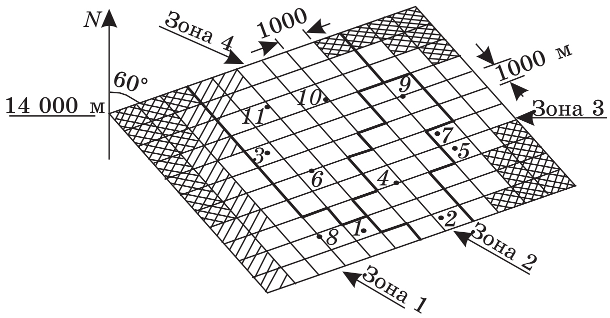

Рис. 1. **Сеточная модель области фильтрации для решения обратной задачи:** фиктивные ячейки границ; ячейки с условием первого рода; ячейки области фильтрации; 1...11 – наблюдательные скважины

Юго-западные границы фильтрации характеризуются наличием речной долины, по которой отмечаются постоянные значения напоров подземных вод. Предполагается, что на остальной части контура области фильтрации поток отсутствует, т.е. существует непроницаемая граница. Питание водоносного горизонта, оцениваемое величиной $W = 10^{-5}$ мм/год, сформировало депрессионную поверхность, характеристика которой дается по данным режимных наблюдений в 11 скважинах (таблица).

В результате схематизации реальных гидрогеологических условий исследуемая область представляется в виде двумерной области фильтрации достаточно простой конфигурации с кусочно-однородным характером изменения проводимостей, а именно: T_1, T_2, T_3, T_4. Основное уравнение, которое описывает стационарный режим фильтрации в пределах рассматриваемой области, имеет вид уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+W=0. \qquad (1)$$

Граничные условия области фильтрации могут быть схематизированы следующим образом: западная граница представляется в виде условия первого рода $H_{\text{гр}}$ = const (остальная часть границы $\partial H/\partial n = 0$) или условия второго рода. Характер неоднородности фильтрационных свойств водовмещающих отложений позволяет представить водоносный пласт в плане в виде кусочно-однородной области с четырьмя различными по водопроводимости зонами. Так как для численного решения исходного уравнения используется конечно-разностный метод, то вся область фильтрации разбивается равномерной ортогональной сеткой с шагом 1000 м. В качестве основного критерия оценки эффективности алгоритма по подбору одного или нескольких неизвестных гидрологических параметров предлагается использовать критерий ошибок выходных функций, когда интерационная процедура подбора направлена на минимизацию целевой функции и продолжается до тех пор, пока отдельные значения функции в расчетных i-х точках не становятся достаточно близкими к значениям сальных динамических натурных функций.

В этом случае целевая функция Ф будет иметь следующий вид:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\left(h_i^{\text{М}} - h_i^{\text{г}}\right)^2 w_i \rightarrow \min, \qquad (2)$$

где w_i – весовые коэффициенты (остальные обозначения в тексте).

Эффективность решения тестового примера во многом определяется выбором начальных значений проводимостей, одинаковых во всех зонах области фильтрации и равных $T_i^{(0)} = 1$ м²/сут (i = 1, 2, 3, 4).

Строгие математические решения, связанные с нахождением глобального минимума многопараметрической функции Ф, в общем случае практически отсутствуют. Поэтому для большинства

Данные отметок уровней грунтовых вод по скважинам

Номер скважины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Отметка УГВ, м	2,9	6,6	1,5	8,7	11,98	5,99	12,6	3,2	13,9	11,5	6,0

реальных задач в литературе, посвященной данной проблеме, используется общая гипотеза лишь относительно структуры функции многих переменных, согласно которой эта функция обладает определенным свойством, а именно: в любой точке все независимые переменные могут быть разбиты на две группы. Первая группа включает параметры, изменение которых приводит к значительному изменению целевой функции, вторая – к незначительному ее изменению. Следует подчеркнуть, что функции, для которых выполнимо подобное деление переменных, носят название хорошо организованных, или «овражных» функций, а число существенных параметров определяет размерность «оврага» (рис. 2).

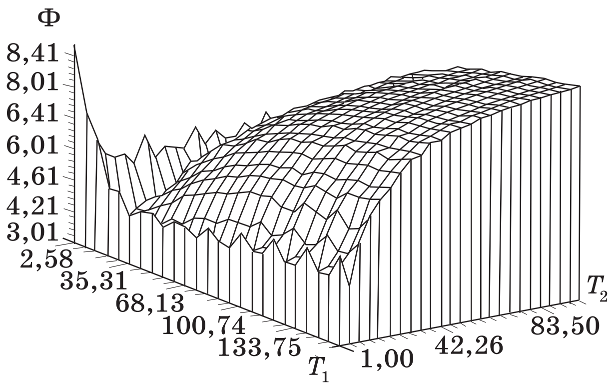

Рис. 2. **«Овражный» характер поверхности целевой функции**

В содержательном смысле «овраг» может быть охарактеризован следующими системными признаками: крутизна стенок, ширина, пологость и извилистость дна «оврага». Наибольшие трудности при поисках минимума (в общем случае экстремума) подобной «овражности» функции возникают тогда, когда мы имеем дело с узкими, пологими и извилистыми оврагами, крутизна стенок которых намного превышает крутизну тальвега оврага. При решении данного класса оптимизационных задач, как правило, используются градиентные методы; так как из-за математической сложности таких задач не представляется возможным выписать аналитическое решение, то градиентные методы представляют собой итерационную релаксационную процедуру. Последняя при минимизации «овражной» функции включает в себя два этапа – выбор направления минимизации и поиск минимума вдоль этого направления.

Были выполнены дополнительные исследования структуры целевой функции, результаты которых изложены ниже.

Представляют интерес поверхности функции Ф. Целевая функция зависит от четырех параметров – T_1, T_2, T_3, T_4, и для ее представления требуется пятимерное пространство. Ограничимся поэтому геометрическим построением трехмерных срезов функции в виде карт или поверхностей (см. рис. 2).

В качестве эффективного метода графического отображения параметрического пространства значений проводимости автором предлагается использовать комбинаторные планы, в частности «латинский квадрат LS» (рис. 3). При расчетах целевой функции на заключительном этапе параметрическое пространство заменяется пространством целевой функции (рис. 4).

Результаты экспериментальных расчетов с помощью пакета «Modflow – LS» направлены на исследование связи различных случайных выборок начальных значений проводимости с единичностью решения обратной задачи. На данной стадии они включали в себя следующие варианты:

LS 1 – три заданные выборки по 9 комбинаций в каждой в пределах полнопараметрического пространства, которое включает в себя 81 сочетание. Локальный минимум находится только для двух параметров в окружении точки с минимальным значением целевой функции, после чего проводится дробление интервалов для нахождения оптимального сочетания искомых значений проводимости;

LS 2 – три случайные выборки на каждой стадии (т. е. 27 комбинаций проводимости). Поиск локального минимума целевой функции проводится в окружении точки с ее минимальным значением. Далее проводится разбиение интервалов;

LS 3 – три случайные выборки на каждой стадии; поиск глобального минимума целевой функции по всему параметрическому пространству перед разбиением интервалов.

Как показали результаты экспериментальных расчетов, наиболее эффективной оказалась схема нахождения глобального минимума методом случайного поиска, выполненная в соответствии с алгоритмом LS 2.

Представляет интерес графическое изображение пространства целевой функции, построенного на базе LS (см. рис. 4).

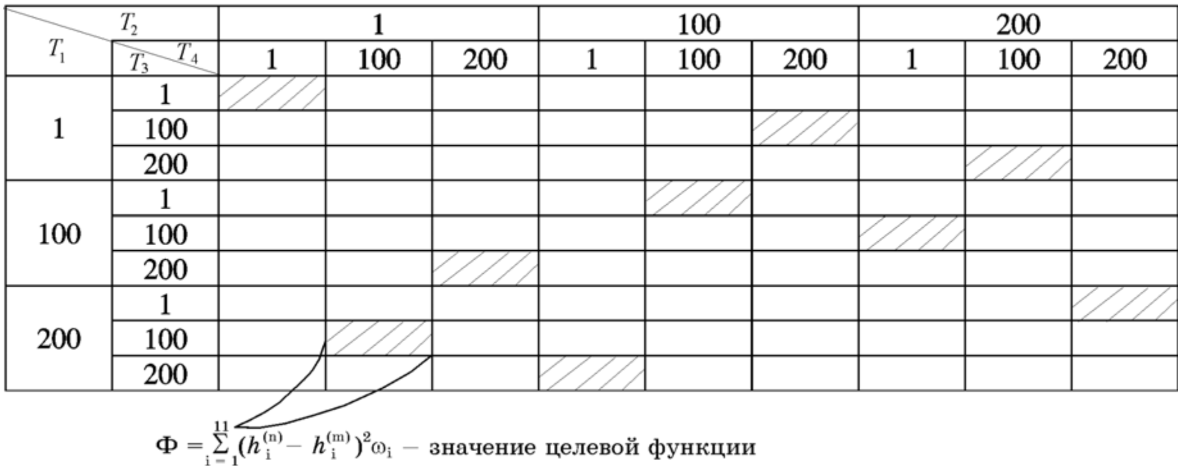

Рис. 3. **«Латинский квадрат»:** ▭ вариант расчета для полного факторного эксперимента; ▨ вариант расчета для дробного факторного эксперимента

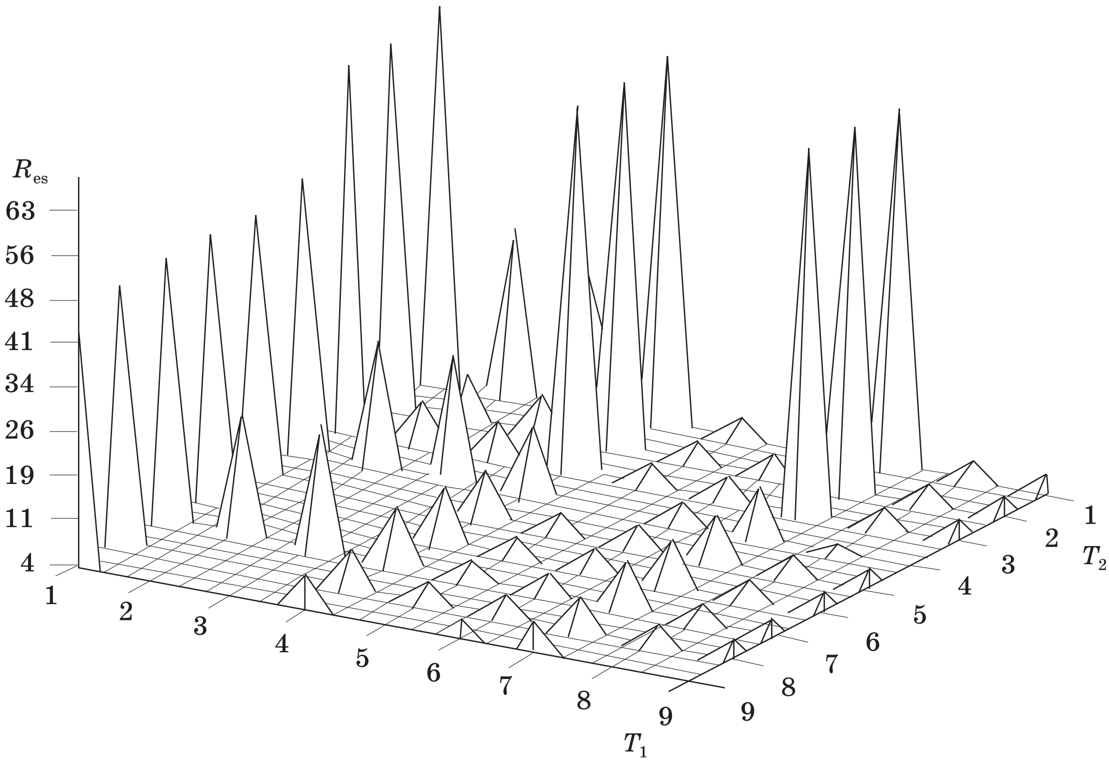

Рис. 4. **Изображение поверхности целевой функции, построенной на базе LS**

Выводы

Сформулированы основные принципы идентификации планово-неоднородных потоков:

построение геолого-гидрогеологической модели пласта, учитывающей пространственно-временные закономерности формирования водовмещающих отложений на основе моделей осадконакопления, структурно-тектонических и неотектонических процессов;

применение при оценке качества решения обратной задачи целевой многопараметрической функции «овражного» типа, позволяющей наиболее эффективно использовать градиентные методы поиска минимума целевой функции;

применение комбинаторных планов, в частности «латинского квадрата», «для поиска глобального» минимума целевой функции.

1. **Жабин В. Ф., Манукьян Д. А., Фельдман А. А.** Физические и математические предпосылки решения обратных задач / Рациональное использование водных ресурсов: сб. науч. статей. – М:

Наука, 1986. – С. 70–81.

2. **Манукьян Д. А., Пашковский И. С.** Решение обратных гидрогеологических задач с помощью интегральных преобразований / Вопросы оценки взаимосвязи поверхности и подземных вод и качества воды: сб. науч. сатей. – М.: МГУ, 1972. – С. 242–247.

3. **Манукьян Д. А.** Теория и методы решения обратных задач геофильтрации. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2007. – 186 с.

4. **Тихонов А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – № 3. – Т. 151. – С. 49–52.

5. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Метод решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

Материал поступил в редакцию 26.01.11.

***Манукьян Давид Ашикович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Геология и гидроэкология»*

Тел. 8 (499) 976-22-27

УДК 502/504:532.543

Н. В. КОСИЧЕНКО

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донской государственный аграрный университет»

О ЛЕПЕСТКЕ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА В ШИРОКОЕ УКРЕПЛЕННОЕ РУСЛО

Дан анализ результатам экспериментальных и аналитических исследований лепестка свободно растекающегося бурного потока стационарного потока за водопропускными трубами прямоугольного сечения. Выявлено, что на расстоянии от выходной кромки трубы до сечения предельного расширения поток имеет три характерных участка, при этом установлен характер изменения глубин и скоростей на этих участках.

Лепесток растекания, бурный поток, прямоугольная труба, параметры потока.

In this paper we analyze the results of experimental and analytical researches of the petal of the freely spreading turbulent flow of the steady flow behind the culverts of rectangular cross section. It was revealed that the distance from the exit edge of the pipe to the cross section of the maximum expansion the flow has three characteristic parts, the character of depth changes and velocities was determined at these parts.

Spreading petal, turbulent flow, rectangular pipe, flow parameters.

В гидравлике изучение явления начинается с экспериментов и выявления его основных свойств. Объект изучения – водный поток, вытекающий в широкое русло. Результаты экспериментов показывают, что стационарный высокоскоростной водный поток (число Фруда $F > 1$) при его свободном растекании за безнапорным отверстием без подтопления со стороны нижнего бьефа сооружения происходит по типу лепестка (рис. 1).

В своих исследованиях И. А. Шеренков доказал, что при безнапорном вытекании потока из прямоугольной трубы эпюра скоростей близка к равномерной как по ширине трубы, так и на вертикалях [1]. Б. Т. Емцев показал, что влиянием вязкости в водных бурных потоках можно пренебречь [2]. В трудах Д. В. Штеренлихта отмечено, что если трение потока о дно мало, то в окрестности выхода потока из трубы при естественном