

УДК 502/504 : 532.5 : 627.82

**С. Н. КАРАМБИРОВ, Э. С. БЕГЛЯРОВА, А. П. ГУРЬЕВ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный университет природообустройства»

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ВОДОСЛИВА ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ, РАБОТАЮЩЕГО ПО СХЕМЕ ИСТЕЧЕНИЯ ИЗ-ПОД ЗАТВОРА

*Рассматривается гидравлический расчет водослива практического профиля, работающего по схеме истечения из-под затвора.*

*Идеальная жидкость, линия тока, открытие затвора, толщина слоя, расход, коэффициент скорости, свободная поверхность, сплайн-функция.*

*There is considered a hydrodynamic estimation of round-crested weir operating according to the scheme of flowing from under the gate.*

*Ideal liquid, current line, gate opening, layer thickness, consumption, coefficient of speed, free surface, spline function.*

При теоретическом исследовании конкретных задач в механике сплошной среды необходимо задать систему координат, в которой описывается движение жидкости. При записи систем уравнений, определяющих закономерности течения, требуется строить гипотезы и делать предположения, позволяющие учитывать особенности рассматриваемой модели. Будем считать течение стационарным, безвихревым, а жидкость идеальной, несжимаемой, с постоянной плотностью.

Исходной является система уравнений гидродинамики, записанная в естественной системе координат. Координата  $s$  выбирается вдоль линии тока, координата  $n$  – перпендикулярно линии тока (рис. 1).

В обозначениях Милн-Томсона уравнения имеют вид [1–3]:

$$а) \frac{1}{s} \frac{p}{s} - q \frac{q}{s} - \frac{1}{s} = 0;$$

$$б) \frac{1}{n} \frac{p}{n} - s q^2 - \frac{1}{n} = 0;$$

$$в) \frac{q}{s} - s q = 0; \quad (1)$$

$$г) \frac{q}{n} - s q;$$

$$д) s - \frac{1}{s}; \quad n - \frac{1}{n},$$

где  $p = p(s, n)$  – давление;  $q = q(s, n)$  – модуль скорости  $|v|$ ;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\Phi = \Phi(s, n)$  – потенциальная энергия;  $\kappa_s = \kappa_s(s, n)$  – кривизна линии тока  $s$ ;  $\kappa_n = \kappa_n(s, n)$  – кривизна нормали к линии тока  $n$ ;  $\alpha = \alpha(s, n)$  – угол наклона вектора скорости.

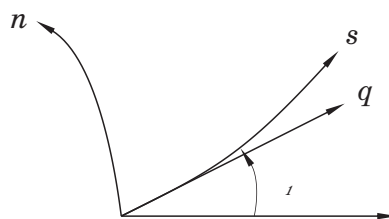


Рис. 1. Система криволинейных координат

Как известно, общие решения дифференциальных уравнений движения содержат произвольные функции и постоянные, которые нужно определять из специальных условий.

Запишем уравнение 1а в следующем виде:

$$\frac{1}{s} \frac{p}{s} - q \frac{q^2}{s} = 0.$$

Отсюда после интегрирования вдоль линии тока получим:

$$\frac{P}{2} - \frac{q^2}{2} = \text{const.} \quad (2)$$

Введем более привычные обозначения:

$v = q$  – скорость;  $y = n$  – нормаль к линии тока, отсчитываемая от усредненной поверхности:  $y = -H/2$  – на поверхности профиля;  $y = H/2$  – на свободной поверхности;

$\frac{1}{s} = K = 1/R$ , где  $K$  – кривизна линий тока;  $R$  – радиус кривизны;  $\frac{dy}{ds} = -1$ , так как направлена в обратную сторону по сравнению с выражением Милн-Томсона (рис. 2).

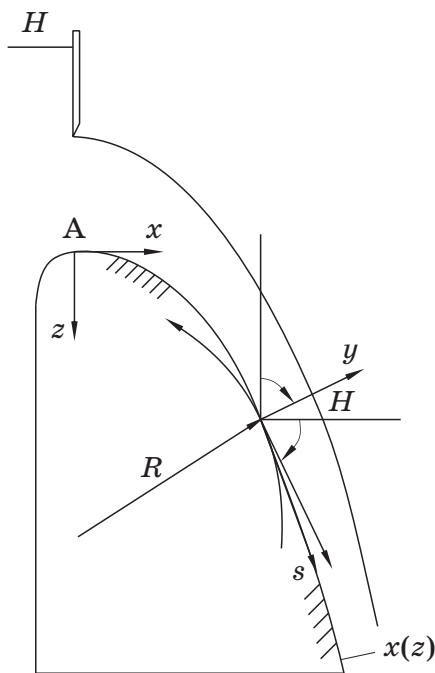


Рис. 2. Схема течения

В расчетной схеме профиль описывается уравнением  $x = x(z)$ , где координаты  $x, z$  отсчитываются от гребня водослива горизонтально и вертикально вниз.

Допустим, что нам известно уравнение какой-либо линии тока  $s = s(z)$ , тогда

имеем:

$$\text{tg} \frac{dz}{ds},$$

или по теореме о производной обратной функции:

$$\text{ctg} = \frac{dz}{ds}.$$

Рассмотрим:

$$\cos \frac{\text{ctg}}{\sqrt{1 - \text{ctg}^2}} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

Для получения кривизны можно использовать известную из математического анализа формулу:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 x}{dz^2}}{1 - \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}.$$

Последнее выражение совпадает с

производной  $\frac{d \cos}{dz}$ .

Поскольку вторая производная выпуклой вверх функции имеет отрицательное значение, получается следующее выражение:

$$K = \frac{1}{R} = - \frac{d(\cos)}{dz}. \quad (3)$$

С помощью уравнения (1г) запишем уравнение отсутствия вихря:

$$\frac{v}{y} - \frac{v}{R} = 0. \quad (4)$$

Разложим функцию  $v$  в ряд Тейлора по  $y$ :

$$v_{(y)} = v_{(0)} + v'_{(y)} y + \frac{v''_{(0)}}{2} y^2 + \dots$$

Поскольку  $|y| \ll \frac{H}{2}$ , а толщина слоя предполагается величиной малой, оставим в разложении первые два члена. Среднее значение:

$$\bar{v} = \frac{H}{2} \frac{v dy}{H} = v(0).$$

С учетом этого уравнение (4) примет следующий вид:

$$\frac{v}{y} = \frac{v(0)}{R(0)} = \frac{v}{R};$$

$$v \frac{y}{R} = A, \quad (5)$$

где  $\bar{v}$  и  $\bar{R}$  – скорость и радиус кривизны на средней линии струи соответственно;

$$\bar{v} = \frac{1}{H} \int_0^{\frac{H}{2}} v dy. \quad (6)$$

Подставляя в последнее равенство выражение для скорости, получим:

$$v = \bar{v} \left( 1 + \frac{y}{R} \right). \quad (7)$$

Уравнение неразрывности (1в) эквивалентно постоянству расхода в поперечном сечении струи:

$$\int_0^{\frac{H}{2}} v(y) dy = \bar{v} H = \frac{Q}{b}, \quad (8)$$

где  $b$  – ширина водослива.

Таким образом, распределение скорости в струе подчиняется закону:

$$v = \frac{Q}{bH} \left( 1 + \frac{y}{R} \right). \quad (9)$$

В уравнение Бернулли (2) подставим выражение для потенциальной энергии, которое получается проекцией произвольной точки течения на вертикаль в текущей точке (величины, относящиеся к профилю, имеют индекс *проф*):

$$g \left[ \left( \frac{H}{2} + y \right) \cos z_{\text{проф}} \right]. \quad (10)$$

В верхнем бьефе имеем:

$$p = p_a; v = 0; \quad \gamma = gH, \quad (11)$$

где  $p_a$  – атмосферное давление;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Отсюда получим:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + g \left[ \left( \frac{H}{2} + y \right) \cos z_{\text{проф}} \right] \quad (12)$$

$$\frac{p_a}{\gamma} = gH.$$

После деления выражения (12) на  $g$  и подставляя выражение (9), имеем:

$$\frac{p - p_a}{g} = \frac{Q^2}{2gH^2 b^2} \left( 1 + \frac{y}{R} \right)^2 + z_{\text{проф}} \left( \frac{H}{2} + y \right) \cos \alpha. \quad (13)$$

Уравнения для определения  $H(z)$  можно получить из условия на свободной поверхности струи:

$$y = \frac{H}{2}, \quad p = p_a.$$

Из (13) получим:

$$\frac{Q^2}{2gH^2 b^2} \left( 1 + \frac{H}{2R} \right)^2 = H \cos \alpha + z_{\text{проф}}. \quad (14)$$

Рассмотрим функцию

$$F(H, K) = \frac{Q^2}{2gH^2 b^2} \left( 1 + \frac{H}{2} K \right)^2 - H, \quad (15)$$

где  $K = 1/R$  – кривизна;  $\alpha = \cos \alpha$ .

В формуле (14) значение  $H$  вычисляется по значениям  $\alpha$  и  $K$  на средней линии тока. Обозначим их  $\alpha_{\text{проф}}$  и  $K$ .

Для расчета последних величин рассмотрим детальнее схему течения (рис. 3). Обозначим:  $\alpha_{\text{проф}}$  – угол на поверхности профиля;  $\alpha_{\text{св}}$  – угол для свободной поверхности струи.

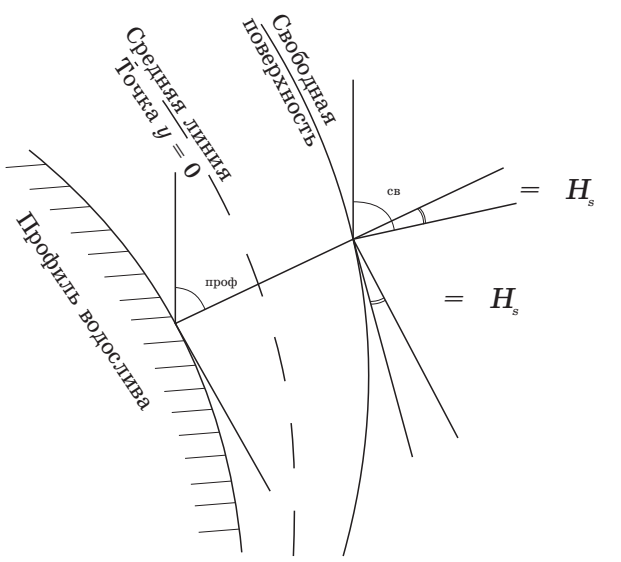


Рис. 3. Соотношение углов наклона вектора скорости

Поскольку струя сужается по течению воды, угол на поверхности струи увеличивается по сравнению с углом на профиле на величину  $\alpha_{\text{св}} - \alpha_{\text{проф}}$ . Малые значения изменения толщины струи позволяют заменить малый угол производной:

$$\tan(\alpha_{\text{св}} - \alpha_{\text{проф}}) \approx \alpha_{\text{св}} - \alpha_{\text{проф}}. \quad (16)$$

Знак минус учитывает сужение струи. Тогда

$$\alpha_{\text{св}} = \alpha_{\text{проф}} + \frac{dH}{dS}. \quad (17)$$

Угол на средней линии тока:

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} \cos \theta_{\text{проф.}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} \sin \theta_{\text{проф.}} \right) \quad (18)$$

С помощью (17) и (18) выразим  $\theta$  и  $K$  на средней линии тока. Так, после разложения выражения для  $\theta$  в ряд Тейлора имеем:

$$\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \approx \cos \theta_{\text{проф.}} - \frac{1}{2} \sin \theta_{\text{проф.}} \frac{d\theta}{dz} \quad (19)$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dz} \cos \theta_{\text{проф.}} = -\frac{1}{2} \sin \theta_{\text{проф.}} \frac{d\theta}{dz} \quad (20)$$

С помощью соотношения  $\frac{dS}{dz} = \frac{d}{dz} \sin \theta$  получим формулы:

$$\frac{d}{dz} \cos \theta_{\text{проф.}} = -\frac{1}{2} \sin \theta_{\text{проф.}} \frac{d\theta}{dz} \quad (22)$$

где  $\frac{1}{2} \sin \theta_{\text{проф.}} \frac{d\theta}{dz} = \frac{dS}{dz}$   $(23)$

$$\frac{1}{2} \sin \theta_{\text{проф.}} \frac{d\theta}{dz} = \frac{dS}{dz} \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \sin^2 \theta_{\text{проф.}} \frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{d^2 S}{dz^2} \quad (25)$$

Учитывая малость значений  $\theta$ ,  $K$  и  $H$ , разложим функцию (14) в ряд с точностью до квадратов  $\theta$ ,  $K^2$ ,  $H^2$ :

$$F(H, \theta, K) \approx F(H_{\text{проф.}}, \theta_{\text{проф.}}, K_{\text{проф.}}) + \frac{F}{H} (H - H_{\text{проф.}}) + \frac{F}{K} (K - K_{\text{проф.}}) + \frac{F}{2} \theta^2 \quad (26)$$

$$\frac{F}{H} (H - H_{\text{проф.}}) + \frac{F}{K} (K - K_{\text{проф.}}) + \frac{F}{2} \theta^2 \quad (27)$$

$$\frac{F}{K} = \frac{Q^2}{2gHb^2} \left[ 1 - \frac{H}{2} K \right] \quad (28)$$

Таким образом, можно предложить следующий метод расчета свободной поверхности:

1. Находится функция  $\theta_{\text{проф.}}(z)$  и  $K_{\text{проф.}}(z)$  на расчетном профиле  $x(z)$ .
2. Находится функция  $H_{\text{проф.}}(z)$  из уравнения первого приближения (15):

$$\frac{Q^2}{2gH^2b^2} \left( 1 - \frac{HK_{\text{проф.}}}{2} \right)^2 = H_{\text{проф.}} - z_{\text{проф.}} \quad (29)$$

3. Аппроксимируются значения  $H$ , найденные в расчетных точках с помощью сплайн-функций. Выбор последних обусловлен тем, что сплайны проходят через все заданные точки и имеют достаточную гладкость, в то время как выбор регрессионной модели требует вмешательства человека и может привести к значительным погрешностям.

4. Находится  $\theta(z)$  и  $K(z)$  по формулам (23) и (24).

5. Находится  $H$  из соотношения (так как  $F = H - z_{\text{проф.}} = \text{const}$ ):

$$\frac{F}{H} = H - \frac{F}{K} = K - \frac{F}{H} \quad (30)$$

6. Подставляя в (30) найденные значения  $\theta$ ,  $K$  и производные (26)...(28), получаем уточненные значения:

$$H = H_{\text{проф.}} + \frac{F}{K} \quad (31)$$

Для определения эпюры давлений по толщине слоя воспользуемся уравнением (13):

$$\frac{p}{g} = \frac{p_a}{g} + H - \frac{Q^2}{2gH^2b^2} \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - z_{\text{проф.}} \left( \frac{H}{2} - y \right) \cos \theta \quad (32)$$

В дальнейшем рассмотрим только избыточное давление. Расход через водослив определим по известной формуле:

$$Q = ab \sqrt{2gH} \quad (33)$$

где  $\mu$  – коэффициент сжатия струи;  $\sigma$  – коэффициент скорости;  $a$  – открытие затвора;  $b$  – ширина водосливного фронта.

Учитывая, что  $\bar{R} = R_{\text{проф.}} \frac{H}{2}$ , получим:

$$\frac{P_{\text{изб}}(y)}{g} = H \frac{2^2 a^2 H}{H^2} \left( 1 - \frac{y}{R_{\text{проф}} H/2} \right)^2 \quad (34)$$

$$z_{\text{проф}} = \frac{H}{2} y \cos_{\text{проф}} \frac{1}{2} \sin^2_{\text{проф}} \frac{dH}{dz},$$

где  $y$  меняется от  $-H/2$  до  $H/2$ .

Чтобы привести выражение (34) к безразмерному виду, разделим его на толщину слоя  $H$ . Для построения эпюры скорости используем формулу (9), подставив в нее выражения для расхода и среднего радиуса:

$$v(y) = \frac{a \sqrt{2gH}}{H} \left( 1 - \frac{y}{R_{\text{проф}} H/2} \right) \quad (35)$$

Решение задачи расчета водослива начинается с задания его профиля. Алгоритм расчета накладывает на кривую профиля минимальные ограничения: выпуклость вверх, монотонность, существование не ниже второй производной. Профиль может задаваться аналитическим выражением или в виде таблицы. В последнем случае требуется аппроксимация зависимости, заданной в узлах. В качестве примера рассмотрим наиболее распространенный профиль водослива Кригера–Офицера (рис. 4).

Хорошие результаты получены для степенной аппроксимации:

$$X = 1,5129Z^{0,56} - 0,0033. \quad (36)$$

По приведенной методике были проведены расчеты водослива с подпором

для профиля Кригера–Офицера (таблица).

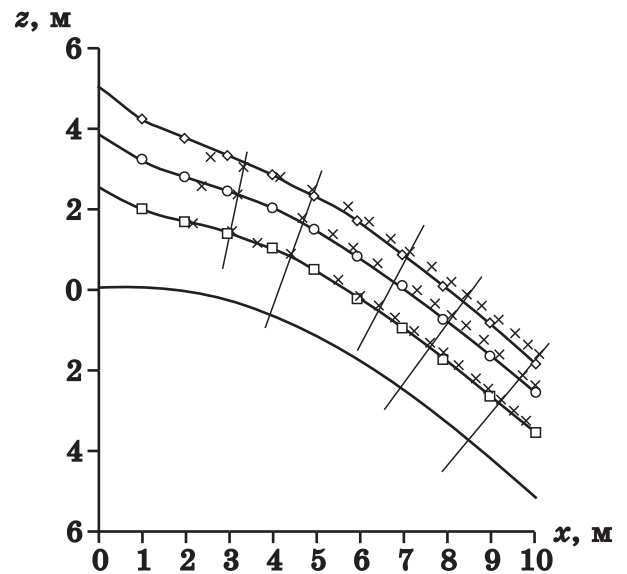


Рис. 4. Сравнение теоретического и экспериментального профиля свободной поверхности: — профиль; □  $a = 2,5$  м; ○  $a = 3,75$  м; ◇  $a = 5$  м; × расчет

Для проверки адекватности теории проведем сравнение результатов расчетов с натурными исследованиями одной из основных характеристик течения – профилем свободной поверхности. Условия натуральных экспериментов: верхний бьеф  $H = 9,5$  м; открытие затвора  $a = 2,5$  м;  $3,75$  м;  $5$  м (три случая).

В процессе сравнения теоретического и экспериментального профилей

### Результаты расчета профиля водослива

$N$	$z$	$x$	$h_1$	$h_2$	$p/\gamma$
0	0,070	0,504	0,3161	0,3220	9,1235
1	0,257	0,870	0,3177	0,3199	9,6021
2	0,444	1,123	0,3096	0,3108	9,7628
3	0,631	1,332	0,2998	0,3006	9,8406
4	0,819	1,515	0,2900	0,2905	9,8827
5	1,006	1,680	0,2807	0,2811	9,9067
6	1,193	1,833	0,2721	0,2724	9,9211
7	1,380	1,975	0,2642	0,2645	9,9306
8	1,567	2,108	0,2570	0,2572	9,9380
9	1,754	2,235	0,2503	0,2590	9,9448
10	1,941	2,356	0,2443	0,2443	9,9517
11	2,129	2,472	0,2386	0,2386	9,9589
12	2,316	2,584	0,2334	0,2334	9,9664
13	2,503	2,692	0,2285	0,2285	9,9738
14	2,690	2,796	0,2240	0,2240	9,9808
15	2,877	2,897	0,2197	0,2197	9,9873
16	3,064	2,995	0,2156	0,2156	9,9928
17	3,251	3,091	0,2117	0,2117	9,9970

свободной поверхности при различных открытиях затвора было установлено, что в целом теория хорошо согласуется с экспериментом. Лучшие результаты получены для наименьшего открытия затвора  $a = 2,5$  м, так как при этом выполняются практически все допущения течения в тонком слое. С увеличением величины  $a$  наблюдается тенденция уменьшения расчетной толщины течения по сравнению с наблюдаемой у гребня водослива и ее превышение в устье.

Однако абсолютная величина отклонений является вполне приемлемой для инженерных расчетов, и проведение еще одной итерации нуждается в серьезном обосновании.

#### Выводы

Анализ результатов показывает, что у гребня водослива на профиле устанавливается вакуум, значение которого уменьшается вдоль течения и в конце концов давление становится равным атмосферному, что соответствует критерию построения профиля.

Влияние второго приближения сказывается лишь у гребня, что объясняется относительно небольшими радиусами кривизны и максимальной для потока толщиной течения. Поправка направлена в сторону увеличения толщины слоя.

Ниже по профилю радиус кривизны струи практически совпадает с радиусом профиля, и значение поправки становится пренебрежимо малым.

На всем протяжении профиля скорость в поперечном сечении изменяется по линейному закону, увеличиваясь вниз по течению. Максимального значения скорость достигает на профиле водослива.

Давление в сечении изменяется по квадратичному закону, изменяясь от вакуума на профиле, переходя в избыточное давление внутри течения и в атмосферное на свободной поверхности

1. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 563 с.

2. **Милн-Томсон Л.** Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.

3. Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений: справ. пособие / Д. Д. Лапко [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 624 с.

4. Пропускная способность водосбросов гидроэлектростанций / В. С. Серков [и др.] – М.: Энергия, 1974. – 119 с.

Материал поступил в редакцию 01.06.10.  
**Карамбиров Сергей Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры «Вычислительная техника и математическое программирование»  
Тел. 8 (499) 153-97-66

**Беглярова Эвелина Суреновна**, кандидат технических наук, профессор кафедры «Комплексное использование водных ресурсов»  
Тел. 8 (499) 976-21-56

**Гурьев Алим Петрович**, кандидат технических наук, профессор кафедры «Комплексное использование водных ресурсов»  
Тел. 8 (499) 976-21-56