с тяжелым наносным и гидрологическим режимами: дис. ... канд. техн. наук. – Новочеркасск, НИМИ, 1975. – 184 с.

Материал поступил в редакцию 12.05.2015.

***Кловский Алексей Викторович**, аспирант,*
E-mail: Alexey.Klovskiy@yandex.ru
Тел. 8 (903) 541-07-85
***Румянцев Игорь Семенович**, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, почетный член РААСН*
***Козлов Дмитрий Вячеславович**, доктор технических наук, профессор, проректор по инновационному развитию*
E-mail: kozlovdv@mail.ru
Тел. 8 (499) 976-29-62

УДК 502/504 : 627.8 : 532.5

В. А. ФАРТУКОВ
ЗАО «Бюро сервиса и эксплуатации» BSM, г. Москва

М. В. ЗЕМЛЯННИКОВА
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева», г. Москва

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИЖНЕГО БЬЕФА

В статье рассмотрен случай нелинейных колебаний, возникающих в нижнем бьефе при установившемся режиме течения открытого водного потока. Приводится нелинейное уравнение, в котором энергия водного потока диссипирует при больших амплитудах колебания водной поверхности и генерируется при малых значениях амплитуд колебания. Эта система обладает предельными циклами, колеблющихся около состояния, при котором приток и диссипация энергии сбалансированы и определено наличие бифуркаций векторных полей течения воды. Установлено, что в рассмотренной колебательной системе незатухающие колебания практически могут существовать при наличии некоторого источника энергии, который компенсирует расход энергии, возникший за счет присутствия диссипативных сил. Получено нелинейное уравнение для описания протекающего колебательного процесса в открытом водном потоке нижнего бьефа гидротехнического сооружения при сопряжении бьефов в виде гидравлического прыжка. Уравнение позволяет определять параметры нелинейных колебаний (амплитуда волны, частота колебаний, длина волны) возникающих в нижнем бьефе при установившемся режиме течения потока. Результаты вычислений позволяют осуществить коррекцию размеров гасителей энергии водного потока при решении многих практических задач гидротехнических сооружений.

Структура потока, установившийся режим, диссипация энергии, бифуркация, автоколебательный процесс.

The article considers a case of non-linear vibrations arising downstream under a stable regime of open water flow. There is given a non-linear equation in which the energy of water flow dissipates at high amplitudes of water surface vibrations and generates at small values of vibration amplitudes. This system possesses limit cycles vibrating near the state under which the inflow and energy dissipation are balanced and availability of bifurcations of vector fields of water flow is determined. It is established that in the considered vibration system undamped vibrations can practically exist at the availability of some source of energy which compensates power consumption arising due to present dissipative forces. The non-linear equation is obtained for describing a flowing process in the open water current of the lower pond of the hydraulic structure at ponds conjugation in the way of hydraulic jump. The equation allows determining parameters of non-linear vibrations (wave amplitude, frequency of vibrations,wave length) arising downstream under the stable regime of flow current. The results of calculations make it possible to carry out correction of sizes of energy dissipaters of the water flow when deciding many practical tasks of hydraulic structures.

Flow structure, steady regime, energy dissipation, bifurcation, astable process.

Одной из характерных особенностей режима течения водного потока в нижнем бьефе (для случая сопряжения бьефов в виде гидравлического прыжка) является наличие стоячих волн на поверхности потока. Данный режим течения воды в зоне сопряжения сопровождается волнами с характерной амплитудой и длиной.

Природа их образования и развития нуждается в изучении физики протекающего процесса с последующей количественной оценкой его параметров, которые оказывают существенное влияние как на работу гасителя водной энергии, так и на его (гасителя) размеры.

В основе модели процесса образования стационарных нелинейных колебаний в нижнем бьефе находится система уравнений мелкой воды в приближении Сен-Венана, причем система уравнений Сен-Венана представлена в дивергентной форме, позволяющей охватить так называемые разрывные решения.

Как известно, система уравнений Сен-Венана является следствием уравнений Рейнольдса [1, 2], при этом сглаживание турбулентных пульсаций нормального уровня (то есть тех пульсаций, которые порождены трением на границе «жидкость – омываемая твердая поверхность», а не турбулентных пульсаций возникающих в зонах отрывных течений) возможно при осреднении уравнений Навье-Стокса.

В зоне гидравлического прыжка, как и во всех других случаях отрывных течений, образуется макротурбулентность, имеющая характерный временной масштаб T_m, который существенно больше временного масштаба T_n, отвечающего обычному уравнению турбулентности без отрывных течений с зависимыми от времени t ($T_m > t > T_n$) характеристиками прыжкового потока. Так же необходимо заметить, что уравнение сопряженных глубин может быть применено только в случае увеличения периода временного сглаживания.

Тогда используя систему дифференциальных уравнений, описывающих нестационарный режим течения водного потока в зоне прыжкового сопряжения, и, предварительно произведя необходимые подстановки, получили нелинейное уравнение локальной нестационарности (1).

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial\left(v_c\cdot\Omega\right)}{\partial t}+\frac{q_2^2}{g\cdot h_2}-\frac{q_1^2}{g\cdot h_1}+\frac{h_2^2-h_1^2}{2}=0;$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}=q_1-q_2,$$

где h_1, h_2 – соответственно величина первой и второй сопряженных глубин; q_1, q_2 – соответственно величина удельного расхода в зонах первой и второй сопряженных глубин; v_c – скорость центра массы объема; Ω – площадь боковой поверхности гидравлического прыжка при аппроксимации продольного профиля в виде квадратичной параболы.

Необходимо заметить, что в случае увеличения периода временного сглаживания до значения, при котором производные $\partial(v_c\Omega)/\partial t$ и $\partial\Omega/\partial t$ обратятся в ноль, будет иметь место уравнение сопряженных глубин Беланже-Бресса.

Авторы статьи рассмотрели основную систему дифференциальных уравнений нестационарного режима движения водного потока в зоне прыжкового сопряжения, приведенную в [3, 4], представив ее в безразмерном виде, разделив на длину прыжка l и $\sqrt{l/g}$:

$$\frac{l^2}{3g\cdot h'_2}\cdot\frac{d\left(\frac{h_2 dh_2}{dt}\right)}{dt}+\frac{q_2^{\,2}}{g\cdot h_2}-\frac{q_1^{\,2}}{q\cdot h_1}+$$

$$+\left(h_2^{\,2}-h_1^{\,2}\right)=0; \qquad (1)$$

$$\frac{2l}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=q_1-q_2, \qquad (2)$$

где q – удельный расход; h_1 и h_2 – соответственно, первая и вторая сопряженные глубины; h'_2 – осредненное значение второй сопряженной глубины; l – длина гидравлического прыжка.

Выразили

$$q_2=q_1-{}^2\!/_3\cdot l\cdot\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t},$$

подставили это выражение в уравнение (1), раскрыв скобки, произведя сокращения подобных членов уравнения, получили:

$$\frac{l^2}{3gh'_2}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\frac{h_2\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}-{}^4\!/_3\, l\cdot q_1/\left(gh_2\right)\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}+$$

$$+{}^4\!/_9\, l^2/\left(q\cdot h_2\right)\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\left(h_2^{\,2}-h_1^{\,2}\right)}{2}=0 \qquad (3)$$

или

$$\frac{l^2h_2}{3gh'_2}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}+q_1^{\ 2}/(gh_2)-4/3\, l\cdot q_1/(gh_2)\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}+$$

$$+4/9\, l^2(gh_2)\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{q'_1}{gh_1}+\frac{\left(h_2^{\ 2}-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0;$$

$$\frac{q'_1}{gh_1}+\frac{\left(h_2^{\ 2}-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0. \qquad (4)$$

Разделив почленно уравнение (4) на $(l^2h_2)/(3gh'_2)$, получили:

$$\frac{\mathrm{d}^2h_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3gh'_2}{l^2h_2}\frac{q_1^{\ 2}}{gh_2}-\frac{4}{3}\frac{gh'_2}{l^2h_2}\frac{3lq_1}{gh_2}\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}+$$

$$+\frac{4}{9}\frac{gh'_2}{l^2h_2}\frac{3l^2}{gh_2}\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3gh'_2}{l^2h_2}\frac{q_1^{\ 2}}{gh_1}+$$

$$+\frac{3gh'}{l^2h_2}\frac{\left(h_2^{\ 2}-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0. \qquad (5)$$

После проведения необходимых сокращений в уравнении (5), получили:

$$\frac{\mathrm{d}^2h_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3h'_2}{l^2h_2^{\ 2}}q_1^{\ 2}-\frac{4h'_2}{lh_2^{\ 2}}q_1\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}+$$

$$+\frac{4}{3}\frac{h'_2}{h_2^{\ 2}}\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3h'_2}{l^2h_2h_1}q_1^{\ 2}+$$

$$+\frac{3gh'_2}{l^2h'_2}\frac{\left(h_2^{\ 2}-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0. \qquad (6)$$

В уравнении (6) приняли, что $h^3_{\text{кр}}=q_1^{\ 2}/g$:

$$\frac{\mathrm{d}^2h_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3gh'_2}{l^2h_2^{\ 2}}h^3_{\text{кр}}-\frac{4q_1h'_2}{l^2h_2}\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}+\frac{4}{3}\frac{h'_2}{h_2^{\ 2}}\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-$$

$$-\frac{3gh'_2}{l^2h_2h_1}h^3_{\text{кр}}+\frac{4}{3}\frac{h'_2}{h_2^{\ 2}}\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3gh'_2}{l^2h_2}h^3_{\text{кр}}+$$

$$+\frac{3gh'_2}{l^2h_2^{\ 2}}\frac{\left(h_2^{\ 2}-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0. \qquad (7)$$

Так как $h_2=h'_2+\zeta$, то

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(h'_2+\zeta\right)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3gh'_2}{l^2}\frac{h^3_{\text{кр}}}{\left(h'_2+\zeta\right)}-$$

$$-\frac{4q_1h'_2}{l\left(h'_2+\zeta\right)^2}\frac{d\left(h'_2+\zeta\right)}{dt}+$$

$$+\frac{4h'_2}{3\left(h'_2+\zeta\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}\left(h'_2+\zeta\right)}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3g\left(h'_2+\zeta\right)}{\left(h'_2+\zeta\right)\left(l^2h_1\right)}h^3_{\text{кр}}+$$

$$+\frac{3g\cdot h'_2}{l^2\cdot\left(h'_2+\zeta\right)}\cdot\frac{\left(\left(h'_2+\zeta\right)-h_1^{\ 2}\right)}{2}=0$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3g\cdot h'_2\cdot h^3_{\text{кр}}}{l^2\cdot\left(h'^{\,2}_2\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)\right)^2}-$$

$$\frac{4q_1h'_2}{l\cdot h'^{\,2}_2\left(1+\frac{\zeta}{h'^{\,2}_2}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+$$

$$+\frac{4h'_2}{3h'^{\,2}_2\left(1+\frac{\mathrm{d}}{h'_2}\right)}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{l^2\cdot h_1}+$$

$$+\frac{3g\cdot h'_2}{l^2\cdot h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\frac{h'^{\,2}_2+2h'_2\cdot\zeta+\zeta^2-h_1^{\ 2}}{2}=0.$$

Проверка на размерность полученного выражения:

$$\frac{m}{c^2}+\frac{m\cdot m\cdot m^3}{c^2\cdot m^2\cdot m^2}-\frac{m^2\cdot m\cdot m}{c\cdot m\cdot m^2\cdot c}+$$

$$+\frac{m\cdot m^2}{m^2\cdot c^2}-\frac{m\cdot m^3}{c^2\cdot m^2\cdot m}+\frac{m\cdot m\cdot m^2}{c^2\cdot m^2\cdot m},$$

которая показала, что размерность не нарушена.

Тогда:

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{l^2\cdot h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}-\frac{4q_1}{l\cdot h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+$$

$$+\frac{4}{3h'_2\cdot\left(1+\frac{\mathrm{d}}{h'_2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{l^2\cdot h_1}+$$

$$+\frac{3g}{l^2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)}\cdot\left(\frac{h'^2_2+2h'_2\cdot\zeta+\zeta^2-h^2_1}{2}\right)=0. \qquad (8)$$

В уравнении (8) приняли длину гидравлического прыжка равной трем значениям второй сопряженной глубины $l=3h'_2$, тогда:

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{9h'^2_2\cdot h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}-\frac{4q_1}{3h'^2_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+$$

$$+\frac{4}{3h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{9h'^2_2\cdot h_1}+$$

$$+\frac{3g}{9h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)}\cdot\frac{\left(h'^2_2+2h'_2\cdot\zeta+\zeta^2-h^2_1\right)}{2}=0. \qquad (9)$$

Проверка размерности полученного уравнения (9):

$$\frac{m}{c^2}+\frac{m\cdot m^3}{c^2\cdot m^2\cdot m}-\frac{m^2\cdot m}{c\cdot m^2\cdot c}+\frac{m^2}{m\cdot c^2}-$$
$$-\frac{m\cdot m^3}{c^2\cdot m^2\cdot m}+\frac{m\cdot m^2}{c^2\cdot m^2}=\frac{m}{c^2}.$$

Уравнение (9) привели к безразмерному виду, разделив почленно на h'_2 и $\sqrt{h'_2/g}$:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{3g\cdot h^3_{\text{кр}}}{9h'^2_2\cdot h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}-$$
$$-\frac{4q_1}{3h'^2_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+$$
$$+\frac{4}{3h'_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)^2}\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2-\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'_2\cdot h_1}+$$
$$+\frac{1}{3h'^2_2\cdot\left(1+\frac{\zeta}{h'_2}\right)}\cdot\left(\frac{h'^2_2}{2}+h'_2\cdot\zeta+\frac{\zeta^2}{2}-\frac{h^2_1}{2}\right)=0. \quad (10)$$

Избавились от рациональности, произведя необходимые разложения:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'^3_2}\cdot\left(\left(1-\frac{\zeta}{3h'_2}\right)+\frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right)-$$
$$-\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{3h'^{3/2}_2}\cdot\left(1-\frac{\zeta}{3h'_2}\right)+\frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\cdot\frac{d\zeta}{dt}-$$
$$-\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'^2_2\cdot h_1}+\frac{1}{3h'^2_2}\cdot\left(\left(1-\frac{\zeta}{h'_2}+\frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{h'^2_2}{2}+h'_2\cdot\zeta+\frac{\zeta^2}{2}-h^2_1\right)\right)+$$
$$+\frac{4}{3h'_2}\cdot\left(1-\frac{\zeta}{3h'_2}+\frac{\zeta^2}{24h'^2_2}\right)\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=0. \quad (11)$$

Раскрыв скобки, получили:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'^3_2}-\frac{\zeta\cdot h^3_{\text{кр}}}{9h'^4_2}+\frac{\zeta^2\cdot h^3_{\text{кр}}}{72h'^5_2}-$$
$$-\left(\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{3h'^{3/2}_2}-\frac{4\zeta\cdot h^{3/2}_{\text{кр}}}{9h'^{5/2}_2}+\frac{\zeta^2 h^{3/2}_{\text{кр}}}{18h'^{7/2}_2}\right)\cdot\frac{d\zeta}{dt}+$$
$$+\left(\frac{4}{3h'_2}-\frac{4\zeta}{9h'^2_2}+\frac{\zeta^2}{18h'^3_2}\right)\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2-$$
$$-\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'^2_2 h_1}+\frac{h'^2_2}{6h'^2_2}+\frac{h'_2\cdot\zeta}{3h'^2_2}+\frac{\zeta^2}{6h'^2_2}-\frac{h^2_1}{6h'^2_2}-$$
$$-\frac{\zeta\cdot h'^2_2}{18h'^3_2}-\frac{\zeta^2\cdot h'_2}{9h'^3_2}-\frac{\zeta^3}{18h'^3_2}+\frac{\zeta\cdot h^2_1}{18h'^3_2}+$$
$$+\frac{\zeta^2\cdot h'^2_2}{12h'^4_2}+\frac{\zeta^3\cdot h'_2}{6h'^4_2}+\frac{\zeta^4}{12h'^4_2}-\frac{\zeta^2 h^2_1}{12h'^4_2}=0. \quad (12)$$

Исходя из условий не возмущений в уравнении (12) исключили члены:

$$\frac{h^3_{\text{кр}}}{3h'^3_2};\ \frac{h'^3_{\text{кр}}}{3h'^2_2\cdot h_1};\ \frac{h'^2_2}{6h'_2};\ \frac{h^2_1}{6h'^2_2}.$$

Одновременно решение полученного уравнения проводили методом малого параметра [5–9]. Приняли за малый параметр $\mu=1/h'^2$ [3], и уравнение (12) приняло следующий вид:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\mu^4\cdot\frac{h^3_{\text{кр}}}{9\zeta}+\mu^5\cdot\left(\frac{h^3_{\text{кр}}}{72}\right)\zeta^2-$$
$$-\mu^{3/2}\cdot\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{3}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\mu^{5/2}\cdot\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{9}\cdot\zeta\cdot\frac{d\zeta}{dt}-$$
$$-\mu^{7/2}\cdot\frac{h^{3/2}_{\text{кр}}}{18}\cdot\zeta^2\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\mu^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\zeta^2-$$
$$-\mu^2\cdot\frac{1}{18}\cdot\zeta-\mu^2\cdot\frac{1}{9}\cdot\zeta^2-\mu^3\cdot\frac{1}{18}\cdot\zeta^3+$$
$$+\mu^3\cdot\frac{h^2_1}{18}\cdot\zeta+\mu^2\cdot\frac{1}{12}\cdot\zeta^2+\mu^3\cdot\frac{1}{6}\cdot\zeta^3+$$
$$+\mu^4\cdot\frac{1}{12}\cdot\zeta^4-\mu^4\cdot\frac{h^2_1}{12}\cdot\zeta^2+\mu\cdot\frac{1}{3}\cdot\zeta=0. \quad (13)$$

После алгебраических преобразований получили:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\mu^{3/2}\cdot\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{3}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\mu\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2-$$
$$-\mu^2\cdot\frac{4}{9}\cdot\zeta\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2+\mu^2\cdot\frac{5}{36}\cdot\zeta^2-$$
$$-\mu^2\cdot\frac{\zeta}{18}+\mu\cdot\frac{\zeta}{3}=0.$$

или

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\mu^2\cdot\frac{4\zeta}{9}\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2-\zeta^2\cdot\frac{5}{36}+\frac{\zeta}{18}-$$
$$-\mu^{3/2}\cdot\frac{4h^{3/2}_{\text{кр}}}{3}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\mu\cdot\left(\frac{\zeta}{3}+4\cdot\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)=0. \quad (14)$$

Полученное уравнение описывает стационарные нелинейные колебания в нижнем бьефе.

Выводы

Полученное нелинейное уравнение описывает протекающий колебательный процесс в открытом водном потоке нижнего бьефа гидротехнического сооружения для случая сопряжения бьефов в виде гидравлического прыжка. Это выражение позволяет определять параметры нелинейных колебаний (амплитуда волны, частота колебаний, длина волны) возникающих в нижнем бьефе при установившемся режиме течения потока. Результаты вычислений применимы для коррекции размеров гасителей энергии водного потока при решении многих практических задач гидротехнических сооружений.

1. **Грушевский М. С.** Неустановившееся движение воды в реках и каналах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 288 с.

2. **Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А.** Численные методы в задачах речной гидравлики. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 256 с.

3. **Землянникова М. В. Фартуков В. А.** Обобщенные нелинейные уравнения локальной нестационарности // Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении: сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции. — М.: МГУП, 2003. — С. 136–137.

4. **Землянникова М. В. Фартуков В. А.** Уравнения локальной нестационарности при прыжковых сопряжениях. / Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции «Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении». — М.: МГУП, 2003. — С.137-138.

5. **Найфэ А. Ю.** Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 454 с.

6. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969. — 379 с.

7. **Кузьмина Р. П.** Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 336 с.

8. **Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.** Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.

9. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. — 407 с.

Материал поступил в редакцию 16.06.2014.

Фартуков Василий Александрович,
кандидат технических наук, доцент
E-mail: vasfar@mail.ru
Тел.: 8 (916) 653-17-59
Землянникова Марина Владимировна,
кандидат технических наук, профессор кафедры «Гидрологии, гидрогеологии и регулирования стока»
Тел.: 8 (499) 976-22-27