05.23.16 Гидравлика и инженерная гидрология

Оригинальная статья
УДК 502/504: 626/627:514.122.2:517.7
DOI: 10.26897/1997-6011-2021-4-85-89

К РАСЧЕТУ ДЛИНЫ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОЧЕРТАНИЯ

АНАХАЕВ КОШКИНБАЙ НАЗИРОВИЧ[1✉]***,*** *д-р техн. наук, профессор, эксперт РАН*
anaha13@mail.ru✉
АМШОКОВ БАТЫР ХАШИРОВИЧ[2]***,*** *канд. техн. наук, доцент*
ambat72@mail.ru
АНАХАЕВ КАЙСЫН КОШКИНБАЕВИЧ[2]***,*** *аспирант*
k.anahaev.k @mail.ru
[1] Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН), г. Нальчик. Россия
[2] Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет (КБГАУ), г. Нальчик. Россия

Гиперболические кривые используются при проведении различных теоретических и практических исследований, в том числе в области водохозяйственного и природоохранного строительства при расчетах различных геофизических объектов с гиперболическими очертаниями (поверхностей береговых склонов, линий скольжения оползневых массивов, струенаправляющих дамб, водосливных поверхностей водосбросов, траекторий свободного падения воды и др.). Точное определение длины дуги гиперболы представлено достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» неполных эллиптических интегралах, что затрудняет проведение аналитических расчетов и предполагает использование табличных данных с трудоемкой перекрестной и нелинейной их интерполяцией, и др. Предложены элементарные зависимости для определения длины дуги гиперболы, которые дают весьма близкое приближение (до 1%) к точным значениям. Полученные расчетные аналитические зависимости для определения длины дуги гиперболы рекомендуются для практического использования при проведении теоретических и прикладных исследований в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: *конические сечения, гиперболическая кривая, гипербола, длина дуги гиперболы, неполные эллиптические интегралы, водохозяйственные объекты*

Формат цитирования: *Анахаев К.Н., Амшоков Б.Х., Анахаев К.К. К расчету длины геофизических объектов гиперболического очертания // Природообустройство. – 2021. – № 4. – С. 85-89. DOI: 10.26897/1997-6011-2021-4-85-89.*

Original article

TO THE CALCULATION OF LENGTH OF GEOPHYSICAL OBJECTS OF HYPERBOLIC OUTLINE

ANAKHAEV KOSHKINBAJ NAZIROVICH[1✉]***,*** *candidate of technical sciences, associate professor*
anaha13@mail.ru✉
AMSHOKOV BATYR KHASHIROVICH[2]***,*** *candidate of technical sciences, associate professor*
ambat72@mail.ru

ANAKHAEV KAISYN KOSHKINBAEVICH[2]***,*** *post graduate student*

k.anahaev.k @mail.ru

[1] Institute of applied mathematics and automation of the Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian Academy of Sciences (IPMA KBNTs RAS), Nalchik, Russia

[2] Kabardino-Balkarian State Agricultural University (KBSAU).Nalchik, Russia

Hyperbolic curves are used in various theoretical and practical studies, including in the field of water management and environmental construction when calculating various geophysical objects with hyperbolic outlines (surfaces of coastal slopes, sliding lines of landslide massifs, directing dams, spillway surfaces of watersheds, water free fall trajectories, etc.). The exact determination of the length of the hyperbola arc is represented by a rather complex dependence based on "unbreakable" incomplete elliptic integrals, which makes it difficult to carry out analytical calculations and involves the use of tabular data with a time-consuming cross and non-linear interpolation of them, etc. Elementary dependencies are proposed to determine the length of the hyperbola arc, which give a very close approximation (up to 1%) to exact values. The obtained calculated analytical dependencies for determining the length of the hyperbola arc are recommended for practical use in theoretical and applied research in various fields of science and technology.

Keywords: *conical sections, hyperbolic curve, hyperbola, length of hyperbola arc, incomplete elliptic integrals, water management objects*

Format of citation: *Anakhaev K.N., Amshokov B.Kh., Anakhaev K.K. To the calculation of length of geophysical objects of hyperbolic outline // Prirodoobustrojstvo. – 2021. – № 4 – S. 85-89. DOI: 10.26897/1997-6011-2021-4-85-89.*

Введение. В ряде случаев при исследованиях в области водохозяйственного и природоохранного строительства требуется определение геометрических параметров различных геофизических объектов гиперболического очертания, в том числе при расчетах длины: поверхностей береговых склонов, линии скольжения оползневых массивов, береговых линии водотоков (водоемов) и струенаправляющих дамб водозаборных гидроузлов, водосливных поверхностей бетонных плотин и тоннельных (башенных) водосбросов, траекторий свободного падения водного потока на водопадах и водосбросах арочных плотин и др. Гиперболические кривые используются также при проведении различных теоретических и практических исследований, связанных с определением траекторий полетов различных тел и летательных аппаратов, очертаниями форм объектов, оптимизацией логистических маршрутов [1] и т.д.

Гиперболическая кривая (гипербола) является каноническим сечением и образуется при нормальном пересечении плоскостью образующей поверхности тупоугольного конуса [1]. Разность расстояний всех точек гиперболы от двух фокусов, расположенных на действительной оси ($\mp c$), равна постоянной величине $2a$, при этом значение c выражается через полуоси гиперболы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, где a и b – действительная и мнимая полуоси. Величины $\varepsilon = c / a > 1$ и $p = b^2 / a$ называются соответственно эксцентриситетом гиперболы и фокальным параметром – половиной вертикальной хорды от фокуса гиперболы [1, 2].

Уравнения гиперболы выражаются зависимостями:

– в канонической форме $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$ (1)

– в параметрической форме $\left.\begin{aligned} x &= a \cdot ch(t); \\ y &= b \cdot sh(t) \end{aligned}\right\},$ (2)

где t – параметр уравнений.

Материалы и методы. Точная длина гиперболы определяется достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» эллиптических интегралах 1 и 2 рода, что затрудняет проведение аналитических расчетов. Для наглядности приведем известный вывод формулы для расчета длины дуги гиперболы (от вершины A до заданной точки M с параметром t_1) на основе преобразований ее параметрического уравнения (2) в виде:

$$L = \int_0^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 sh^2 t + b^2 ch^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 sh^2 t + b^2 \left(1 + sh^2 t\right)}\,dt = \quad (3)$$

$$= \int_0^{t_1} \sqrt{\left(a^2 + b^2\right) sh^2 t + b^2}\,dt$$

При замене переменной

$$\left.\begin{aligned}
&\tau = arctg\frac{\sqrt{a^2+b^2}sht}{b};\\
&\tau_1 = arctg\frac{\sqrt{a^2+b^2}sht_1}{b};\\
&dt = \frac{bd\tau}{\sqrt{(a^2+b^2)\cos^2\tau+b^2\sin^2\tau}\cdot\cos\tau};\\
&\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

формула (3) преобразуется к виду

$$L = \int_0^{\tau_1}\frac{b^2 d\tau}{\sqrt{(a^2+b^2)\cos^2\tau+b^2\sin^2\tau}\cdot\cos^2\tau} =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\int_0^{\tau_1}\frac{1-\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}\cdot\cos^2\tau} = \frac{a}{\lambda}\int_0^{\tau_1}\frac{1-\lambda^2\left(\sin^2\tau+\cos^2\tau\right)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}\cdot\cos^2\tau} =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\int_0^{\tau_1}\frac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}{\cos^2\tau}d\tau - \int_0^{\tau_1}\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\int_0^{\tau_1}\frac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}{\cos^2\tau}d\tau - \int_0^{\tau_1}\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right)\frac{a}{\lambda} =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\int_0^{\tau_1}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}\,dtg\tau - \int_0^{\tau_1}\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau}\,tg\tau\Big|_0^{\tau_1} - \int_0^{\tau_1}tg\tau\cdot d\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau} - \int_0^{\tau_1}\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau}\,tg\tau\Big|_0^{\tau_1} - \int_0^{\tau_1}\frac{-\lambda^2\sin^2\tau}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau - \int_0^{\tau_1}\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau}\,tg\tau\Big|_0^{\tau_1} - \int_0^{\tau_1}\frac{1-\lambda^2\sin^2\tau}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau + \int_0^{\tau_1}\frac{1-\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau}\,tg\tau\Big|_0^{\tau_1} - \int_0^{\tau_1}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}\,d\tau + \left(1-\lambda^2\right)\int_0^{\tau_1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\tau}}\right) =$$

$$= \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau_1}\cdot tg\tau_1 - E(\lambda,\tau_1) + \left(1-\lambda^2\right)\cdot F(\lambda,\tau_1)\right).$$

Таким образом, точная длина дуги гиперболы L от ее вершины A (при $t_A = 0$) до заданной точки M (с параметром $t_M = t_1$) определяется зависимостью:

$$L = \frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau_1}\cdot tg\tau_1 - E(\lambda,\tau_1) + \left(1-\lambda^2\right)\cdot F(\lambda,\tau_1)\right), \quad (5)$$

в которой величины $F(\lambda,\tau_1)$ и $E(\lambda,\tau_1)$ являются соответственно неполными эллиптическими интегралами 1 и 2 рода при модуле λ и модулярном угле τ_1, рассчитываемым по формулам (4) при характеристиках гиперболы a, b и параметре заданной точки t_1. Указанные эллиптические интегралы не выражаются через элементарные функции [3-9], и аналитическое вычисление их значений представляет собой сложную задачу. В связи с этим до настоящего времени наряду с программными продуктами широко применяются специальные графики и таблицы, впервые составленные еще А.М. Лежандром в 1830-е гг. [1]. Использование последних зачастую связано с трудоемкой работой по перекрестному и нелинейному интерполированию их значений. При этом численные решения, дающие практически точные значения интегралов для отдельных точек, ограничены в возможностях выявления внутренних взаимосвязей исходных факторов и оценке их влияния на промежуточные и итоговые результаты рассматриваемой задачи, что обусловливает актуальность и востребованность дальнейшего развития и совершенствования аналитических методов решения задач.

Результаты. В связи с изложенным предлагаются весьма «простые» зависимости для определения длины дуги от вершины гиперболы до заданной на ней точки с координатами $(x; y)$, основанные на суммарном представлении линейных зависимостей для участков – до $(0 \le t < t_c)$ и после $(t \ge t_c)$ фокуса гиперболы – в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&– \text{при } a \le x < c \ (\text{или } 0 \le t < t_c)\\
&L = 1.01\sqrt{(x-a)^2+y^2};\\
&– \text{при } x \ge c \ (\text{или } t \ge t_c)\\
&L = 1.01\left[\sqrt{p^2+(c-a)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-p)^2}\right]
\end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

в которых x и y – координаты заданной точки; t_c – параметр функции в фокусе гиперболы, равный $t_c = Arch(c/a)$; p – фокальный параметр гиперболы (см. выше).

При этом длина дуги между двумя произвольно расположенными точками гиперболы находится как разность между значениями длин кривых, отсчитываемых от вершины гиперболы для каждой из этих точек в отдельности.

В частности, значение длины дуги равносторонней гиперболы $XY = -1$ $(a = b = \sqrt{2})$ между точками $X_1 = 0.5$; $X_2 = 1$ (где X и Y – координаты по осям асимптот равносторонней гиперболы), определенное по методу Я.Б. Зельдовича [9] на основе удержания двух первых членов в формуле бинома Ньютона, равно 1.146 (+1.2%) при точном ее значении 1.132. Для данного случая значения координат x рассматриваемых точек в прямоугольной («правильной») системе координат определены по зависимости [1]

$$x_i = X_i \cos\alpha - Y_i \sin\alpha,$$

где $\alpha = \pi/4$ – угол поворота координатных осей асимптот, соответственно будут равны $x_1 = 1.25\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$, а результат расчета по предлагаемой формуле (6) равен 1.129 (–0.2%), что практически полностью согласуется с точным значением.

В нижеследующей таблице приводится сравнение расчетов длины дуги гиперболы по предлагаемым зависимостям (6) от вершины гиперболы для заданных величин параметра t в формулах (2) с точными значениями зависимости (5).

Как следует из таблицы, рекомендуемые элементарные зависимости (6) для определения длины дуги гиперболической кривой дают весьма близкие к точным значениям результаты (до 1%) для широкого диапазона изменений параметров гиперболы и могут быть рекомендованы для использования в теоретических и прикладных исследованиях в различных областях науки и техники.

Таблица

Сравнение результатов расчета длины дуги гиперболы по предлагаемым формулам (6) с точными значениями

Table

Comparison of the results of calculating the length of the hyperbola arc according to the proposed formulas (6) with the exact values

Значение b при a = 1; t_c *Value b at $a = 1$; t_c*	**Параметр t в формулах (2)** *Parameter t in formulas (2)*	**Точное значение L** *Exact value L*	**Значение L по формулам (6)** *Value L by formulas (6)*	%
$b = 0.2$ $t_c = 0.199$	0.1	0.0208	0.0209	+ 0.09
	0.5	0.172	0.172	0
	1	0.608	0.609	+ 0.2
	2	2.881	2.900	+ 0.7
	5	74.705	75.463	+ 1.0
	10	$1.123 \cdot 10^4$	$1.134 \cdot 10^4$	+ 1.0
$b = 0.5$ $t_c = 0.481$	0.1	0.050	0.051	+ 0.8
	0.5	0.297	0.294	-1.1
	1	0.827	0.827	+ 0.1
	2	3.363	3.382	+ 0.6
	5	82.155	82.954	+ 1.0
	10	$1.231 \cdot 10^4$	$1.243 \cdot 10^4$	+ 1.0
$b = 1.0$ $t_c = 0.881$	0.1	0.100	0.101	+ 1.0
	0.5	0.541	0.542	+ 0.2
	1	1.317	1.313	-0.3
	2	4.625	4.652	+ 0.6
	5	104.345	105.363	+ 1.0
	10	$1.557 \cdot 10^4$	$1.573 \cdot 10^4$	+ 1.0
$b = 5.0$ $t_c = 2.312$	0.1	0.501	0.506	+ 1.0
	0.5	2.609	2.635	+ 1.0
	1	5.907	5.960	+ 0.9
	2	18.365	18.527	+ 0.9
	5	378.210	381.968	+ 1.0
	10	$5.615 \cdot 10^4$	$5.672 \cdot 10^4$	+ 1.0
$b = 10.0$ $t_c = 2.998$	0.1	1.002	1.012	+ 1.0
	0.5	5.213	5.265	+ 1.0
	1	11.767	11.882	+ 1.0
	2	36.385	36.734	+ 1.0
	5	745.655	753.095	+ 1.0
	10	$1.107 \cdot 10^5$	$1.118 \cdot 10^5$	+ 1.0

Выводы

Гиперболические кривые используются при проведении различных теоретических и практических исследований, в том числе в области водохозяйственного и природоохранного строительства при расчетах различных геофизических объектов гиперболического очертания (поверхностей береговых склонов, линий скольжения оползневых массивов, струенаправляющих дамб, водосливных поверхностей водосбросов, траекторий свободного падения воды и др.). При этом известный метод для точного определения длины дуги гиперболы представлен достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» неполных эллиптических интегралах, что затрудняет проведение аналитических расчетов.

Предложенные элементарные зависимости (6) для определения длины дуги гиперболы дают весьма близкие приближения (до 1%) к точным значениям и рекомендуются для использования в теоретических и прикладных исследованиях в различных областях науки и техники.

Библиографический список

1. **Фильчаков П.Ф.** Справочник по высшей математике. – Киев: Наукова думка, 1973. – 743 с.

2. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике. – М.: Наука, 1980. – 975 с.

3. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

4. **Милн-Томсон Л.** Эллиптические интегралы: Справочник по специальным функциям; Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган – М.: Наука, 1979. – С. 401-441.

5. **Анахаев К.Н.** О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. – 2008. – № 8. – С. 7-9.

6. **Анахаев К.Н.** О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // Инженерные системы-2009: Труды Междунар. научно-практ. конф. Т. 2. – М.: РУДН, 2009. – С. 588-595.

7. **Анахаев К.Н.** О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 473. № 2. – С. 151-153.

8. **Анахаев К.Н.** Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. – 2020. – Т. 491. № 2. – С. 24-29.

9. **Зельдович Я.Б.** Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. – М.: Наука. 1970. – 560 с.

References

1. **Filchakov P.F.** Spravochnik po vysshej matematike. – Kiev: Naukova dumka, 1973. – 743 s.

2. **Bronshtein I.N., Semendyaev K.A.** Spravochnik po matematike. – M.: Nauka. 1980. – 975 s.

3. **Yanke E., Emde F., Lesh F.** Spetsialisty funktsii. – M.: Nauka, 1977. – 342 s.

4. **Miln-Tompson L.** Ellipticheskie integraly // Spravochnik po spetsialnym funktsiyam. Pod redaktsiej Abramovitsa M. i Stigan I. – M.: Nauka, 1979. – S. 401-441.

5. **Anakhaev K.N.** O metodah rascheta potentsialnyh (filtratsionnyh) potokov na osnove ellipticheskih integralov Jakobi // Gidrotehnicheskoe stroitelstvo. – 2008. – № 8. – S. 7-9.

6. **Anakhaev K.N.** O sovershenstvovanii gidromehanicheskih metodov rascheta potentsialnyh (filtratsionnyh) potokov // «Inzhenernye sistemy – 2009». Trudy mezhdunar. nauchno-prakt. konf. T. 2. – M.: RUDN. 2009. – S. 588-595.

7. **Anakhaev K.N.** O polnyh ellipticheskih integralah 3-go roda v zadachah mehaniki // Doklady Academii nauk. – 2017. – T. 473. № 2. – S. 151-153.

8. **Anakhaev K.N.** Ellipticheskie integraly v nelinejnyh zadachah mehaniki // Doklady Rossijskoj academii nauk. Fizika. Tehnicheskie nauki. – 2020. – T. 491. № 2. – s. 24-29.

9. **Zeldovich Ya.B.** Vysshaya matematika dlya nachinayushchih i ee prilozheniya k fizike. – M.: Nauka. 1970. – 560 s.

Критерии авторства

Анахаев К.Н., Амшоков Б.Х., Анахаев К.К. выполнили теоретические исследования, на основании которых провели обобщение и написали рукопись, имеют на статью авторское право и несут ответственность за плагиат.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов

Статья поступила в редакцию 13.07.2021 г.

Одобрена после рецензирования 15.09.2021 г.

Принята к публикации 24.09.2021 г.

Criteria of authorship

Anakhaev K.N., Amshokov B.Kh., Anakhaev K.K. carried out theoretical studies, on the basis of which they generalized and wrote the manuscript, have a copyright on the article and are responsible for plagiarism.

Conflict of interests

The authors state that there are no conflicts of interests

The article was submitted to the editorial office 13.07.2021

Approved after reviewing 15.09.2021

Accepted for publication 24.09.2021