

## Гидравлика и инженерная гидрология

УДК 502/504:628.14

**С. Н. Карамбиров**, доктор техн. наук

Контактная информация: тел. 8 (495) 153-97-66

**С. А. Трикозюк**, аспирант

Контактная информация: 8 (495) 976-49-39

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный университет природообустройства»

### МНОГОРЕЖИМНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ ПОДАЧИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОДЫ

*Определены новые подходы к задаче выбора оптимальных параметров (диаметров участков и напоров водопитателей) систем подачи и распределения воды. Расчет сделали одновременно для нескольких режимов с учетом стохастической неопределенности. При этом целевая функция является аддитивной по расчетным периодам (кроме пожара), а задача оптимизации предполагает процесс управления и должна удовлетворять всем ограничениям.*

*New approaches are determined to the task of optimal parameters choice (diameters of parts and pressures of water feeders) of the water supply and distribution system. The calculation was made simultaneously for several regimes taking into account stochastic uncertainty. The target function is additive on calculated periods (except fire) and the task of optimization presumes a process of control and must meet all restrictions.*

Для нахождения экономически оптимальных диаметров линий водопроводных систем при заданном потоке распределения существует значительное число методов и их модификаций [1]. Практически все они основаны на детерминированных методах расчета для одного из характерных режимов

работы. В большинстве случаев выбор диаметров производится на час наибольшего транзита или на час наибольшего водопотребления [2]. Чаще используется второй случай — на час наибольшего водопотребления.

Остальные условия работы учитываются единственным коэффициентом

неравномерности расходования электроэнергии, обоснованность которого без проведения дополнительных гидравлических расчетов является весьма сомнительной. Кроме того, для схемы с контррезервуаром трудно учесть затраты на транзит воды в башню.

Системы подачи и распределения воды (ПРВ) по своей сути являются ресурсоемкими предприятиями системы водопользования, рациональное использование которых существенно улучшает экономические показатели работы всего водопровода. Удельный вес капитальных и эксплуатационных затрат, приходящихся на них, составляет до 60...80 % общей стоимости системы водоснабжения.

С появлением современных быстродействующих вычислительных машин существовавшие методы были автоматизированы, однако это не привело к реализации новых возможностей и качественному изменению постановки задач. Во многом это связано с разде-

лением труда между специалистами-водоснабженцами, ставящими задачи, и профессиональными программистами, их реализующими. Даже в условиях одного расчетного случая величина водопотребления является интервальной, что зафиксировано соответствующими нормами проектирования. Рассматривая истинное водопотребление как случайную величину, а отмеченные интервалы — доверительными, можно, с некоторыми допущениями, составить стохастическую модель многорежимной стохастической оптимизации.

Целью работы является создание новых методов оптимизации системы подачи и распределения воды, более адекватно описывающих реальные режимы работы систем водоснабжения.

Постановка задачи заключается в определении оптимальных диаметров участков и напоров водопитателей (для насосных станций зависящих от времени), доставляющих экстремальное значение целевой функции с учетом

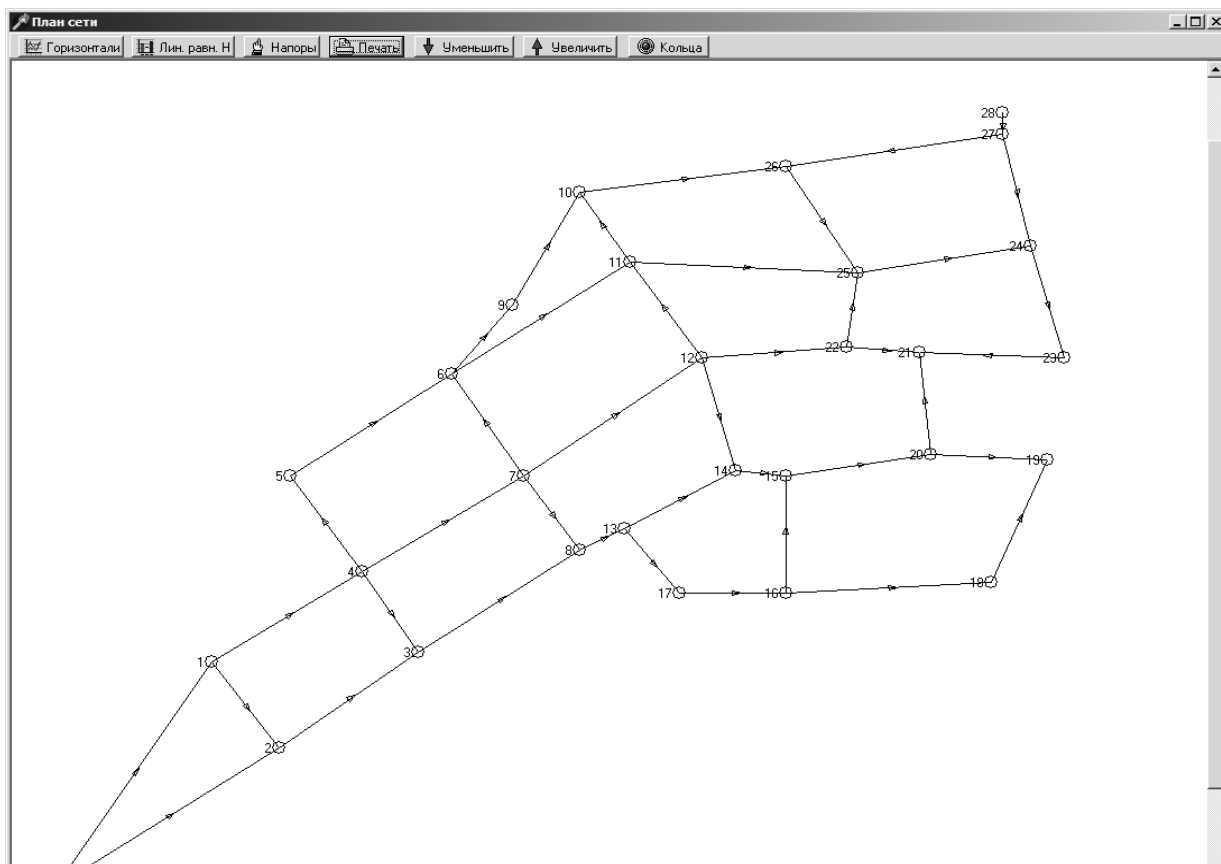


Рис. 1. Расчетная схема сети

заданных ограничений, определяемых нормативными документами. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 1.

Так как система является стохастической, случайной будет и целевая функция. В качестве оптимизирующей величины примем математическое ожидание дисконтированных затрат на строительство и эксплуатацию системы:

$$Z = \sum_{t=0}^{T_p} \left( \frac{K_t}{(1+E)^t} + \frac{C_t}{(1+E)^t} \right), \quad (1)$$

где  $K_t$  — капитальные затраты на  $t$ -м интервале времени, величина которого принята равной одному году;  $C_t$  — текущие затраты на  $t$ -м интервале, за исключением капиталовложений;  $E$  — норма дисконта (требуемая инвестором норма доходности на единицу авансированного капитала);  $T_p$  — продолжительность расчетного периода (для систем водоснабжения 20–25 лет).

Будем считать, что капитальные затраты приведены к началу строительства, т.е.  $t = 0$  и продолжительность строительства равна одному году. Тогда

$$Z = K_0 + C_1 \left( \frac{\frac{1}{1+E} - \left(\frac{1}{1+E}\right)^{T_p+1}}{1 - \frac{1}{1+E}} + 1 \right), \quad (2)$$

где  $K_0$  — капитальные затраты;  $C_1$  — ежегодные эксплуатационные затраты (средние за расчетный период).

Для решения задачи используем метод линейного программирования. Он базируется на выборе искомым переменных — протяженности труб стандартного сечения, укладываемых на каждом участке. Таким образом, участок разбивается на несколько последовательных телескопических секций (подучастков) из числа возможных к прокладке, среди которых впоследствии выбираются оптимальные.

Такое рассмотрение основано на том, что длины подучастков (при заданном расходе) являются единственными параметрами, от которых линейно зависят потери напора. Обозначим:  $j$  — номера сечений, укладка которых возможна на системе ( $j = 1 \dots m_s$ );  $J_i$  — подмножество  $j$  для  $i$ -го участка;  $x_{ij}$  — протяженность труб  $j$ -го диаметра на  $i$ -м участке, которые являются искомыми переменными. Длина участка — это сумма длин его подучастков:

$$\sum_{j \in J_i} x_{ij} = l_i, \quad (i = 1 \dots n), \quad (3)$$

где  $n$  — число всех участков.

Это задает первую систему ограничений. Для дальнейшего рассмотрения необходимо конкретизировать задачу.

Известно, что расходование воды из сети для расчетных суток определяется суммарными ступенчатыми графиками водопотребления 24-часовой размерности. Такие графики имеют несколько многочасовых ступеней (будем называть их обобщенными ступенчатыми графиками), вокруг которых происходят малые отклонения расходов. Обобщенные графики имеют меньшее число ступеней, определяемое пользователем по его внешнему виду. Обычно оно не превышает четырех. Мерой близости исходного и обобщенного графиков можно выбрать сумму квадратов их разностей для каждого часа суток. Обобщенный график формируется минимизацией указанной суммы методом динамического программирования [3]:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}} (Q_{оби} - Q_j)^2 \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $Q_{оби} = \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}} \frac{Q_j}{t_{i+1} - t_i}$ ;  $k$  — число ступеней обобщенного графика;  $t_i \in 1 \dots 24$ , ч.

Задачу можно записать так:

$$f_k(S) = \min [Q(S, U) - f_{k-1}(S')], \quad (5)$$

где  $S$  — состояние системы (время переключения, ч);  $U$  — управление (ширина интервала обобщенного графика, ч);  $Q(S, U)$  — значение целевой функции (сумма квадратов разностей) при  $U$ -м варианте управления на  $k$ -м шаге;  $S'$  — состояние системы за  $k-1$  ступеней до конца графика;  $f_k(S)$  — сумма квадратов разностей при оптимальном управлении за  $k$  ступеней до конца графика для  $S$ -го варианта состояния.

Расчет начинается с последней ступени. Полученный обобщенный график будем рассматривать как математические ожидания случайного водопотребления, а усредненные квадраты разностей — как соответствующие дисперсии (рис. 2). Подобная информация может быть получена непосредственно по результатам измерений на

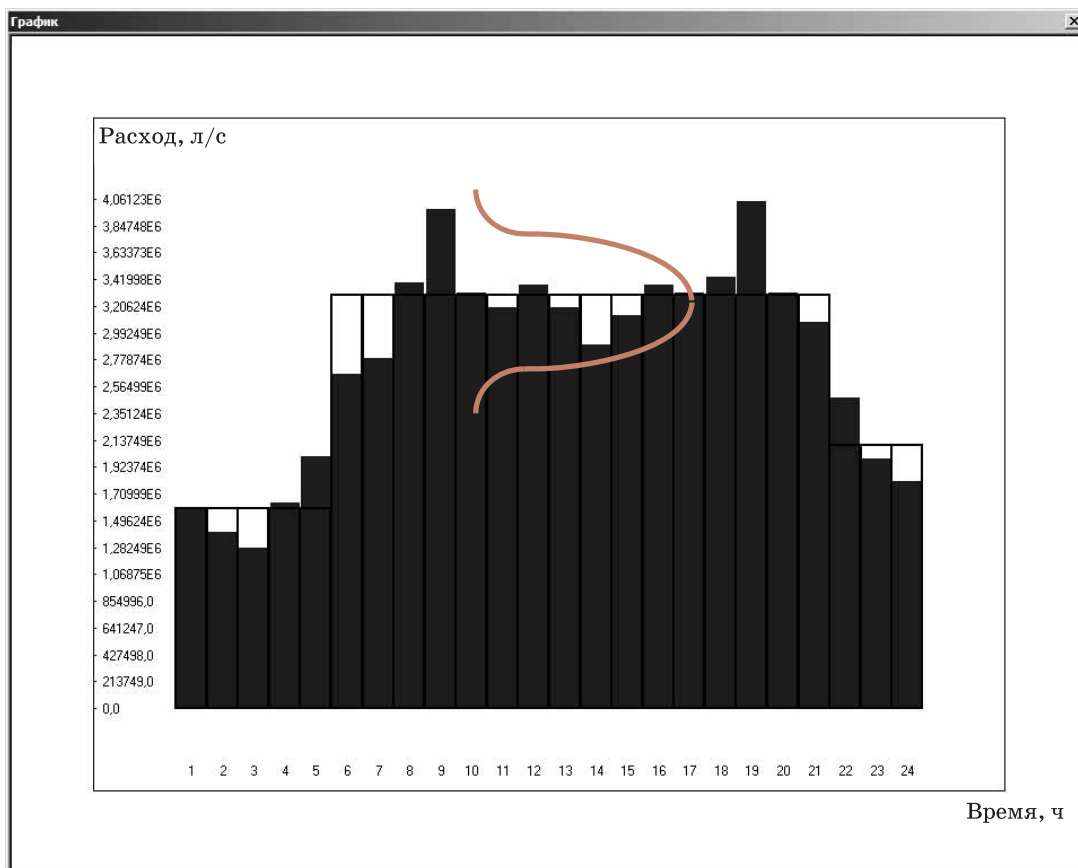


Рис. 2. Графики водопотребления: ■ — исходный; □ — обобщенный

действующих объектах.

От стохастических характеристик водопотребления перейдем к соответствующим характеристикам потокораспределения (вероятностным распределениям расходов участков напоров в узлах и подач водопитателей).

Основой расчета является система уравнений, описывающих первый и второй законы Киргофа, а также напорно-расходные характеристики водопитателей, станций подкачки и регулирующих задвижек. В общем виде эта система может быть записана так:

$$F(X) = Q, \tag{6}$$

где  $X = (q_1 \dots q_n, H_1 \dots H_m, q_{НС1} \dots q_{НСK})^T$ ;  $q_i$  — расходы участков;  $H_i$  — напоры узлов;  $q_{НСi}$  — подачи водопитателей;  $Q$  — нормально распределенный случайный вектор с математическим ожиданием  $\bar{Q}$  и ковариационной матрицей

$$K_Q = \begin{bmatrix} K_{Q_{m \times m}} & 0 \\ 0 & 0_{r \times r} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Используя линеаризацию исходной системы, получим, что вектор решения распределен нормально с мате-

матическим ожиданием

$$\bar{X} \cong F^{-1}(Q) \tag{8}$$

и ковариационной матрицей

$$K_x \cong [F']^{-1} K_Q [F']^{-1*}, \tag{9}$$

где звездочкой показана операция транспонирования, а

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{bmatrix}_{X=\bar{X}}. \tag{10}$$

Полученные выражения можно использовать для оценки вероятностей событий. Так, отказом узла  $i$  будем называть событие, при котором свободный напор в нем  $H_i$  меньше минимально необходимого  $H_{oi}$ .

Вероятность отказа:

$$P_{от} = P(H_i < H_{oi}) = 0,5 - \Phi \left( \frac{\bar{H}_i - H_{oi}}{\sigma_{H_i}} \right), \tag{11}$$

где  $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — функция Лапласа.

Вернемся к нашей задаче оптимизации. Пусть на  $i$ -м участке допускается  $n_i$  типов труб с диаметрами  $d_{ij}$ ,  $j = 1 \dots n_i$ .

Математическое ожидание потерь напора на  $j$ -м подучастке для режима  $t_i$ :

$$\overline{\Delta h}^{ti} = \frac{k_i (\overline{q_i}^{ti})^{\beta_i}}{d_{ij}^{m_i}} x_{ij} = \overline{A_{ij}^{ti}} x_{ij}, \quad (12)$$

где  $k_i$ ,  $\beta_i$ ,  $m_i$  — зависящие от материала труб коэффициенты.

Тогда гидравлические ограничения второго закона Киргофа для кольца  $M$  и условия внешней увязки напоров  $i$ -го и  $j$ -го водопитателей для режима  $t_i$  можно записать в следующем виде:

$$\left| \sum_{i \in M} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{A_{ij}^{ti}} x_{ij} \right| \leq \varepsilon; \quad (13)$$

$$\left| (\overline{H_{bi}^{ti}} + Z_{bi}) - (\overline{H_{bj}^{ti}} + Z_{bj}) - \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{A_{ij}^{ti}} x_{ij} \right| \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где  $\overline{H_{bi}^{ti}}$  — математическое ожидание напора у  $bi$ -го водопитателя для режима  $t_i$ ;  $Z_{bi}$  — отметка  $bi$ -го водопитателя;  $I$  — путь (участки), соединяющий водопитатели;  $\varepsilon$  — точность увязки.

Условие (11) на требуемую вероятность безотказной работы можно записать так:

$$\frac{H_{oi}^{ti} - \overline{H_i^{ti}}}{\sigma_{Hi}^{ti}} \leq U_{\text{пот}}, \quad (15)$$

где  $U_{\text{пот}}$  — процентная точка нормального распределения, соответствующая вероятности  $P_{\text{от}}$ ;  $H_i^{ti}$ ,  $\sigma_{Hi}^{ti}$  — соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение напора  $i$ -го узла для режима  $t_i$ .

При малых значениях  $P_{\text{от}}$  величина  $U_{\text{пот}}$  меньше нуля. Обозначим ее как  $(-|U_{\text{пот}}|)$ , тогда (15) запишется в виде

$$\overline{H_{bi}^{ti}} - \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{A_{ij}^{ti}} x_{ij} + Z_{bi} - Z_i \geq H_{oi}^{ti} + |U_{\text{пот}}| \sigma_{Hi}^{ti}, \quad (16)$$

где  $\overline{H_{bi}^{ti}}$  — математическое ожидание напора водопитателя, питающего  $i$ -й узел в режиме  $t_i$  (для разных режимов могут быть разными), а внешнее суммирование производится по любой последовательности участков, соединяющих  $i$ -й узел с его водопитателем.

У водопитателей вероятность превышения напора  $H_{bi}^{ti}$  над предельно допустимыми значением  $H_{\text{доп}i}^{ti}$  не должна превышать заданного значения  $P_{bi}$ :

$$P(H_{bi}^{ti} > H_{\text{доп}i}^{ti}) \leq P_{bi}, \quad (17)$$

что приводит к следующему ограничению:

$$\overline{H_{bi}^{ti}} \leq H_{\text{доп}i}^{ti} - \sigma_{H_{bi}^{ti}} U_{1-P_{bi}}, \quad (18)$$

где  $U_{1-P_{bi}}$  — процентная точка нормального распределения, соответствующая вероятности  $1 - P_{bi}$ .

При оптимизации, как правило, не учитываются некоторые требования, предъявляемые к системе, например, намеченный график водоподачи в случае нескольких водопитателей. Даже если в начальном приближении требуемые подачи были выдержаны, технико-экономический расчет не накладывает на них ограничений, в результате чего подачи перераспределяются, что может привести к удорожанию сооружений. Чтобы учесть условия для подачи, зафиксируем диаметры смежных с водопитателями участков и обозначим их параметры с помощью индекса  $1b$ . Чтобы математическое ожидание подачи  $bi$  водопитателя находилось для режима  $t_i$  в интервале  $[q_1^{ti}, q_2^{ti}]$ , необходимо задать такие условия:

$$\left( \overline{H_{bi}^{ti}} + Z_{bi} \right) - \left( \overline{H_{1b}^{ti}} + Z_{1b} \right) \geq \frac{k_{1b} (q_1^{ti})^{\beta_{1b}}}{d_{1b}^{m_{1b}}} l_{1b}; \quad (19)$$

$$\left( \overline{H_{bi}^{ti}} + Z_{bi} \right) - \left( \overline{H_{1b}^{ti}} + Z_{1b} \right) \leq \frac{k_{1b} (q_2^{ti})^{\beta_{1b}}}{d_{1b}^{m_{1b}}} l_{1b}. \quad (20)$$

где правые части задают трехчленную формулу потерь напора.

Расшифруем значения  $K_0$  и  $C_1$  в выражении (2):

$$K_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij} X_{ij}, \quad (21)$$

где  $C_{ij}$  — стоимость единицы длины подучастка  $j$ -го диаметра;

$$C_1 = \sum_{i=1}^n P_i \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij} X_{ij} + \sum_{ti} \sum_{i=1}^{K_B} \frac{\overline{Q_{bi}^{ti}} t_{\text{неп}i} \sigma_e}{102 \cdot \zeta_{bi}} \overline{H_{bi}^{ti}} K_{bi}^{ti}, \quad (22)$$

где  $P_i$  — амортизационные отчисления для  $i$ -го участка;  $\sigma_e$  — стоимость 1 кВт·ч электроэнергии;  $t_{\text{неп}i}$  — длительность периода  $t_i$  в году;  $\zeta_{bi}$  — коэффициент полезного действия насосных установок водопитателей  $bi$ ;  $K_B$  — число насосных станций с математическим ожиданием подач  $\overline{Q_{bi}^{ti}}$ , л/с, и напоров  $\overline{H_{bi}^{ti}}$ , м, в период  $t_i$ ;  $K_{bi}^{ti} = 1 + \frac{K_{\text{hq}}^{ti}}{H_{bi}^{ti} Q_{bi}^{ti}}$ ;  $K_{\text{hq}}^{ti}$  — ковариация между

подачей и напором  $i$ -го водопитателя в период  $t_i$  (стоимость водопитателей для рассматриваемых вариантов принимается постоянной).

Минимизация функционала  $Z$ , с ограничениями (3), (13), (14), (16), (18), (19), (20) составляют задачу линейного программирования. При этом общее число ограничений может составлять несколько тысяч.

Решение находим итерационно при заданных вероятностных характеристиках потокораспределения для каждого расчетного момента, а на случай пожара — с соответствующими корректировками требуемых значений напоров до совпадения начальных и конечных диаметров.

Вначале находим первое приближение параметров системы, которые обеспечивают ее работоспособность (возможно, не оптимально). Выбираем возможные диаметры стандартного сортамента в окрестности начальных. Затем определяем расчетные режимы системы и последовательно вызываем процедуры стохастической увязки и формирования

целевой функции системы ограничений (аддитивно для каждого периода) при заданном потокораспределении. В расчете учитываем процесс управления, т. е. определяем оптимальные напоры водопитателей для каждого периода. После этого с помощью симплекс-метода решаем задачу линейного программирования. Для разветвленных сетей в виде дерева на этом процесс оптимизации заканчивается. Для кольцевых сетей расходы участков зависят от их диаметров. Поэтому если они менялись, изменится и потокораспределение, которое по условиям задачи считается заданным. Это вынуждает провести следующую итерацию и далее до совпадения диаметров на двух последних.

Результаты расчета приведены на рис. 3. Для сравнения на рис. 4 показана однорежимная оптимизация. Здесь каждый вертикальный скачок целевой функции означает новый вероятностно-гидравлический расчет, при котором система снова становится неоптимальной.

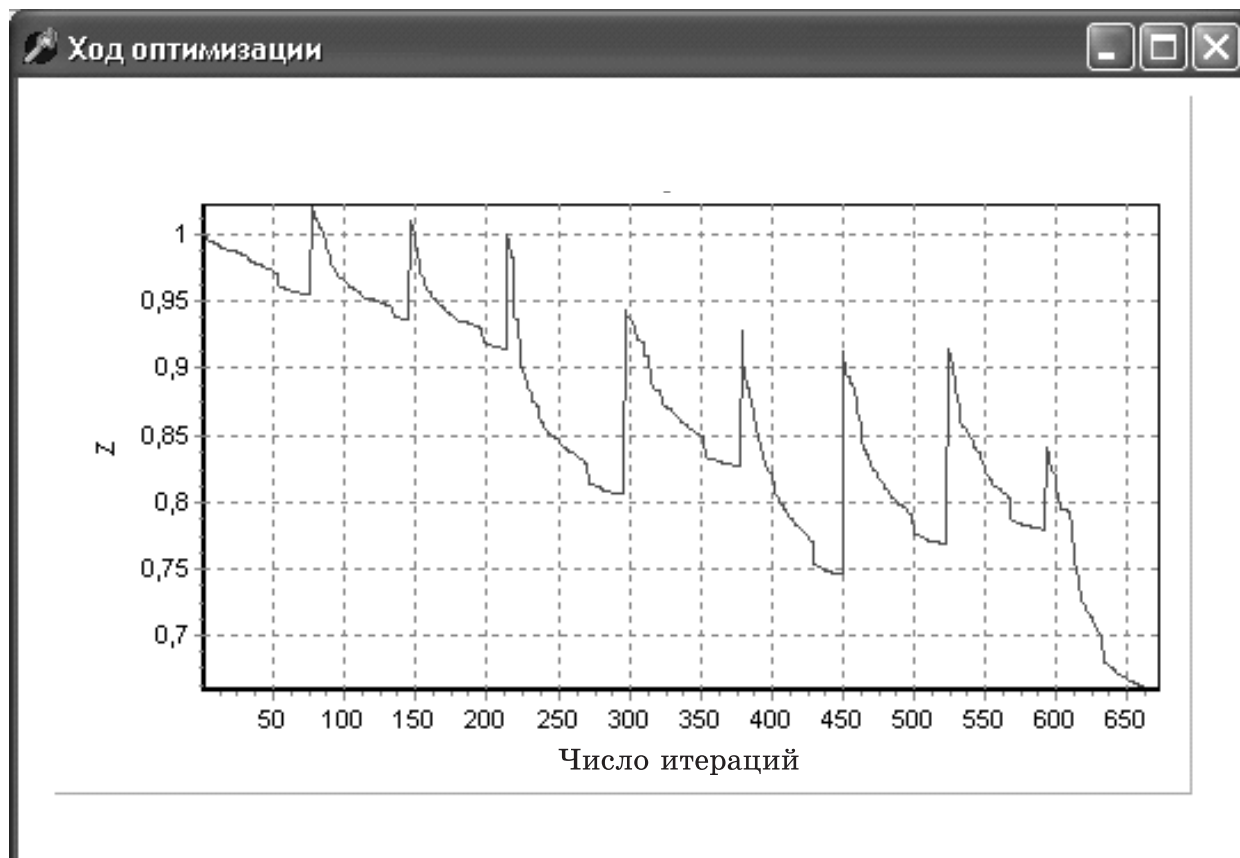


Рис. 3. Ход процесса многорежимной стохастической оптимизации

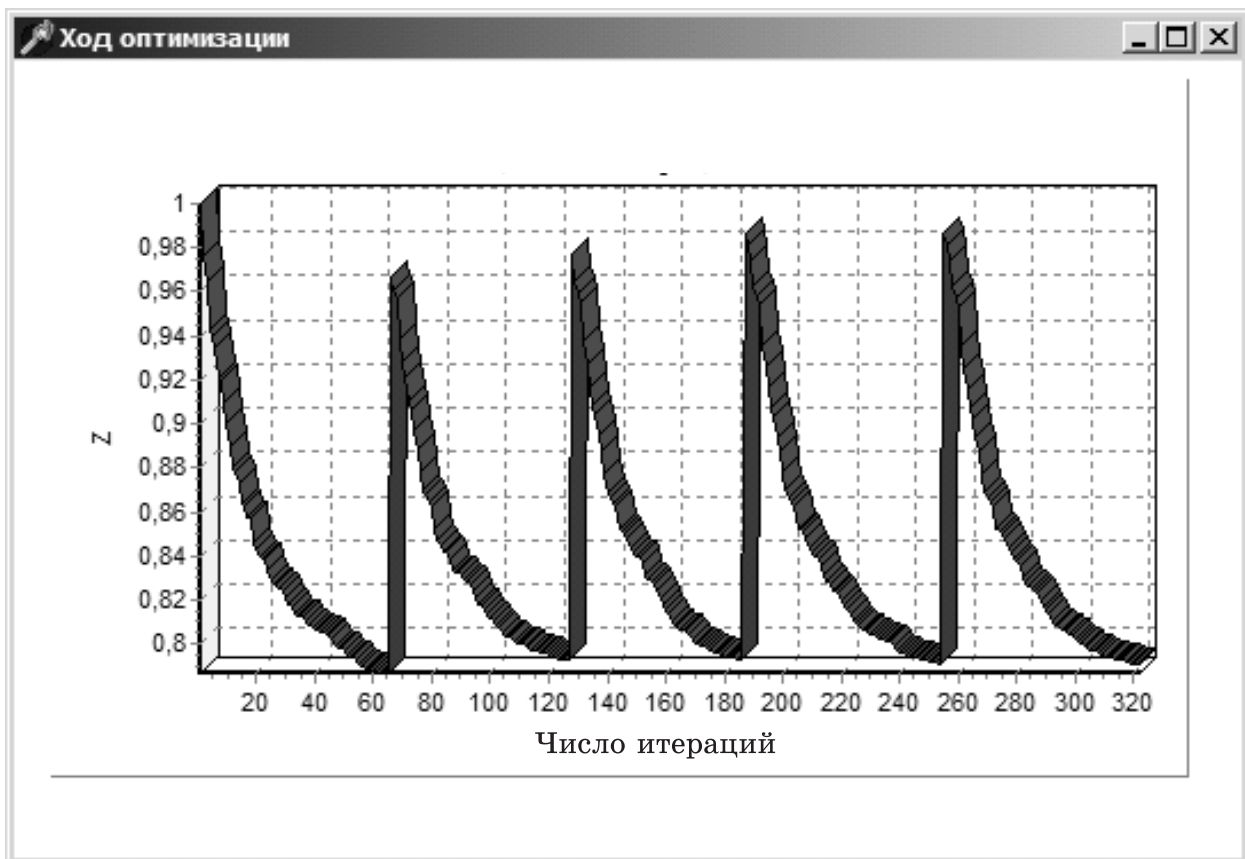


Рис. 4. Ход процесса однорежимной оптимизации

Отсюда видно, что применение многорежимной стохастической оптимизации позволяет снизить затраты на систему водоснабжения почти на 15 %.

#### Выводы

В статье приведено решение задачи многорежимной стохастической оптимизации системы по экономическому фактору с приближением подач водопитателей в характерные периоды к заданным значениям. Показано, что решение не требует округления и корректировки, оно является оптимальным для характерных режимов в целом и позволяет получить значительный экономический эффект.

**Ключевые слова:** водопроводная сеть, графики водопотребления, целевая функция оптимизации затрат.

#### Список литературы

1. **Николадзе, Г. Н.** Водоснабжение [Текст] : учеб. для вузов / Г. Н. Николадзе, М. А. Сомов. — М. : Стройиздат, 1995. — 688 с.
2. Расчет водопроводных сетей [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Н. Абрамов [и др.]. — М. : Стройиздат, 1983. — 278 с.
3. **Карамбиров, С. Н.** Математическое моделирование систем подачи и распределения воды в условиях многорежимности и неопределенности [Текст] : монография / С. Н. Карамбиров. — М. : ФГОУ ВПО МГУП, 2004. — 196 с.