4. **Манукьян, Д. А., Жабин В. Ф.** Гидрогеоэкологические проблемы в задачах природообустройства. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2006. – 194 с.

5. **Бочевер Ф. М.** Расчеты эксплуатационных запасов подземных вод. – М.: Недра, 1968. – 324 с.

Материал поступил в редакцию 27.01.10.

Жабин Виктор Федорович, *кандидат геолого-минералогических наук, доцент кафедры «Комплексное использование водных ресурсов»*

Тел. 8 (499) 976-21-56

Карпенко Нина Петровна, *доктор технических наук, профессор кафедры «Геология и гидрогеология»*

Тел. 8 (499) 976-22-27; 8 (499) 976 38-41

Ломакин Иван Михайлович, *кандидат геолого-минералогических наук, профессор кафедры «Геология и гидрогеология»*

Тел. 8 (499) 976-22-27

УДК 502/504:556.16

Л. Д. РАТКОВИЧ, Т. И. ИВАНОВА

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

Рассматривается применение бета-распределения для описания закономерностей колебаний взаимно корреляционных годовых величин стоковых рядов. Вводятся основные параметры бета-распределения и даются формулы условных и безусловных функций распределения взаимно корреляционных рядов. Описывается условное распределение между обеспеченностями годовых объемов стока.

Стохастическая модель стока, линейная корреляция, взаимно корреляционные последовательности, компенсированное регулирование стока, территориальное перераспределение стока, бета-распределение.

There is considered a usage of beta-distribution for description of fluctuations regularities of mutual correlated annual values of flow sequences. The conditional distribution between flow probabilities of annual volumes is described.

Flow stochastic model, linear correlation, mutual correlated sequences, flow compensated regulation, flow territorial redistribution, beta-distribution.

Стохастические модели имеют большое значение с точки зрения надежности результатов водохозяйственных расчетов. Необходимость использования искусственных гидрологических рядов обусловлена недостаточностью данных наблюдений, их репрезентативностью, высокой степенью антропогенного искажения, не поддающегося достоверной ретрансформации, а также наличием нескольких асинхронных водотоков в составе водохозяйственной системы [1].

При проектировании сложных водохозяйственных систем особенно значимыми становятся вероятностные связи между стоками различных территориальных зон. Компенсированное регулирование стока, в особенности его территориальное перераспределение, практически всегда связано с совместной оценкой водных ресурсов с учетом их асинхронности [2, 3].

Стохастические модели стока разрабатывались многими исследователями [4–8]. Разница подходов заключалась в выборе типа функции безусловного распределения, а также автокорреляционной функции для моделирования совокупностей с принятым шагом дискретности во времени. Останавливаясь на вероятностной модели годового стока, можно отметить несколько вариантов, предложенных в свое время авторитетными учеными. В [6] анализируется пять моделей, в основе которых заложена автокорреляционная функция в виде авторегрессии первого порядка между величинами стока, либо их нормализациями, либо между обеспеченностями (вероятностями превышения) годового стока. Последняя из названных модификаций марковского процесса (И. О. Сарманов, Д. Я. Раткович) предусматривает линейную корреляцию между обеспеченностями P_i, P_{i+1} стока смежных лет с последующим переходом к величинам стока S_i, S_{i+1} посредством трехпараметрического гамма-распределения:

$$\begin{aligned} &P_i \Rightarrow S_i = g(P_i, \bar{S}, C_V, C_S / C_V), \\ &P_{i+1} = \psi(P_i, r_a, \delta_{i+1}) \Rightarrow S_{i+1} = \\ &= g(P_{i+1}, \bar{S}, C_V, C_S / C_V), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{S}$ – среднемноголетний сток; C_V – коэффициент вариации годового стока; C_s – коэффициент асимметрии; r_a – коэффициент корреляции между обеспеченностями P_i и P_{i+1}; δ_i, δ_{i+1} – равномерно распределенные случайные величины

Двумерная плотность совместного распределения двух случайных величин P_i и P_{i+1} аппроксимируется бесконечным степенным рядом двух переменных [6, 7], причем при $r < 0{,}5$ достаточная точность расчета достигается на пяти первых членах разложения. Данное обстоятельство позволяет моделировать гидрологические ряды любой продолжительности с коэффициентом автокорреляции в пределах от 0 до 0,5. С точки зрения инженерного опыта указанный уровень ограничений является достаточно приемлемым для учета автокорреляции, но недостаточным для моделирования взаимозависимых рядов.

Приемы практического моделирования взаимно корреляционных последовательностей, имеющих трехпараметрическое распределение в качестве безусловного, изложены в работах [9, 10], где методика моделирования двух случайных гамма-распределенных последовательностей обобщена в работе для любого конечного числа коррелированных случайных величин названного распределения.

Все методы сводятся к композиции линейных преобразований независимых случайных последовательностей – нормально распределенных либо гамма-распределенных. Применительно к обобщенному варианту методики [9] авторами статьи разработана компьютерная программа, алгоритм которой сводится к моделированию n независимых случайных последовательностей путем реализации программных операций (1). Параметры последовательностей (три первых момента) находятся из решения системы линейных уравнений, что позволяет далее генерировать необходимые совокупности.

Композиционный метод не применим к равномерно распределенным случайным последовательностям (т. е. обеспеченностям), поскольку равномерное распределение однопараметрическое. В то же время использование обеспеченностей привлекательно для гидролого-водохозяйственных расчетов. Поэтому с целью расширения области действий с обеспеченностями авторами рассмотрена возможность применения для их описания бета-распределения.

Уравнение регрессии. Линейную регрессию между случайными значениями обеспеченностей x и y характеризуют таблица и рис. 1. Уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$\overline{q} = 0,5 + r(p - 0,5), \quad (2)$$

где $\overline{q}$ – условное среднее при текущем значении, p.

Математическое ожидание условного распределения

R	m_p
–1	$1 - p$
0	0,5
1	P

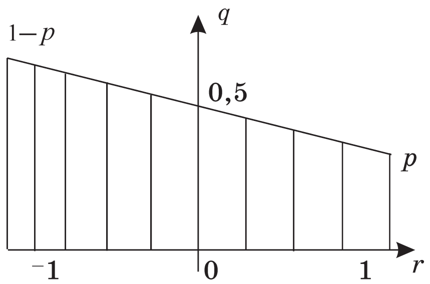


Рис. 1. **Линейная регрессия обеспеченностей $q = l\ (p)$**

Условные распределения двух коррелированных, равномерно распределенных случайных величин уже не могут описываться равномерной плотностью, поскольку являются существенного асимметричными, причем вид функции условной плотности не определен.

Рассмотрим несколько иной подход к моделированию взаимозависимых последовательностей обеспеченностей p и q, переходя к более привычным обозначениям x и y. Принимая за основу бета-распределение для описания безусловной плотности распределения $f_0(x)$ каждой из обеспеченностей, получаем:

$$f_0(x) = \frac{x^{\alpha_0 - 1} \cdot (1 - x)^{\beta_0 - 1}}{B(\alpha_0, \beta_0)}, \quad (3)$$

где α_0, β_0 – параметры бета-функции;

$$B(\alpha_0, \beta_0) = \int_0^1 x^{\alpha_0 - 1}(1 - x)^{\beta_0 - 1} dx. \quad (4)$$

Параметры распределения – математическое ожидание и дисперсия:

$$m_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0};\ \sigma_0^2 = \frac{\alpha_0 \beta_0}{(\alpha_0 + \beta_0)^2(\alpha_0 + \beta_0 + 1)}. \quad (5)$$

Очевидно, что математическое ожидание безусловного распределения равно 0,5, следовательно, $\alpha_0 = \beta_0$. Для сохранения унимодального очертания графика плотности необходимо, чтобы выполнялось условие $\alpha_0 = \beta_0 > 1$ (рис. 2).

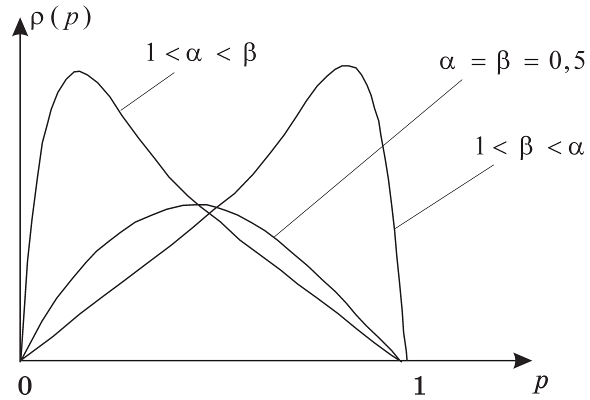


Рис. 2. **Плотность бета-распределения при характерных соотношениях параметров бета-функции (материалы википедии)**

Выражения (5) с учетом равенства параметров β-функции принимают вид:

$m_0 = 0,5;$

$$\sigma_0^2 = \frac{\alpha_0^{\ 2}}{4\alpha_0^{\ 2}(2\alpha_0 + 1)} = \frac{1}{4(2\alpha_0 + 1)}. \quad (6)$$

Определение значений α_0 параметров возможно только в ходе экспериментальной оценки наблюдаемых гидрологических последовательностей большой продолжительности.

Для поиска параметров (первых двух моментов) условного распределения (7) достаточно решить систему двух уравнений (8), используя известные формулы для математического ожидания и дисперсии β-распределения (дальнейшие выкладки ведем в привычных обозначениях x и y для обеспеченностей p и q):

$$f(y / x) = \frac{y^{\alpha - 1}(1 - y)^{\beta - 1}}{B(\alpha,\ \beta)}; \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} = m(r) = 0,5 + r(p - 0,5) = m; \\ \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \sigma^2(r) = \sigma_0^2(1 - r^2) = \\ = \dfrac{1 - r^2}{4(2\alpha_0 + 1)} = \sigma^2. \end{cases} \quad (8)$$

Выражая β из первого уравнения $\left(\beta = \dfrac{\alpha(1-m)}{m}\right)$ и подставляя во второе, получаем решение системы:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{m^2(1-m) - m\sigma^2}{\sigma}; \\ \beta = \dfrac{m(1-m)^2 - (1-m)\sigma^2}{\sigma^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнения позволяют найти параметры условного распределения при заданном коэффициенте корреляции r, величине α_0 и достигнутом значении обеспеченности p.

Располагая выражениями (3) и (7), несложно записать формулу совместной плотности распределения $f(x, y)$ и функции распределения $F(x, y)$:

$$f(x,y) = f(x)f(y/x);$$
$$f(x) = \frac{\left[(x(1-x)\right]^{\alpha_0-1}}{B(\alpha_0)};$$
$$f(x, y) = \frac{\left[(x(1-x)\right]^{\alpha_0-1}}{B(\alpha_0)} \times$$
$$\times \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}; \quad (10)$$
$$F(x, y) = \int_0^y\int_0^x \frac{\left[(x(1-x)\right]^{\alpha_0-1}}{B(\alpha_0)} \times$$
$$\times \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot dxdy.$$

Исходным пунктом для реализации рассмотренного подхода можно считать определение α_0. При обработке наблюдаемых рядов, опираясь на гипотезу о гамма-распределении величин годового стока, приходим к равномерной плотности распределения обеспеченностей. Равномерная плотность является частным случаем бета-распределения при $\alpha_0 = 1$. Вполне логичным можно считать переход от безусловного к условному распределению путем введения двух новых параметров α и β, превышающих единицу. В этом случае формулы (10) упрощаются:

$$f(x,y) = f(x)f(y/x); \quad (11)$$
$$f(x) = 1;$$
$$f(x, y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)};$$
$$F(x, y) = \int_0^y\int_0^x \frac{y^{\alpha-1}\cdot(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \times$$
$$\times dxdy.$$

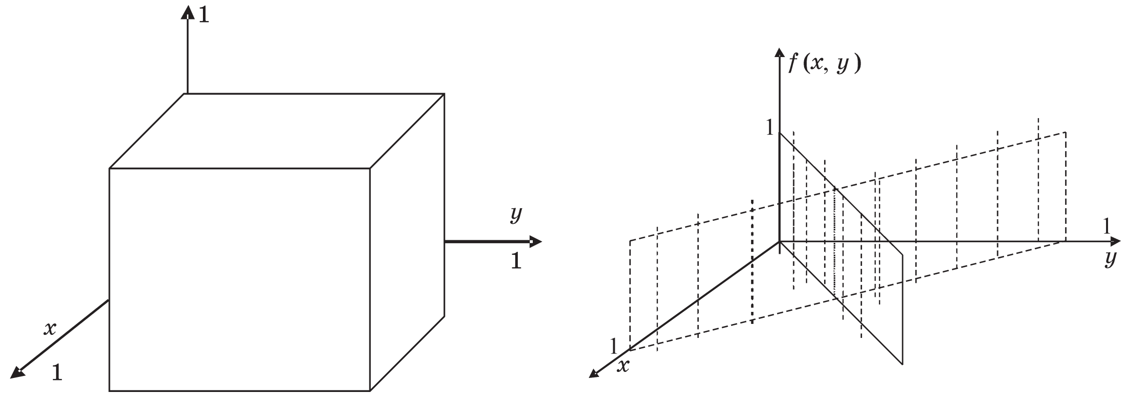
Решение (9), гармоничное с математической точки зрения, оказывается недостаточно корректным в практическом плане, поскольку при высоких коэффициентах корреляции выдержать форму одномодального условного распределения невозможно. Представляется целесообразным строить корреляцию между модальными значениями, а не между математическими ожиданиями. Мода безусловного распределения совпадает с математическим ожиданием, а в условном распределении становится понятной связь модального значения с асимметрией. Тогда система (8) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} = M = 0{,}5 + r(p-0{,}5) - \\ \text{модараспределения}; \\ \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \sigma^2 = \dfrac{1-r^2}{12} - \\ \text{условныйстандарт}. \end{cases} \quad (12)$$

В результате несложных преобразований получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} M = 0{,}5 + r(p-0{,}5); & (13) \\ \sigma^2 = \dfrac{1-r^2}{12}; \\ \alpha = \dfrac{(Mb - 2M + 1)}{1-M}; & (14) \\ \dfrac{\beta(M\beta - 2M + 1)(1-M)^2}{(\beta - 2M + 1)^2(\beta - 3M + 2)} = \sigma^2. & (15) \end{cases}$$

Решение кубического уравнения (15) позволяет определить значения параметров α- и β-функции условного распределения в зависимости от коэффициента корреляции r и достигнутой обеспеченности p. На рис. 3 показаны эскизы графика функции плотности при краевых значениях коэффициента корреляции ($r = 0$, $r = 1$, $r = -1$) и в общем случае (рис. 4).



а б

Рис. 3. **Эскизы графика функции плотности распределения обеспеченности величин стока при краевых значениях коэффициента корреляции (r = 0, r = 1, r = –1):** а – $f(x, y)$ при $r = 0$; б – $f(x, y)$ при $r = 1$ (пунктирная линия) и при $r = -1$ (прямая линия)

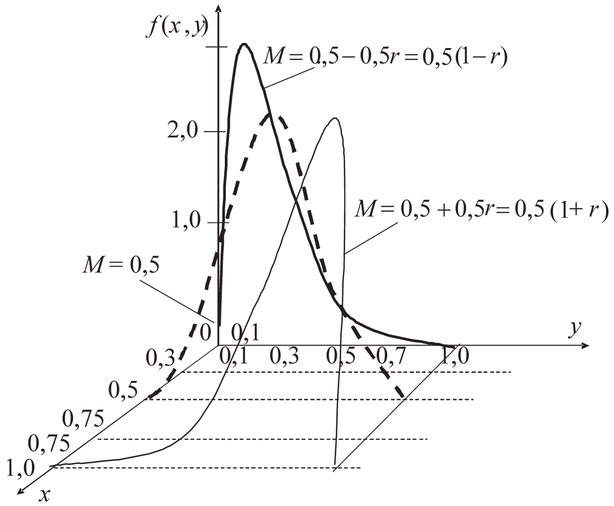


Рис. 4. **Эскиз графика совместной плотности распределения обеспеченности величин стока**

Предложенная методика работает во всем диапазоне значений коэффициента корреляции [–1; 1]. В настоящее время разрабатывается компьютерная программа для реализации методики на конкретных примерах.

1. **Блохинов Е. Г., Сарманов И. О.** Гамма-корреляция и ее использование при расчетах многолетнего регулирования речного стока // Труды ГГИ. – Вып. 143. – Л.: Гидрометеоиздат, 1968. – С. 52–75.

2. **Болгов М. В.** Стохастические модели периодически коррелированных внутригодовых колебаний речного стока // Метеорология и гидрология. – 1996. – № 1. – С. 101–116.

3. **Воропаев Г. В., Исмайылов Г. Х., Федоров В. М.** Проблемы управления водными ресурсами Арало-Каспийского региона. – М.: Наука, 2003. – 400 с.

4. **Исмайылов Г. Х., Прошляков И. В., Раткович Л. Д.** Методология управления большими водохозяйственными системами (на примере Волжско-Камского каскада водохранилищ) // Мелиорация и водное хозяйство. – 2006. – № 4. – С. 16–21.

5. **Музылев С. Н., Фролов А. В.** О статистическом моделировании многомерных гидрологических процессов // Водные ресурсы. – 1978. – № 3. – С. 14–21.

6. **Раткович Д. Я.** Многолетние колебания речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 255 с.

7. **Раткович Д. Я.** Моделирование взаимозависимых гидрологических рядов (на примерах притока к Аральскому и Азовскому морям) // Водные ресурсы. – 1977. – № 1. – С. 5–15.

8. **Раткович Л. Д.** Методология обосновывающих водохозяйственных расчетов // Мелиорация и водное хозяйство. – 2007. – № 6. – С. 32–34.

9. **Сарманов О. В.** Основные типы корреляции, применяемые в гидрологии. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

10. **Сванидзе Г. Г.** Математическое моделирование гидрологических рядов для водно-энергетических и водохозяйственных расчетов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977. – 296 с.

Материал поступил в редакцию 26.03.10.

***Раткович Лев Данилович**, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Комплексное использование водных ресурсов»*

Тел. 8 (495) 976-21-56

***Иванова Татьяна Ивановна**, аспирантка*

Тел. 8 (495) 976-23-43

E-mail: ivanovatatiana83@rambler.ru