предварительно определить параметры предложенных типов сборных клеефанерных оболочек. Они должны быть уточнены экспериментальной проверкой.

В сравнении с различными типами деревянных пространственных конструкций положительной гауссовой кривизны подтверждена эффективность использования конструкций из сборных клеефанерных элементов.

Ключевые слова: *оболочка, купол, клеефанерный, дощатоклееный, ребристый, сетчатый, арка.*

Список литературы

1. **Вольмир, А.С.** Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. — М. : «Наука», 1967 — 984 с.
2. Современные пространственные конструкции [Текст] : справочник / Под ред. Ю. А. Дыховичного, Э. З. Жуковского. — М. : «Высшая школа», 1991. — 540 с.
3. **Колкунов, Н. В.** Основы расчета упругих оболочек [Текст] / Н. В. Колкунов. — М. : «Высшая школа», 1963 — 274 с.
4. Пространственные конструкции зданий и сооружений [Текст] : сб. статей / Под ред. П. Г. Еремеева, И. Л. Ружанского. — Вып. 10. — М. : МОО «Пространственные конструкции», 2006 — 272 с.

УДК 502/504:624.19

А. Г. Шевляков*, канд. техн. наук, доцент*

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ ТОННЕЛЕЙ

Проблемы колебаний подземный трубопроводов недостаточно изучены. Автор предлагает новую динамическую модель пространственного колебания подземного цилиндрического трубопровода большой протяженности, заполненного жидкостью и расположенного в неограниченной грунтовой среде.

Problems of vibrations of underground pipe lines are not enough studied. The author proposes a new dynamic model of spacial vibration of the long underground cylindrical pipe line filled with liquid and placed in the unlimited soil medium.

Задачи исследования поведения упругих тел, нагружаемых волновым давлением, с внутренней обделанной полостью, заполненной жидкостью или газом, тесно сопрягаются с задачами динамического прочностного анализа в области транспорта по перекачке нефти и газа, где широко используются цилиндрические трубы с диаметром до 2 000 мм и с внутренним давлением до 100 атм (и больше). Несмотря на большое количество работ, выполненных в этой области (их подробный перечень можно найти, например, в статье [1]), остаются недостаточно изученными проблемы колебаний подземных трубопроводов, заполненных жидкостью и уложенных в грунтовой массив (подземное расположение трубопроводов). В литературе отсутствуют даже постановки задач математического моделирования волновых процессов в гидроупругих системах с учетом анизотропных свойств их материалов (конструкции, выполненные из стеклопластика, органопластика, углепластика и др.). В большинстве рассмотренных случаев контактное взаимодействие поверхности трубопровода с окружающим его массивом грунта описывается по приближенной модели Винклера (или другим приближенным моделированием). Настоящая работа ставит своей целью восполнить этот пробел.

Здесь построена новая динамическая модель пространственного колебания подземного цилиндрического трубопровода большой протяженности, заполненного жидкостью и расположенного в неограниченной грунтовой среде.

Пространственные колебания тонкостенной конструкции, выполненной из анизотропного однородного материала (стеклопластика), имеют следующий вид [2]:

$$\frac{B_0}{R^2}\left[R^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{B_{1212}}{B_{1111}}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\right.$$

$$R\frac{B_{1122}+B_{1212}}{B_{1111}}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\theta}+$$

$$\left.+R\frac{B_{1122}}{B_{1111}}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\rho_0 R^2}{B_{1111}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=-\tau_{rz}\big|_{r=R}\ ;$$

$$\frac{B_0}{R^2}\left[R\frac{B_{1122}+B_{1212}}{B_{1111}}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\theta}+\right.$$

$$R^2\frac{B_{1212}}{B_{1111}}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{B_{2222}}{B_{1111}}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+$$

$$\left.+\frac{B_{2222}}{B_{1111}}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{\rho_0 R^2}{B_{1111}}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]= \qquad (1)$$

$$=-\tau_{r\theta}\big|_{r=R};$$

$$\frac{B_0}{R^2}\left[R\frac{B_{1122}}{B_{1111}}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{B_{2222}}{B_{1111}}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\right.$$

$$+\frac{B_{2222}}{B_{1111}}w+\frac{h^2}{12R^2}\left(R^2\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}+\right.$$

$$+2R^2\frac{B_{1122}+2B_{1212}}{B_{1111}}\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\partial\theta^2}+$$

$$\left.\left.+\frac{B_{2222}}{B_{1111}}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}\right)+\frac{\rho_0 R^2}{B_{1111}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=$$

$$=-\sigma_r\big|_{r=R}\ ,$$

$$B_0 = hB_{1111}.$$

В системе трех линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка с постоянными коэффициентами, записанной в цилиндрических координатах r, θ, z ($|z| < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$, $r = R$), использованы следующие условные обозначения: $\vec{u}(u, v, w)$ — вектор перемещения произвольной точки срединной поверхности; u, v, w — его проекции на оси z, θ и r соответственно; ρ_0 — плотность материала оболочки; h — толщина стенки трубопровода (постоянная); B_{ijkl} — постоянные анизотропии; $\sigma_r\big|_{r=R}$, $\tau_{rz}\big|_{r=R}$ и $\tau_{r\theta}\big|_{r=R}$ — реакции со стороны грунта, окружающего цилиндрический трубопровод.

В частном случае ортотропного материала система линейных дифференциальных уравнений (1) содержит четыре независимых постоянных параметра, связанных с обычными «техническими» постоянными (модулями упругости и коэффициентами Пуассона) следующими соотношениями:

$$B_{1111}=\frac{E_{11}}{1-\nu'};\quad B_{2222}=\frac{E_{22}}{1-\nu'};\quad B_{1212}=\mu_{12};$$

$$B_{1122}=\frac{E_{11}\nu_{22}}{1-\nu'}=B_{2211}=\frac{E_{22}\nu_{11}}{1-\nu'};$$

$$\nu' = \nu_{11}\nu_{22},$$

где E_{22} — модуль нормальной упругости при растяжении (сжатии) основы (оси q); E_{11} — то же в направлении утка (оси z).

Если цилиндрический трубопровод выполнен из металла (чугуна, стали и др.), то постоянные анизотропии значительно упрощаются:

$$B_{1111}=B_{2222}=\frac{E_0}{1-\nu_0^2};\ B_{1122}=\frac{E_0\nu_0}{1-\nu_0^2};$$

$$B_{1212}=\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}.$$

где E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона металла соответственно.

Система дифференциальных уравнений (1) тоже значительно упрощается и принимает следующий вид [3]:

$$L_{11}(u)+L_{12}(\nu)+L_{13}(w)=$$

$$=\frac{\rho_0(1-\nu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1-\nu_0^2}{Eh}\tau_{rz}\big|_{r=R};$$

$$L_{21}(u)+L_{22}(\nu)+L_{23}(w)=$$

$$=\frac{\rho_0(1-\nu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}-\frac{1-\nu_0^2}{Eh}\tau_{r\theta}\big|_{r=R};$$

$$L_{31}(u)+L_{32}(\nu)+L_{33}(w)=$$

$$=-\frac{\rho_0(1-\nu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1-\nu_0^2}{Eh}\sigma_{rr}\big|_{r=R}+$$

$$+\frac{p_ж(1-\nu_0^2)}{Eh},$$

где L_{ij} — матрица линейных дифференциальных операторов; $p_ж$ — гидродинамическое давление на поверхность трубопровода со стороны жидкости, заполняющей внутренний объем тонкостенной конструкции.

Жидкость, заполняющую внутренний объем подземной конструкции, будем считать идеальной (однородная, линейной вязкости и теплопроводности).

Движение жидких частиц при этом в цилиндрических координатах описывается следующим линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}=\frac{1}{c_{ж}^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}; \qquad (2)$$

$$0<r<R,\ |z|<\infty,\ 0\le\theta<2\pi;$$

$$p_{ж}=-p_{ж}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t},$$

где $c_{ж}$ — скорость распространения звука в идеальной сжимаемой жидкости (const); $p_{ж}$ — динамическое давление на внутреннюю поверхность трубопровода. Если жидкость, заполняющая внутренний объем трубопровода, предполагается несжимаемой, то в этом случае $c_{ж}\to\infty$ и гиперболическое уравнение (2) становится уравнением Лапласа.

Ограничимся здесь только стационарным движением линейной гидроупругой системы, когда выполняются условия периодичности по переменным z, θ и t и, следовательно, потенциал скорости можно представить в виде следующего произведения:

$$\Phi_0(r,\theta,z,t)=DF(r)\cos(n\theta)\times$$

$$\times\sin(mz)\cos(qt).$$

Произвольно выбранная функция $F(r)$, $0<r<R$, удовлетворяет уравнению Бесселя; его решением являются функции Ханкеля первого и второго рода $H_n^{(1)}(i\beta r)$ и $H_n^{(2)}(i\beta r)$, $i=\sqrt{-1}$.

Выражение для обобщенной силы, действующей со стороны жидкости на внутреннюю поверхность трубопровода:

$$Q=-\iint_S p_{ж}\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right|_{r=R}ds.$$

На внутренней поверхности контакта жидкости с поверхностью трубопровода должно выполняться следующее кинематическое граничное условие:

$$\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w}{\partial t},\quad 0\le\theta<2\pi \qquad (3)$$

выражающее равенство нормальных скоростей частиц жидкости и трубопровода при $r=R$, $|z|<\infty$, $0\le\theta<2\pi$.

Граничное условие (3) можно истолковать и так: волновые процессы в гидроупругой системе происходят при неотрывном контакте жидкой среды с внутренней поверхностью трубопровода.

Сформулируем граничные условия в точках наружной поверхности конструкции $r=R_+$.

Грунт, окружающий трубопровод, будем считать однородной изотропной средой большой протяженности. Волновые процессы в такой среде описываются пространственными уравнениями с четырьмя переменными: r, θ, z, t.

Дифференциальные уравнения упругого движения грунта (в напряжениях) в цилиндрических координатах принимают следующий вид [4]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)=\rho_г\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=\rho_г\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_r=\rho_г\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}.$$

Как известно [5], в случае однородной и изотропной модели грунта поле перемещений можно представить в виде суперпозиции:

$$\vec{U}=\vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\vec{\Psi}.$$

Дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ в цилиндрических координатах r, θ, z имеет вид

$$\vec{\nabla}=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ — орты вдоль соответствующих осей.

Функции Φ и $\vec{\Psi}$ являются решениями следующих волновых уравнений:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\ \Delta\vec{\Psi}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2};\ c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_г}},$$

$$c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_г}},$$

где c_1, c_2 — скорости продольных и поперечных волн в грунтах; λ и μ — параметры Ламе; $\rho_г$ — плотность грунта.

Составляющие вектора перемещений точек грунта через потенциалы выражаются так:

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial r\partial z};$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\theta\partial z};$$

$$u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}.$$

Компоненты тензора напряжений σ_γ, $\tau_{\gamma z}$, $\tau_{\gamma\theta}$, действующих на наружную граничную поверхность цилиндрического трубопровода через упругие потенциалы, записывают так:

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_r = \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\times$$

$$\times\Phi - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\right)\Psi_1 -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Psi_2;$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi +$$

$$+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Psi_1 -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi_2;$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{rz} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z\partial\theta} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_2.$$

С помощью методов динамической теории упругости (однородной и изотропной) получены общие выражения для потенциальных функций Φ, Ψ_1, Ψ_2, позволяющие определить контактные напряжения: $\sigma_r\big|_{r=R_+}$, $\tau_{rz}\big|_{r=R_+}$, $\tau_{r\theta}\big|_{r=R_+}$. Максимальное контактное гидродинамическое давление на стенку трубопровода вместе с эквивалентным напряжением в тонкостенной трубе можно использовать для описания повреждаемости подземной конструкции при динамических нагрузках.

Ударно-волновое изменение кинематических и динамических параметров трубы в трехмерной постановке можно искать в форме бегущих (свободных) упругих волн, когда упругие смещения точек цилиндрического трубопровода распределены по гармоническому закону:

$u\,(z,\,\theta,\,t) = C_1\ \cos\,(n\theta)\,\sin\,(kz)\,\sin\,(qt);$

$v\,(z,\,\theta,\,t) = C_2\ \sin\,(n\theta)\,\cos\,(kz)\,\sin\,(qt);$

$w\,(z,\,\theta,\,t) = C_3\ \cos\,(n\theta)\,\cos\,(kz)\,\sin\,(qt).$

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы при параметрическом анализе трехмерных гидроупругих систем «идеальная жидкость — упругий цилиндрический трубопровод — окружающий его грунт».

Ключевые слова: *волновое давление, волновые процессы, пространственные колебания, методы динамической теории упругости, компоненты тензора напряжений.*

Список литературы

1. **Якупов, Р. Г.** Колебания цилиндрической оболочки в упругой среде [Текст] / Р. Г. Якупов // Прикладная механика. — 1975. — Вып. 1. — № 3. — С. 33–38.

2. Пластинки и оболочки из стеклопластика [Текст] / В. П. Бажанов [и др.]. — М. : Высшая школа, 1970. — 408 с.

3. **Шевляков, А. Г.** Методические основы динамической задачи прочности трубопроводов в грунте [Текст] / А. Г. Шевляков // Актуальные проблемы качества образования и пути их решения в контексте европейских и мировых тенденций : сб. материалов 9-й Межвузовской научно-методической конференции. — М. : МГУП, 2007. — С. 358–363.

4. **Власов, В. З.** Избранные труды [Текст] / В. З. Власов. — М. : Изд-во АН СССР, 1962. — 526 с.

5. **Слепян, Л. И.** Нестационарные упругие волны [Текст] / Л. И. Слепян.– Л. : Судостроение, 1972. — 373 с.