

УДК 502/504:556.18

В. В. ИЛЬНИЧ

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ОЦЕНКА АСИММЕТРИИ В РАМКАХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В статье проверяется гипотеза о возможности характеризовать степень асимметрии распределения вероятностей случайных величин нестандартными параметрами в рамках применяемого в гидрологии трехпараметрического гамма-распределения Крицкого и Менкеля. Обоснован теоретический выбор таких параметров, проведена их предварительная проверка относительно возможной погрешности. Установлено, что имеются достаточно четкие зависимости между величинами коэффициента асимметрии и величинами нестандартных параметров в диапазоне практического их применения.

Речной сток, распределение вероятностей, гамма-функция, коэффициент асимметрии, данные наблюдений, гидрологические ряды.

The article considers the hypothesis of the possibility to characterize the skew degree of random variable probabilistic distribution by nonstandard parameters in the frame of the Kritskij and Menkel three-parametric gamma distribution applied in hydrology. The theoretical choice of such parameters is substantiated and preliminarily tested on the possible inaccuracy. It is established that there are quite crisp dependencies between values of the skew coefficient and values of nonstandard parameters in the range of their practical usage.

River flow, probabilistic distribution, gamma function, coefficient of skew, observed data, hydrologic series.

В практике вероятностных гидрологических расчетов (годовых, максимальных, минимальных величин речного стока) используются различные аналитические функции распределения случайных величин. В ряде стран, как и в России, широкое применение получило трехпараметрическое гамма-распределение Крицкого и Менкеля [1].

Уравнение плотности вероятностей трехпараметрического гамма-распределения имеет следующий вид:

$$p(Q, Q_{cp}, \gamma, b) = [\Gamma(\gamma + b)/\Gamma(\gamma)]\gamma^{b/b} / (\Gamma(\gamma) | b | Q_{cp}) (Q/Q_{cp})^{\gamma/b - 1} \times \exp \{-[Q/Q_{cp} \Gamma(\gamma + b)/\Gamma(\gamma)]^{1/b}\}, \quad (1)$$

где Q_{cp} – среднее значение распределения величин стока реки или каких-либо других гидрометеорологических значений; γ и b – параметры, каждому сочетанию которых соответствуют определенные значения коэффициентов вариации и асимметрии C_v, C_s , которые выражаются следующими трансцендентными уравнениями:

$$C_v = [\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma + 2b)/\Gamma^2(\gamma + b) - 1]^{0,5}; \quad (2)$$

$$C_s = [\Gamma^2(\gamma) \Gamma(\gamma + 3b)/\Gamma^3(\gamma + b) - 3\Gamma(\gamma) \times$$

$$\times \Gamma(\gamma + 2b)/\Gamma^2(\gamma + b) + 2] / [\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma + 2b)/\Gamma^2(\gamma + b) - 1]^{1,5}, \quad (3)$$

где $\Gamma(\gamma), \Gamma(\gamma + b)$ – гамма-функция соответствующих аргументов.

Приведенное распределение получено посредством степенного преобразования общеизвестного гамма-распределения (в частном случае при $b = 1$ совпадает с ним). В гидрологии принято рассматриваемое распределение характеризовать тремя параметрами: Q_{cp}, C_v и C_s .

В силу ограниченности периодов наблюдений за речным стоком оценка параметров распределения вероятностей его величин всегда имеет погрешности относительно истинной величины. Ошибки параметров функций распределения величин зависят от выбранного закона распределения вероятностей для описания значений речного стока, от числа параметров, от количества членов статистического ряда (наблюдаемых значений стока) и их автокорреляционной функции

(если ее составляющие значительно отличаются от нуля).

Из всех используемых в гидрологической практике параметров функций распределения вероятностей с наибольшей погрешностью определяется коэффициент асимметрии C_s . Его оценивают различными способами. Классический подход (на основе метода моментов) к его вычислению соответствует следующей формуле:

$$C_s = n \sum (Q_i - Q_{cp})^3 / (n - 1)(n - 2) \sigma_Q^3. \quad (4)$$

Поскольку в формуле (4) присутствует сумма разностей между наблюдаемыми значениями стока и их средним значением, возведенных в третью степень, то относительная погрешность при вычислении коэффициента асимметрии ε_{C_s} будет велика, что и подтверждает формула, рекомендованная А. Ш. Резниковским [2]:

$$\varepsilon_{C_s} = \{[6(1 + C_v)/n]^{0,5}\} / C_s. \quad (5)$$

Из приведенной формулы (5) видно, что при наиболее часто встречающихся в гидрологии и метеорологии значениях C_v и n ($C_v = 0,2 - 0,7$; $n = 30 - 40$ лет) величина относительной погрешности ε_{C_s} примерно соразмерна с самим коэффициентом асимметрии C_s .

Проведенные исследования [3–6 и др.] свидетельствуют о том, что численная оценка коэффициента асимметрии стабилизируется с определенной погрешностью только после моделирования 500-летнего ряда. На гидрологические ряды такой продолжительности, тем более удовлетворяющие условиям стационарного процесса, рассчитывать не приходится. Следует заметить, что общая философия оценки моментов совокупности случайных величин в математической статистике говорит о том, что любой момент нечетной степени характеризует степень асимметрии конкретной выборки из генеральной совокупности любого закона распределения случайных величин, в том числе и момент минус первой степени, относительная погрешность в вычислении которого заведомо должна

быть гораздо меньше, чем при вычислении коэффициента асимметрии. Вообще говоря, даже первый момент дает достаточно наглядную оценку асимметрии распределения членов случайной выборки, если его позицию рассматривать по отношению ко всему диапазону наблюдаемых значений и, в частности, по степени отклонения среднего арифметического от моды и медианы.

Цель проведенной автором работы заключалась в следующем: проверить, можно ли в рамках используемого в гидрологии и метеорологии трехпараметрического гамма-распределения Крицкого и Менкеля для оценки асимметрии применять, кроме классического коэффициента асимметрии, нестандартные параметры?

Задачи:

в рамках указанного распределения выяснить наличие зависимости между выбранными параметрами и коэффициентом асимметрии;

проанализировать возможные погрешности вычисления выбранных нестандартных параметров для оценки асимметрии по ограниченному выборкам гидрологических рядов.

Анализировались следующие параметры:

$$a = 1/n \sum (1/K_i); \quad (6)$$

$$b = 1/n \sum \exp K_i; \quad (7)$$

$$c = 1/n \sum 1/\exp (K_i - 1); \quad (8)$$

$$d = 1/n \sum \lg K_i. \quad (9)$$

Параметр a по своей сути является начальным моментом минус первой степени. При этом следует заметить, что ряд модульных коэффициентов K_i ($i = 1 \dots n$) не должен содержать нулевых значений, так как в знаменателе дроби будет 0, и очень малых значений – тогда a стремится к бесконечности.

Параметр d достаточно успешно применяется вместе с другой статистической характеристикой для определения коэффициентов вариации и асимметрии в методе, основанном на использовании функции правдоподобия [7]. Ранее исследовались и другие параметры [8].

Все перечисленные коэффициенты не имеют в своих аналитических выражениях математических степенных операторов (возведение в третью или пятую степень), которые увеличивали бы погрешности этих коэффициентов, а в знаменателе каждой формулы, кроме (6), нулевые значения практически исключены.

На данном этапе исследования зависимостей между коэффициентом C_s и параметрами a, b, c, d проводили в рамках изменения C_v в пределах 0,4...0,7 и соотношения C_s/C_v в пределах 0,5...5,5. Перечисленные параметры вычисляли по модульным коэффициентам таблиц трехпараметрического гамма-распределения Крицкого и Менкеля [7], соответствующим заданным обеспеченностям P от 0,1 до 99,9 %. Были выбраны 23 значения для $P = 50\%$ и для симметрично расположенных обеспеченностей относительно $P = 50\%$: $P = 40\%$ и $P = 60\%$; $P = 30\%$ и $P = 70\%$ и т.д., т.е. для вычислений использовались модульные коэффициенты, отстоящие на одинаковом расстоянии относительно моды, и само модальное значение $K_{p=50\%}$.

Ряд графиков для перечисленных зависимостей представлен на рис. 1...5.

Из первых двух рисунков видно, что при значительном увеличении C_v и C_s кривая $C_s = f(a)$ существенно изменяется, а значения параметра a

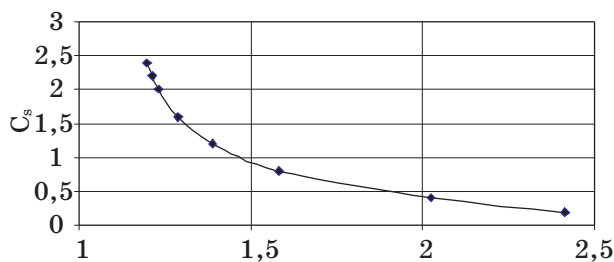


Рис. 1. Зависимость $C_s = f(a)$ при $C_v = 0,4$

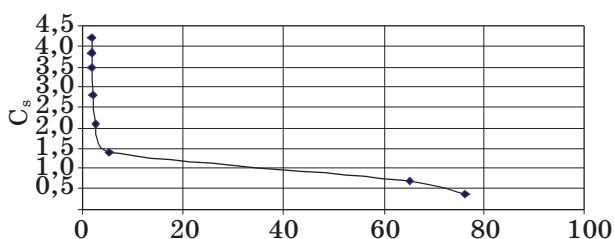


Рис. 2. Зависимость $C_s = f(a)$ при $C_v = 0,7$

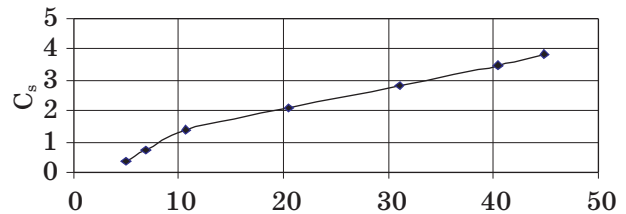


Рис. 3. Зависимость $C_s = f(b)$ при $C_v = 0,7$

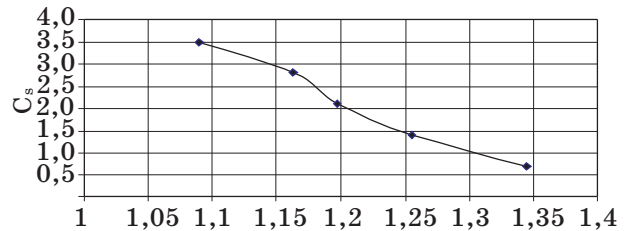


Рис. 4. Зависимость $C_s = f(c)$ при $C_v = 0,7$

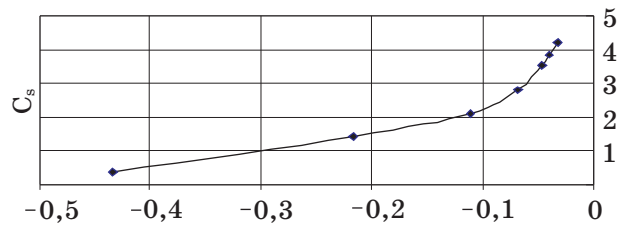


Рис. 5. Зависимость $C_s = f(d)$ при $C_v = 0,7$

становятся трудноразличимыми, что вполне объяснимо из сути самой формулы (6) для a . Поэтому этот параметр имеет существенные ограничения в своем применении. Зависимости C_s от параметров b, c и d в основном диапазоне изменения C_v и соотношения C_s/C_v являются более устойчивыми, чем от параметра a (см. рис. 3...5). Это практически однозначные функциональные зависимости. Следовательно, их применение вполне возможно для объективной оценки асимметрии трехпараметрического гамма-распределения в рамках его использования в гидрологических расчетах.

Для оценки возможных погрешностей параметров a, b, c, d моделировали искусственные гидрологические ряды по условиям годового стока реки Кубань (Краснодар). На рис. 6 представлен график стабилизации параметра b при увеличении моделирования числа лет искусственного гидрологического ряда. Аналогичные графики были получены и для остальных параметров [8].

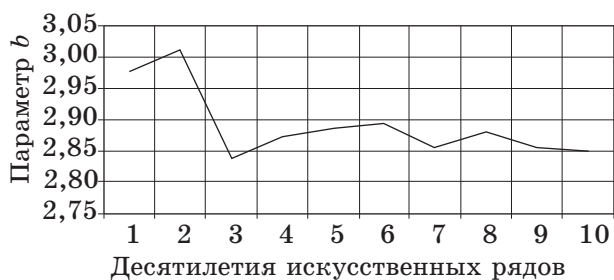


Рис. 6. Стабилизация параметра *b* при удлинении гидрологического ряда

Полученные зависимости показали, что все испытываемые параметры стабилизируются уже после 30 лет наблюдений и имеют незначительные флуктуации. Поэтому для оценки погрешностей рассмотренных параметров

моделировали искусственные гидрологические ряды при количестве членов ряда $N = 30$ с заданными параметрами $C_v = 0,24$ и $C_s = 2C_v$, которые соответствуют годовому стоку реки Кубань. Всего было смоделировано 30 рядов. В таблице представлены значения σ и значения σ/A (A – максимальный диапазон изменения моделированных модульных коэффициентов в тысячелетнем гидрологическом ряду: $A = K_{max} - K_{min}$).

По таблице можно сделать следующее заключение: относительные ошибки используемых параметров при 30 членах гидрологического ряда незначительны.

Численные значения параметров и характеристик σ , и σ/A , полученных при моделировании 30 искусственных рядов (по 30 членов)

| Характеристики для оценки точности параметров | Параметры | | | |
|---|-----------|----------|----------|----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> |
| Средние | 1,064 | 2,795 | 1,031 | -0,013 |
| σ | 0,047 | 0,121 | 0,041 | 0,018 |
| <i>A</i> | 1,750 | 4,860 | 1,320 | 0,620 |
| σ/A | 0,027 | 0,025 | 0,031 | 0,025 |

Выводы

Для оценки асимметрии в распределении случайных величин имеется возможность использовать нестандартные параметры, погрешность вычисления которых значительно меньше погрешности вычисления коэффициента асимметрии при имеющихся рядах наблюдений за стоком.

1. **Блохинов Е. Г.** Распределение вероятностей величин речного стока. – М.: Наука, 1974. – 169 с.
2. **Ильинич В. В.** Имитационная модель работы водохранилища: экспресс-информация. – Люберцы: Московский центр научно-технической информации и пропаганды, 1982. – 4 с.
3. **Картвелишвили Н. А.** Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании стока. – Ленинград: Гидрометиздат, 1967. – 290 с.
4. **Раткович Д. Я., Болгов М. В.** Стохастические модели колебаний составля-

ющих водного баланса речного бассейна. – М.: ИВП РАН, 1997. – 254 с.

5. **Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.** Гидрологические основы речной гидротехники. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – 197 с.
6. **Резниковский А. Ш.** Гидрологические основы гидроэнергетики. – М.: Энергия, 1978. – 147 с.
7. **Рождественский А. В.** Оценка точности кривых распределения гидрологических характеристик. – Л.: Гидрометиздат, 1977. – 272 с.
8. **Ильинич В. В.** Анализ нестандартных параметров для оценки асимметрии распределения случайных величин // Вестник Международной общественной академии экологической безопасности и природопользования. – 2008. – № 3 (10). – С. 61–70.

Материал поступил в редакцию 20.04.10.
Ильинич Виталий Витальевич, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Гидрология, метеорология и регулирование стока»
 Тел. 8 (499) 976-17-45