УДК 502/504:556.18

Л. Д. РАТКОВИЧ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ

Моделирование рядов – эффективное средство для обоснования сложных проектных решений, а также для исследования случайных процессов. Рассмотрена методика практического моделирования многомерного вектора величин стока. Изложены теоретические особенности моделирования коррелированных последовательностей равномерно распределенных случайных величин (обеспеченностей) с использованием бета-распределения. Приводится алгоритм практической реализации предлагаемой методики.

Стохастическая модель стока, равномерное распределение, бета-распределение, множественная корреляция, пары коррелированных рядов.

Simulation of hydrological series has become an effective method for substantiation of design decisions as well as for investigation of stochastic processes. The practical simulation method of multidimensional vector of flow values is considered. There are stated theoretical simulation features of correlated sequences of evenly distributed stochastic values (provisions) basing on beta-distribution. The practical realization algorithm of the proposed method is given.

Stochastic flow model, even distribution, beta-distribution, multiple correlation, pairs of correlated sequences.

Стохастические модели стока рассматривались в работах С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, Ф. Я. Плешкова, Е. Г. Блохинова, Д. Я. Ратковича, А. Е. Асарина, А. Ш. Резниковского, Н. А. Картвелишвили, Г. Г. Сванидзе [1–4]. Возможности использования таких моделей существенно расширились с развитием компьютерных технологий. Роль статистического моделирования в водохозяйственных расчетах показана в работах [5, 6]. Различие методик проявляется в выборе типа функции безусловного распределения, а также автокорреляционной функции для моделирования совокупностей с принятым шагом дискретности во времени. Требования к функции безусловного распределения определяются двумя обстоятельствами – необходимостью исключения области отрицательных значений и наличием независимой асимметрии распределения.

Наиболее простой и достаточно надежный вариант автокорреляционной функции – простая цепь Маркова, устанавливающая связь между смежными величинами случайного ряда. Используемые модели обычно представляют собой авторегрессию первого порядка между величинами стока, либо между их нормализациями, либо между обеспеченностями (вероятностями превышения) годового стока. Модификация марковского процесса (И. О. Сарманов, Д. Я. Раткович) предусматривает линейную корреляцию между обеспеченностями P_i, $P_i + 1$ стока смежных лет с последующим переходом к величинам S_i, $S_i + 1$ стока посредством трехпараметрического гамма-распределения [3, 7]. Последовательность операций выглядит так:

$$P_i \Rightarrow S_i = g(P_i, \bar{S}, C_V, C_S / C_V),$$
$$P_{i+1} = \psi(P_i, r_a, \delta_{i+1}) \Rightarrow S_{i+1} = \tag{1}$$
$$= g(P_{i+1}, S, C_V, C_S / C_V).$$

При необходимости моделирования нескольких взаимосвязанных гидрологических рядов задача естественно усложняется [8]. Остановимся на одном из наиболее общих подходов, предложенных в работе [2].

Задача ставилась следующим образом. Задаваясь конечным числом независимых случайных величин, найти для них линейное преобразование, при котором их математические ожидания, ковариационная матрица (дисперсии, коэффициенты корреляции) и третьи несмешанные моменты (асимметрия) совпадали с известными оценками параметров моделируемых последовательностей. Пусть

$$y_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + ... +$$
$$+ a_{i,n}x_n, i = 1, n;$$
$$\overline{y}_i = a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + a_{i,3}\overline{x}_3 + ... + \tag{2}$$
$$+ a_{i,n}\overline{x}_n, n \text{ уравнений};$$
$$\sigma^2_{yi} = a^2_{i,1}\sigma^2_{x1} + a^2_{i,2}\sigma^2_{x2} + a^2_{i,3}\sigma^2_{x3} + ... +$$
$$+ a^2_{i,n}\sigma^2_{xn}, n \text{ уравнений}.$$

В матричной форме первое уравнение имеет вид $Y = AX$, где A – прямоугольная матрица порядка $n \times N$ с элементами a_{ij}, X – вектор-столбец независимых случайных величин $x_1,...,x_n$. В [3] показано, что ковариационная матрица $B = AA_т$, где $A_т$ – матрица, транспонированная к матрице A. Средствами матричной алгебры в [3] получены выражения для коэффициентов $a_{i,j}$ и параметры вспомогательных многолетних последовательностей x_j.

На основе описанной методики автором статьи разработана компьютерная программа для практического моделирования. Поскольку нормальная корреляция свойственна нормально-распределенным случайным величинам, принято нормальное распределение для $x_1,...,x_n$. Внутрирядная связь воспроизводится в виде авторегрессии первого порядка между обеспеченностями величин стока с последующим переходом к нормально распределенным значениям по равнообеспеченным квантилям [5]. Дальнейший переход к объемам стока выполняется в соответствии с алгоритмом (1).

Возвращаясь к вопросу о построении корреляционной связи между гидрологическими величинами, следует заметить, что построение корреляции между обеспеченностями стока эффективно по нескольким причинам. Во-первых, переход непосредственно к гидрологическим величинам хорошо отработан благодаря универсальному трехпараметрическому распределению С. Н. Крицкого–М. Ф. Менкеля. Во-вторых, все другие модификации процесса Маркова предусматривают субъективные процедуры для перехода к величинам стока. В то же время методика [3] позволяет моделировать гидрологические ряды любой продолжительности с коэффициентом автокорреляции в пределах от 0 до 0,5. С точки зрения инженерного опыта указанный уровень ограничений является достаточно приемлемым для учета автокорреляции, но недостаточным для моделирования взаимозависимых рядов, необходимых, в частности, для водохозяйственного обоснования проектов территориального перераспределения стока.

Сложность реализации методики [3] с использованием модели [2] связана с тем, что композиционный метод неприменим к равномерно распределенным случайным последовательностям (т. е. обеспеченностям), поскольку равномерное распределение – однопараметрическое. В то же время использование обеспеченностей привлекательно для гидролого-водохозяйственных расчетов. Поэтому с целью расширения области действий с обеспеченностями автором статьи рассмотрена возможность применения для их описания бета-распределения. Это двухпараметрическое распределение случайных величин, расположенных на отрезке [0; 1], при определенных ограничениях – одномодальное, с хорошо регулируемым положением моды. Последнее обстоятельство особенно важно для построения условных распределений вероятностей величин стока:

$\mathrm{f}(p,q)=\mathrm{f}(p)\cdot \mathrm{f}(q/p); \mathrm{f}(p)=1$ – функция плотности распределения вероятностей;

$$\mathrm{f}(q)=\frac{q^{\alpha-1}\cdot(1-q)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)};$$

$$\mathrm{F}(q)=\int_0^q \frac{q^{\alpha-1}\cdot(1-q)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathrm{d}q$$ – функция распределения,

где α, β – параметры бета-функции $\beta(x)=x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}$.

В результате предварительных исследований принято решение строить корреляцию между модальными значениями, а не между математическими ожиданиями. Кроме того, выдержать одномодальное распределение ($\alpha>\beta>1$ или $\beta>\alpha>1$) при ориентировании на математическое ожидание невозможно. Мода безусловного распределения совпадает с математическим ожиданием, поскольку равномерное распределение есть частный случай бета-распределения при $\alpha=\beta=\alpha_0=1$. Мода условного распределения определяется достигнутым значением p, так же как и асимметрия этого распределения:

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=m(r)=0,5+r\,(p-0,5)=m;\\ \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\sigma^2(r)=\\ =\sigma_0^2(1-r^2)=\dfrac{1-r^2}{4\,(2\alpha_0+1)}=\dfrac{1-r^2}{12}.\end{cases} \qquad (3)$$

Для описания линейной корреляции между равномерно-распределенными случайными величинами p и q принята модель соответствия коэффициента корреляции r моде условного распределения m_q (в отличие от подхода [3] , где берется не модальное, а среднее значение).

Таким образом, делается допущение о линейности связи между коэффициентами корреляции и значением моды.

Структура уравнения регрессии не меняется по сравнению с [5]:

$$m_q=m=0,5+r(p-0,5). \qquad (4)$$

Решение системы (3) для α и β сводится к решению кубического уравнения относительно β второго уравнения системы (4):

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{(m\beta-2m+1)}{1-m}\;;\\ \dfrac{\beta(m\beta-2m+1)\cdot(1-m)^2}{(\beta-2m+1)^2\cdot(\beta-3m+2)}=\sigma^2=\dfrac{1-r^2}{12}.\end{cases} \qquad (5)$$

С целью реализации методики составлен пакет программ, включающий следующие блоки: нахождение параметров бета-функции для конкретного значения p при заданном значении коэффициента корреляции; построение условных распределений при заданных параметрах бета-функции (табл. 2); моделирование двух параллельных рядов обеспеченностей с последующим переходом к объемам стока. Расчетные показатели замоделированных рядов приведены в табл. 3. Выполнен пример конкретного практического моделирования двух параллельных рядов стока в створах Оби и Иртыша продолжительностью 55 лет (табл. 4).

Таблица 1

Связь коэффициента корреляции и моды

Коэффициент корреляции r	Мода условного распределения m_q
– 1	$1 - p$
0	0,5
1	p

Таблица 3

Значения коэффициента корреляции

Наблюденные ряды		Замоделированные ряды	
Между обеспеченностями	Между объемами стока	Между обеспеченностями	Между объемами стока
0,745	0,802	0,75	0,741

Таблица 2

Условные плотности распределения *q* при достигнутом значении *p* и коэффициенте корреляции между обеспеченностями параллельных рядов *r*

q,%	r = 0,2					q,%	r = 0,5					q,%	r = 0,8				
	p = 0	p = 0,3	p = 0	p = 0,3	p = 0,5		p = 0	p = 0,3	p = 0,5	p = 0,75	p = 1		p = 0	p = 0,3	p = 0,5	p = 0,75	p = 1
0	0,64	0,59	0,56	0,52	0,48	0	0,17	0,03	0,01	0,00	0,00	0	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,97	0,95	0,94	0,92	0,90	5	1,09	0,74	0,56	0,39	0,29	5	2,34	0,28	0,03	0,00	0,00
10	1,00	0,98	0,97	0,96	0,95	10	1,23	0,94	0,76	0,58	0,46	10	2,51	0,75	0,14	0,02	0,01
15	1,02	1,00	0,99	0,98	0,97	15	1,29	1,07	0,91	0,73	0,59	15	2,42	1,23	0,35	0,06	0,03
20	1,03	1,02	1,01	1,00	0,99	20	1,32	1,15	1,02	0,85	0,71	20	2,22	1,63	0,64	0,14	0,06
25	1,03	1,02	1,02	1,01	1,00	25	1,33	1,21	1,10	0,95	0,81	25	1,98	1,91	0,97	0,27	0,11
30	1,04	1,03	1,03	1,02	1,01	30	1,33	1,25	1,16	1,03	0,91	30	1,71	2,07	1,31	0,44	0,19
35	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	35	1,31	1,27	1,21	1,10	0,99	35	1,45	2,11	1,62	0,66	0,29
40	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	40	1,28	1,28	1,24	1,16	1,06	40	1,20	2,03	1,87	0,91	0,41
45	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	45	1,23	1,27	1,26	1,21	1,13	45	0,96	1,87	2,03	1,18	0,57
50	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	50	1,19	1,25	1,27	1,25	1,19	50	0,75	1,64	2,08	1,45	0,75
55	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	55	1,13	1,22	1,26	1,27	1,23	55	0,57	1,37	2,03	1,71	0,96
60	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	60	1,06	1,18	1,24	1,28	1,28	60	0,42	1,08	1,87	1,93	1,2
65	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	65	0,99	1,13	1,21	1,28	1,31	65	0,29	0,80	1,62	2,08	1,45
70	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	70	0,91	1,06	1,16	1,27	1,33	70	0,19	0,55	1,31	2,13	1,72
75	1,00	1,01	1,02	1,03	1,03	75	0,81	0,98	1,10	1,24	1,33	75	0,11	0,34	0,97	2,07	1,98
80	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	80	0,71	0,88	1,02	1,19	1,33	80	0,06	0,19	0,64	1,87	2,23
85	0,97	0,99	0,99	1,01	1,02	85	0,59	0,76	0,91	1,11	1,29	85	0,03	0,08	0,35	1,52	2,42
90	0,95	0,96	0,97	0,99	1,00	90	0,46	0,61	0,76	0,99	1,23	90	0,01	0,02	0,14	1,04	2,51
95	0,90	0,92	0,94	0,95	0,97	95	0,29	0,42	0,56	0,80	1,09	95	0,00	0,00	0,03	0,47	2,35
100	0,49	0,53	0,56	0,60	0,64	100	0,00	0,00	0,01	0,04	0,17	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17

Таблица 4

Моделирование обеспеченностей годового стока календарных рядов Иртыша и Оби в створах Тобольска и Белогорья

Календарный номер года (1...55)	Обеспеченность, %				Объем стока, км^3			
	Фактический ряд		Модельный ряд		Фактический ряд		Модельный ряд	
	Иртыш	Обь	Иртыш	Обь	Иртыш	Обь	Иртыш	Обь
1	57,14	39,29	76,21	42,20	55,45	320,93	49,76	320,76
2	64,29	82,14	48,27	33,12	51,08	249,67	61,60	341,72
3	55,36	83,93	3,30	34,87	56,98	244,08	97,19	337,69
4	82,14	91,07	14,60	24,70	45,34	232,37	80,65	364,83
5	92,86	75,00	64,23	49,94	43,40	254,17	54,98	302,77
6	67,86	62,50	40,74	55,94,	50,69	282,68	64,99	290,21
7	98,21	44,64	77,36	89,11	41,96	312,55	49,25	208,86
8	73,21	32,14	93,49	58,49	48,03	343,97	39,02	284,89
9	80,36	25,00	51,67	61,86	45,48	355,31	60,14	277,65
10	75,00	58,93	92,78	82,88	46,11	291,12	39,64	228,08
11	87,50	71,43	61,77	46,80	44,46	255,69	56,02	310,08
12	25,00	3,57	86,64	86,48	76,53	436,32	44,08	216,95
13	21,43	35,71	22,90	26,71	77,43	341,91	74,02	358,71
14	26,79	53,57	26,26	42,47	74,11	297,96	71,95	320,13
15	58,93	60,71	65,91	87,34	55,04	284,41	54,26	214,32
...	...	...	...	...	...	...	...	...
40	17,86	8,93	75,42	79,73	78,69	402,80	50,11	237,57
41	7,14	19,64	55,09	20,75	88,35	372,39	58,76	378,08
42	5,36	14,29	78,62	31,47	97,65	394,28	48,69	345,50
43	19,64	21,43	34,72	57,30	78,16	370,54	67,66	287,37
44	23,21	16,07	70,14	43,07	76,70	390,15	52,46	318,76
45	48,21	57,14	34,13	24,47	60,74	292,00	67,92	365,61
46	96,43	37,50	51,16	56,87	43,25	322,57	60,35	288,28
47	85,71	87,50	34,17	36,42	44,87	234,91	67,90	334,12
48	94,64	73,21	.99	9,58	43,32	255,63	108,12	430,01
49	33,93	46,43	6,34	36,63	67,37	311,84	90,44	333,63
50	8,93	30,36	52,03	51,17	84,93	346,03	60,00	300,18
51	35,71	67,86	87,73	90,35	66,81	275,78	43,43	204,57
52	60,71	94,64	64,84	68,16	53,11	222,35	54,72	263,87
53	91,07	96,43	56,08	65,52	43,46	209,74	58,36	269,65
54	39,29	42,86	3,09	18,56	64,60	314,47	97,76	387,26
55	51,79	41,07	4,75	17,08	58,06	316,19	93,20	394,05
Среднее значение	50,00	50,00	49,44	50,66	62,39	310,96	63,27	303,74
Стандартное отклонение	28,61	28,61	27,99	22,56	16,84	62,19	16,45	54,67
Коефициент вариации C_v	0,57	0,57	0,57	0,45	0,27	0,20	0,26	0,18

Сопоставление фактических и замоделированных рядов свидетельствует о достаточно высокой степени совпадения воспроизведенных коэффициентов корреляции с исходными значениями. Основной вывод по результатам исследований формулируется следующим образом. Методика практического моделирования гидрологических рядов с учетом взаимной корреляции может быть построена на основе бета-распределения вероятностей значений обеспеченностей гидрологических рядов. В дальнейшем необходимо провести экспериментальную проверку правомерности принятой гипотезы о характере условного распределения обеспеченностей величин стока на натурном материале.

1. **Болгов М. В.** Стохастические модели периодически коррелированных внутригодовых колебаний речного стока // Метеорология и гидрология. – 1996. – № 1. – С. 101–116.

2. **Музылев С. В., Привальский В. Е., Раткович Д. Я.** Стохастические модели в инженерной гидрологии. – М.: Наука, 1982. – 174 с.

3. **Раткович Д. Я.** Многолетние колебания речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 255 с.

4. **Сарманов О. В., Сарманов И. О.** Основные типы корреляции, применяемые в гидрологии. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

5. **Воропаев Г. В., Исмайылов Г. Х., Федоров В. М.** Проблемы управления

водными ресурсами Арало-Каспийского региона. – М.:. Наука, 2003. – 400 с.

6. **Исмайылов Г. Х., Прошляков И. В., Раткович Л. Д.** Методология управления большими водохозяйственными системами на примере Волжско-Камского каскада водохранилищ // Мелиорация и водное хозяйство. – 2006. – № 4. – С. 17–22.

7. **Раткович Л. Д.** Методология обосновывающих водохозяйственных расчетов // Мелиорация и водное хозяйство. – 2007. – № 6. – С. 32–34.

8. **Раткович Д. Я.** Моделирование взаимозависимых гидрологических рядов (на примерах притока к Аральскому и Азовскому морям) // Водные ресурсы. – 1977. – № 1. – С. 5–15.

Материал поступил в редакцию 03.05.11.

***Раткович Лев Данилович**, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Комплексное использование водных ресурсов»*
Тел. 8-903-615-80-59
E-mail: levkivr@mail.ru

УДК 502/504:556.18

В. Н. МАРКИН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

ЭКОЛОГО-ВОДОХОЗЯЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА РЕКИ ТУРЫ

Дана оценка изменению качества воды и экологическому состоянию реки Туры. Рассмотрено ее влияние на качество воды в реке Тобол. Эти реки играют большую роль в водоснабжении Урала. Неудовлетворительное качество воды – одна из проблем Уральского региона. Расчеты проведены с помощью метода соответствия гидрохимических, гидробиологических и гидрологических параметров водной среды, который позволяет при минимальном количестве исходных данных делать оценку с учетом и без учета водоохранных мероприятий.

Прогноз, оценка качества воды, экологическое состояние водного объекта.

There is given an assessment of water quality and ecological condition of the river Tura. Its influence on the water quality in the river Tobol is considered. The given rivers play an important role in water supply of the Urals. The unsatisfactory water quality is one of the problems of the Ural region. Calculations were carried out according to the correspondence method of hydrochemical,hydrobiological and hydrological parameters of water environment allowing making assessments under a minimal quantity of initial data with or without taking into consideration water protection measures.

Forecast, water quality assessment, ecological state of water object.

Река Тура протекает в Уральском регионе и является левым притоком Тобола. Длина Туры составляет 1030 км, площадь бассейна – 80,4 тыс. км^2.

Речная вода используется для питьевого и технического водоснабжения. В настоящее время ее воды загрязнены. Характерными загрязнителями являются нефтепродукты, фенолы, медь, железо. Основные объемы загрязняющих воду веществ поступают со сточными водами городов и расположенных в них промышленных и автомобильных предприятий.

В данной работе дается оценка изменения качества воды и экологического состояния реки Туры. Оценено ее влияние на качество воды в реке Тобол. Анализ проведен с учетом и без учета водоохранных мероприятий. По прогнозным расчетам предполагается, что антропогенная нагрузка на реку соответствует современному уровню.