

УДК 502/504:532.543

**Е. В. ДУВАНСКАЯ, М. Ф. МИЦИК**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»

**В. Н. КОХАНЕНКО**

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донской государственный аграрный университет»

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

*Предлагается новый подход к описанию крайней линии тока в плоскости годографа скорости для бурного свободнорастекающегося стационарного потока воды. Предлагаемое решение удовлетворяет условиям непрерывности параметров течения на выходе из трубы в нижний бьеф. Показана адекватность нового решения предыдущему почти на всем плане течения.*

*Крайняя линия тока, прямоугольная труба, горизонтальное отводящее русло.*

*The article describes a new approach to the description of the extreme current line in the plane of the velocity hodograph for torrential freely spreading stationary water flow. The proposed solution meets the requirements of continuous flow parameters at the pipe outlet downstream. There is shown an adequacy of the new solution to the previous one on the almost whole flow plan.*

*Extreme current line, rectangular pipe, horizontal discharge channel.*

В работах [1, 2] было получено уравнение математической физики в частных производных второго порядка для функции тока бурного свободнорастекающегося потока:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\psi = \psi(\tau; \theta)$  – функция тока;  $\tau$  – аргумент, изменяющийся в пределах  $\frac{1}{3} < \tau_0 \leq \tau < 1$ , являющийся квадратом модуля вектора скорости жидкой частицы;  $\theta$  – угол наклона вектора скорости жидкой частицы к продольной оси симметрии потока (рис. 1).

В вышеуказанных работах было найдено приближенное аналитическое решение уравнения (1) для верхней крайней линии тока (которую в дальнейшем будем называть просто крайней линией тока)

$$\psi_1 = A \frac{\sin \theta}{\tau^2}, \quad (2)$$

где  $A$  – постоянная, определяемая из граничных условий задачи.

Однако решение (2) не удовлетворяет уравнению крайней линии тока:

$$\psi = \frac{v_0 b}{2} = \text{const при } \theta = 0; \tau = \tau_0, \quad (3)$$

где  $b$  – ширина водопропускной трубы;  $v_0$  – модуль вектора скорости на выходе из трубы в широкое отводящее русло.

В связи с этим на выходе потока из трубы нарушается непрерывность течения по параметрам  $\tau, \theta$ .

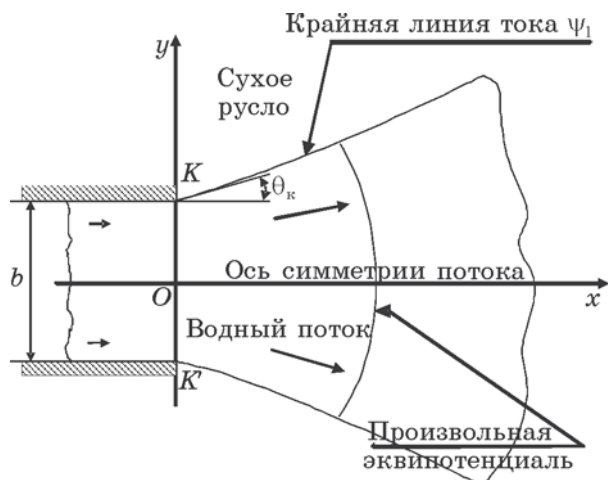


Рис. 1. План свободного растекания бурного потока

Целью проведенных авторами исследований был поиск приближенных решений уравнения (1) в окрестности точки  $K(\theta = 0; \tau = \tau_0)$ , удовлетворяющих условию непрерывности по параметрам  $(\tau, \theta)$  для крайней линии тока в плане растекания потока.

Уравнение (1) будем решать так:

$$\psi_2 = \sin \theta \cdot \left( \frac{A}{\tau^2} + \frac{B(1-\tau)^\alpha}{(\tau - \tau_0)^2} \right), \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$ .

Кривую вида (4) будем рассматривать, учитывая, что для крайней линии тока (4) выполняется условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{\sin \theta}{(\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}}} = 1. \quad (5)$$

Из (5) следует, что в окрестности точки  $\tau = \tau_0$  имеет место равенство

$$\sin \theta = (\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}} + o\left((\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где  $o$  – бесконечно малая функция относительно своего аргумента,

отсюда

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \sin \theta = 0 \text{ и } \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \theta = 0. \quad (6)$$

Найдем значения постоянных  $A$  и  $B$ . Вычислим предел функции (4) при  $\tau \rightarrow \tau_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \psi &= \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{A \sin \theta}{\tau^2} + \\ &+ \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{\sin \theta \cdot B(1-\tau)^\alpha}{(\tau - \tau_0)^2} = B(1-\tau_0)^\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку на крайней линии тока выполняется условие (3), то из (7), что

$$B = \frac{v_0 b}{2(1-\tau_0)^\alpha}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь поведение функции (4) при  $\tau \rightarrow 1$ . На крайней линии тока получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 1} \psi_2 &= \lim_{\tau \rightarrow 1} \sin \theta \cdot \left( \frac{A}{\tau^2} + \frac{B(1-\tau)^\alpha}{(\tau - \tau_0)^2} \right) = \\ &= \frac{A \sin \theta_{\max}}{1} + 0 = A \sin \theta_{\max}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\theta_{\max}$  – угол между вектором скорости и осью симметрии потока  $Ox$  на бесконечности.

Учитывая условие (3), из (9) имеем:

$$A = \frac{v_0 b}{2 \sin \theta_{\max}}. \quad (10)$$

Такому же значению постоянная  $A$  равна и в выражении (2) для функции  $\psi_1$ .

С учетом полученных значений постоянных  $A$  и  $B$  уравнение для крайней линии тока будет иметь следующий вид:

$$\psi_2 = \frac{v_0 b}{2} \sin \theta \cdot \left( \frac{1}{\tau^2 \sin \theta_{\max}} + \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^2} \right). \quad (11)$$

Исследуем свойства кривой  $\psi_2$  при изменении аргумента  $\tau$ . На крайней линии тока из (11) получим:

$$\frac{v_0 b}{22} = \frac{v_0 b}{2} \sin \theta \cdot \left( \frac{1}{\tau^2 \sin \theta_{\max}} + \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^2} \right),$$

отсюда

$$\sin \theta = \frac{\tau^{\frac{1}{2}} (1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}} + (1-\tau)^\alpha \tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}}. \quad (12)$$

Выясним поведение угла  $\theta$  в зависимости от  $\tau$ . Для этого сначала определим поведение функции  $1/\sin \theta$  по  $\tau$ . Из (12) получим:

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}} + \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13)$$

Найдем производную от выражения (13) по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{\sin \theta}\right)}{d\tau} &= -\frac{1}{2\tau^{\frac{3}{2}} \sin \theta_{\max}} - \\ &- \frac{(1-\tau)^{\alpha-1} (\alpha(\tau - \tau_0) + 1 - \tau)}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau - \tau_0)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку выполняются соотношения

$$\frac{1}{3} < \tau_0 \leq \tau < 1, \quad (15)$$

то каждое из слагаемых правой части равенства (14) при условиях (15)

отрицательно, следовательно, функция  $1/\sin \theta$  убывает, соответственно  $\sin \theta$  – монотонно возрастающая функция. Таким образом, на крайней линии тока возрастанию аргумента  $\tau$  соответствует монотонное возрастание угла  $\theta$ .

Сравним взаимное расположение кривых  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в плоскости годографа скорости. Для этого кривую (2) представим так:

$$\frac{1}{\sin \theta} = f_1(\tau) = \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}}. \quad (16)$$

Аналогично кривую (11) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} = f_2(\tau) &= \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}} + \\ &+ \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau-\tau_0)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Исследуем теперь, в каких границах кривые  $f_1(\tau)$  и  $f_2(\tau)$  мало отличаются между собой. Такая ситуация будет иметь место в том случае, когда мало будут отличаться углы при одинаковых значениях  $\tau$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{f_2 - f_1}{f_1} < f_2 - f_1 = \\ = \frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau-\tau_0)^{\frac{1}{2}}} > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Определим интервал по  $\tau$ , на котором выполняется оценка

$$\frac{(1-\tau)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (\tau-\tau_0)^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon, \quad (19)$$

где  $\varepsilon$  – погрешность аппроксимации, которая в практических расчетах обычно принимается в пределах от 3 до 5 %.

Пусть сначала переменная  $\tau$  удовлетворяет условию

$$1 > \tau \geq 1 - m(1-\tau_0)\varepsilon^\alpha. \quad (20)$$

Тогда выполняются следующие оценки:

$$1 - \tau \leq m(1-\tau_0)\varepsilon^\alpha;$$

$$\begin{aligned} (\tau - \tau_0)^{\frac{1}{2}} &\geq \sqrt{1 - \tau_0 - m(1-\tau_0)\varepsilon^\alpha} = \\ &= (1-\tau_0)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - m\varepsilon^\alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим теперь разность  $f_1 - f_2$ :

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 &\leq \frac{m^\alpha \varepsilon (1-\tau_0)^\alpha}{(1-\tau_0)^\alpha (1-\tau_0)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - m\varepsilon^\alpha}} = \\ &= m^\alpha \frac{\varepsilon}{(1-\tau_0)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - m\varepsilon^\alpha}}. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения оценки:

$$m^\alpha \frac{\varepsilon}{(1-\tau_0)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - m\varepsilon^\alpha}} < \varepsilon.$$

При этом должно быть выполнено следующее условие:

$$m^{2\alpha} < (1-\tau_0) \left( 1 - m\varepsilon^\alpha \right). \quad (22)$$

Условие (22) будет выполнено, если

$$m^{2\alpha} < (1-\tau_0)(1-m). \quad (23)$$

Решая неравенство (23) относительно  $\alpha$ , получим:

$$\alpha > \frac{\ln(1-\tau_0) + \ln(1-m)}{2 \ln m}. \quad (24)$$

При проектировании дорожных водопропускных сооружений число Фруда на выходе из трубы  $Fr_0$  используется в диапазоне от 1,5 до 5, что соответствует изменению параметра  $\tau_0$  в пределах от 3/7 до 5/7.

Поскольку

$$\frac{3}{7} \leq \tau_0 \leq \frac{5}{7}, \text{ то } \frac{2}{7} \leq 1 - \tau_0 \leq \frac{4}{7}. \quad (25)$$

Учитывая неравенства (25) и полагая, что  $m = 6/7$ , из (24) получим:

$$\alpha > \frac{\ln(2) - 2 \ln(7)}{2(\ln 6 - \ln 7)} = 10,3751,$$

тогда

$$\alpha = 1,1. \quad (26)$$

При неограниченном увеличении значения  $\alpha$  функция  $f_2(\tau)$  будет как угодно близка к функции  $f_1(\tau)$ , соответственно функция  $\psi_2$  будет близка к функции  $\psi_1$ .

Таким образом, функция  $\psi_2$  выражением (11) определяется теперь однозначно. Выясним, в каком диапазоне изменения переменной  $x$  в физической плоскости находится крайняя линия тока, если

$$\tau_0 < \tau \leq 1 - m(1 - \tau_0)\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (27)$$

На отрезке изменения переменной

$$\tau \in \left[ \tau_0; 1 - m(1 - \tau_0)\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right] \text{ кривые } \psi_1 \text{ и } \psi_2$$

существенно отличаются, соответственно они отличаются и в плоскости годографа скорости на отрезке  $[0; x_M]$ , который соответствует условиям (27). Для определения границ изменения аргумента  $x$  на крайней линии тока, соответствующих условиям (27), воспользуемся формулой из [1], определяющей абсциссу точки  $M$  по известному значению  $\tau_M$ :

$$x_M = \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left( J_1 - kJ_2 - kJ_3 \right) \Big|_{\tau_K}^{\tau_M}, \quad (28)$$

где  $J_1 = \frac{1+\tau}{\tau(1-\tau)} + \ln \frac{\tau}{1-\tau}$ ;  $J_2 = \frac{2}{1-\tau} + \ln \frac{1-\tau}{\tau}$ ;

$$J_3 = \ln \frac{\tau}{1-\tau}; \quad k = \sin^2 \theta_{\max};$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Следует отметить, что формула (28) справедлива для кривой (2), а диапазон изменения аргумента  $\tau$  у функции  $\psi_1$  отличается:

$$\tau_K \leq \tau \leq \tau_M, \quad (29)$$

где значение  $\tau_K > \tau_0$  и определяется как решение системы [1]:

$$\begin{cases} \sin \theta_K = \tau_K^{\frac{1}{2}} \sin \theta_{\max}; \\ \cos \theta_K = \frac{1}{\tau_K^{\frac{1}{2}} (1 - \tau_K)}, \end{cases} \quad (30)$$

при этом значение  $\theta_{\max}$  вычисляется по формуле [3]:

$$\theta_{\max} = (\sqrt{3} - 1) \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3(1 - \tau_0)}}. \quad (31)$$

Значение  $\tau_M$  определяем из (27):

$$\tau_M = 1 - m(1 - \tau_0)\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (32)$$

Полагая, что в (31)  $\varepsilon = 0,03$ , вычисляем:

$$\tau_M = 1 - \frac{9}{14}(1 - \tau_0). \quad (33)$$

Упростим выражение коэффициента в формуле (28), используя известные [1] выражения для глубины  $h_0$  и скорости  $v_0$ :

$$h_0 = H_0(1 - \tau_0);$$

$$v_0 = \tau_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gH_0}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} &= \frac{v_0 b H_0 (1 - \tau_0)}{2 \sin \theta_{\max} \sqrt{2gH_0} 2H_0} = \\ &= \frac{b(1 - \tau_0)\tau_0^{\frac{1}{2}}}{4 \sin \theta_{\max}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, абсцисса точки  $M$  представляет собой выражение вида  $x_M = bF(\tau_0)$ .

Выражение для функции  $F(\tau_0)$  получается, если вычислить  $\tau_K$  из системы (30), а величины  $\theta_{\max}$  и  $\tau_M$  – по формулам (31), (33). Такие преобразования были реализованы в среде прикладных математических программ Maple 9.5. График функции  $F(\tau_0)$  представлен на рис. 2.

Отрицательные значения абсциссы  $x_M$  при  $\tau_0 < 0,58$  объясняются следующим образом: формула (28) для нахождения границ по  $x$  определялась для кривой  $\psi_1$ , задаваемой уравнением (2), значения переменной  $\tau$  удовлетворяют условию (29), т.е. даже при

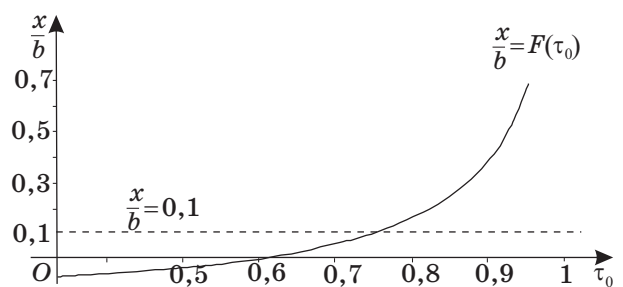


Рис. 2. График функции  $F(\tau_0)$

$\tau_0 = 1/3$  значение  $\tau_k = 0,58$ .

При проектировании дорожных водопропускных сооружений значения параметра  $\tau_0$  используются в пределах от  $3/7$  до  $5/7$ , или  $\tau_0 \in [0,42; 0,72]$ . (35)

Из рис. 2 нетрудно видеть, при таких значениях параметра  $\tau_0$  выполняется условие  $x/b < 0,1$ .

Таким образом, кривые  $\psi_1$  и  $\psi_2$  при условиях (35) практически совпадают в плане растекания потока, за исключением малого участка потока вблизи выходной трубы, ширина которого не превосходит  $0,1b$  (рис. 3).

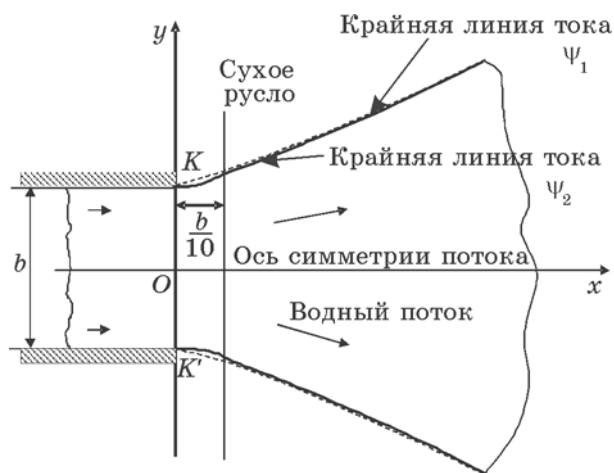


Рис. 3. Сравнение крайних линий тока  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в плане течения

При значениях  $\tau_0$  от  $3/7$  до  $5/7$  (т.е. в тех диапазонах значений, которые используются при проектировании дорожных водопропускных сооружений) и значениях  $x \geq 0,1b$  относительное рассогласование выражений

для крайней линии тока  $\Delta = \left| \frac{(f_2 - f_1)}{f_1} \cdot 100 \% \right|$  не превосходит 3 %.

Решение  $\psi_2$  удовлетворяет условию непрерывности течения на выходе из трубы (при  $\tau = \tau_0, \theta = 0$ ). Угол  $\theta$  на кривой  $\psi_2$  монотонно возрастает с ростом  $\tau$ .

Уравнение крайней линии тока удовлетворяет граничным условиям свободного растекания бурного потока как на выходе из трубы, так и на бесконечности.

1. **Мицик М. Ф., Косиченко Н. В., Лемешко М. А.** Метод с использованием годографа скорости применительно к расчету параметров бурного двухмерного потока // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сб. статей IV Междунар. научн.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2010. – С. 130–141.

2. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография / В. Н. Коханенко [и др.]. – Ростов на Дону: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

3. **Емцев В. Т.** Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.

Материал поступил в редакцию 17.09.10

**Дуванская Елена Викторовна**, кандидат технических наук, доцент

E-mail: delvik2004@list.ru

**Мицик Михаил Федорович**, кандидат технических наук, доцент

E-mail: m\_mits@mail.ru

**Коханенко Виктор Николаевич**, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Техническая механика и гидравлика»

E-mail: kosmi74@yandex.ru