

УДК 502/504:532.543

Е. В. ДУВАНСКАЯ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ  
БУРНОГО ПОТОКА И ЕЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ**

*В работе приводится общая формулировка двухмерной плановой задачи для свободнорастекающегося бурного потока. Описаны основные допущения модели, система уравнений движения потока в плоскости годографа. Получены общие решения системы для потенциальной функции и функции тока.*

*Расчет гидравлических параметров, бурный поток, горизонтальное отводящее русло.*

*In this work the general formulation of a two-dimensional planned problem for a freely spreading rapid flow is given. The basic model assumptions, system of equations of flow movement in the hodograph plane are described. There are received general solutions of the system for a potential function and current function.*

*Calculation of hydraulic parameters, rapid flow, horizontal tailrace channel.*

Исследование свободного растекания бурного потока в широкое отводящее русло за водопропускными трубами, работающими в безнапорном режиме, имеет большое значение для теории плановых потоков, расчета и проектирования ГТС дорожного, мелиоративного строительства, а также систем водопользования.

Следует отметить вклад, сделанный известными учеными и специалистами в области гидравлики плановых потоков: И. А. Шеренкова, С. А. Христиановича, Л. И. Высоцкого, Б. Т. Емцева, Г. А. Лилицкого, Г. И. Сухомела, А. В. Гарзанова, П. А. Журавлева, С. А. Чаплыгина, Н. Т. Мелещенко.

Однако экспериментальные исследования показывают, что модели известных авторов требуют уточнения [1, 2]. В частности, рассогласование с экспериментом координат крайних линий тока, полученных И. А. Шеренковым и Г. А. Лилицким, достигает 40 % и более. Таким образом, задача определения параметров свободнорастекающегося бурного водного потока является актуальной.

Для постановки краевой задачи свободного растекания бурного водного потока за водопропускной трубой в широкое отводящее русло в данной работе рассмотрим упрощенную модель потока.

Основные допущения модели: поток открытый, бурный, двухмерный в плане, стационарный; поток имеет продольную ось симметрии в плане течения; дно отводящего русла плоское, горизонтальное; силы сопротивления потоку не учитываются; движение потока потенциальное.

При указанных допущениях справедлив интеграл Бернулли для двухмерных в плане бурных потоков:

$$\frac{V^2}{2g} + h = H_0, \quad (1)$$

где  $V$  – модуль вектора скорости жидкой частицы потока;  $h$  – местная глубина потока;  $H_0$  – постоянная, определяемая по известным значениям  $h_0$ ,  $V_0$ ;  $h_0$ ,  $V_0$  – глубина и скорость потока на выходе из трубы соответственно;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Уравнение неразрывности потока в дифференциальной форме:

$$\frac{d(V_x h)}{dx} + \frac{d(V_y h)}{dy} = 0, \quad (2)$$

где  $V_x = V \cos \theta$ ;  $V_y = V \sin \theta$ ;  $\theta$  – угол между вектором скорости и продольной осью симметрии потока  $OX$ .

Из условия потенциальности потока следует:

$$\frac{dV_x}{dy} - \frac{dV_y}{dx} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений движения двухмерного в плане потока есть нелинейная

замкнутая система трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{V^2}{2g} + h = H_0, V^2 = V_x^2 + V_y^2; \\ \frac{d(V_x h)}{dx} + \frac{d(V_y h)}{dy} = 0; \\ \frac{dV_x}{dy} - \frac{dV_y}{dx} = 0, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где  $V_x, V_y, h$  – неизвестные функции;  $x, y$  – независимые переменные.

Перейдем в системе (4) к естественной форме. Для потенциальной функции  $\varphi = \varphi(x, y)$  получим систему дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \left[ c^2 - \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] - 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} + \\ + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \left[ c^2 - \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right] = 0; \\ c = \sqrt{gh}; V_x = \frac{d\varphi}{dx}; V_y = \frac{d\varphi}{dy}; \\ V^2 = \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2; \frac{V^2}{2g} + h = H_0. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Аналогично системе уравнений (5) получим систему уравнений относительно функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} \left[ 1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right] + \\ + \frac{d^2\psi}{dy^2} \left[ 1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right] + \\ + \frac{2}{c^2 h^2} \frac{d^2\psi}{dx dy} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dy} = 0; \\ hV_x = \frac{d\psi}{dy}; hV_y = -\frac{d\psi}{dx}; c = \sqrt{gh}; \\ \frac{V^2}{2g} + h = H_0; V^2 = V_x^2 + V_y^2. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Перейдем от уравнений движения потока в физической плоскости для естественных функций  $\varphi = \varphi(x, y)$ ,  $\psi = \psi(x, y)$  к уравнениям для  $\varphi = \varphi(\tau, \theta)$ ,  $\psi = \psi(\tau, \theta)$  в плоскости годографа скорости относительно аргументов  $\tau, \theta$ , где  $\tau = V^2/2gH_0$  квадрат скоростного коэффициента.

Для бурных потоков  $\tau$  изменяется в пределах  $1/3 < \tau \leq 1$ .

Система уравнений движения потока в плоскости годографа скорости, согласно [3, 4], приобретает следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2h_0}{\tau H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d\psi}{d\tau}; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h_0}{2H_0} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{d\psi}{d\theta}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

При этом между плоскостью годографа скорости и физической плоскостью течения потока справедлива следующая дифференциальная зависимость:

$$d(x + iy) = \frac{1}{V} e^{i\theta} \left( d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right), \quad (8)$$

где  $i$  – мнимая единица;  $e$  – основание натурального логарифма.

Как известно из [3], система (7) допускает аналитические решения.

Дифференцируя первое уравнение системы (7) по аргументу  $\tau$ , а второе – по аргументу  $\theta$  и приравнявая смешанные вторые частные производные, получим следующее уравнение математической физики:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{2\tau}{1-\tau} \frac{d\psi}{d\tau} \right\} + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = 0. \quad (9)$$

Для бурных потоков  $\Delta = [3\tau - 1/4(1-\tau)] > 0$  при  $1/3 < \tau < 1$  и уравнение (9) относится к гиперболическому типу.

Для поиска аналитических решений уравнения (9) воспользуемся известным методом разделения переменных [5]. Для этого представим функцию  $\psi(\tau, \theta)$  в виде произведения:

$$\psi(\tau, \theta) = \psi_1(\tau) \cdot \psi_2(\theta). \quad (10)$$

Функцию  $\psi_2(\theta)$  можно выбрать в следующем виде:

$$\psi_2(\theta) = \cos n\theta, \text{ или } \psi_2(\theta) = \sin n\theta. \quad (11)$$

Тогда уравнение (9) сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d\psi_{ln}}{d\tau} \right\} - n^2 \frac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)^2} \psi_{ln} = 0. \quad (12)$$

Полагая в уравнении (12)  $n = 2k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , приведем его к следующему виду:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d\psi_{1k}}{d\tau} \right\} - \frac{k^2(1-3\tau)}{\tau(1-\tau)^2} \psi_{1k} = 0. \quad (13)$$

Производя далее в (13) замену  $\psi_{1k} = \tau^k Y_k(\tau)$ ,

получим для функции  $Y_k(\tau)$  известное гипергеометрическое уравнение с действительными коэффициентами [7]:

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 Y_k}{d\tau^2} + [2k+1-2k\tau] \frac{dY_k}{d\tau} + k(2k+1)Y_k = 0. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) [6]:

$$\psi_{1k} = A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)},$$

где  $\psi_{1k}^{(1)} = \tau^k Y_k^{(1)}$ ;  $\psi_{1k}^{(2)} = \tau^k Y_k^{(2)}$ ;  $Y_k^{(1)} = F(a_k, b_k, c_k, \tau) = 1 + \frac{a_k b_k}{c_k} \tau + \frac{1}{2!} \frac{a_k(a_k+1)b_k(b_k+1)}{c_k(c_k+1)} \tau^2 + \dots$ ;  
 $Y_k^{(2)} = \tau^{-2k} F(a_k - 2k, b_k - 2k, 1 - 2k, \tau)$ ;  $F(a_k, b_k, c_k, \tau)$  – гипергеометрическая функция. (15)

Коэффициенты  $a_k, b_k, c_k$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2k-1}{2} + \frac{\sqrt{12k^2+1}}{2}; \\ b_k &= \frac{2k-1}{2} - \frac{\sqrt{12k^2+1}}{2}; \\ c_k &= 2k+1. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение  $Y_k^{(2)}$  является линейно независимым с решением  $Y_k^{(1)}$ .

В [5] показано, что ряд (15) сходится абсолютно и равномерно при  $|\tau| \leq 1$ . (17)

Далее, полагая в уравнении (12)  $n = 2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots$ , получим:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d\psi_{1k}}{d\tau} \right\} - \frac{(2k-1)^2(1-3\tau)}{4\tau(1-\tau)^2} \psi_{1k} = 0. \quad (18)$$

Сделаем в уравнении (18) замену  $\psi_{1k} = \tau^{k-\frac{1}{2}} \bar{Y}_k(\tau)$ , (19)

также приведем его к дифференциальному гипергеометрическому уравнению:

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 \bar{Y}_k}{d\tau^2} + [2k+1-2k\tau] \frac{d\bar{Y}_k}{d\tau} + k(2k+1)\bar{Y}_k = 0, \quad (20)$$

которое имеет следующее общее решение:

$$\begin{aligned} \psi_{1k} &= A_k^{*(1)} \tau^{k-\frac{1}{2}} Y_k^{*(1)} + A_k^{*(2)} \tau^{k-\frac{1}{2}} Y_k^{*(2)} = \\ &= A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)}, \end{aligned}$$

где  $Y_k^{*(1)} = F(a_k, b_k, c_k, \tau) = 1 + \frac{a_k b_k}{c_k} \tau + \frac{1}{2!} \frac{a_k(a_k+1)b_k(b_k+1)}{c_k(c_k+1)} \tau^2 + \dots$ ;

$$Y_k^{*(2)} = \tau^{1-2k} F(a_k + 1 - 2k, b_k + 1 - 2k, 2 - 2k, \tau); \quad (21)$$

$a_k^* = k - 1 + \sqrt{3k^2 - 3k + 1}$ ;  $b_k^* = k - 1 - \sqrt{3k^2 - 3k + 1}$ ;  $c_k^* = 2k$ .

С учетом найденных решений (15), (21) общее решение уравнения (9) можно записать так:

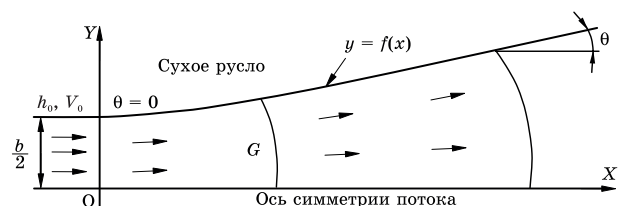
$$\begin{aligned} \psi &= A_0 + B_0 \psi_{10}(\theta) + C_0 \psi_{20}(\tau) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \right. \\ &+ \left. \left[ B_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cos k\theta \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin(2k-1)\theta + \right. \\ &+ \left. \left[ B_k^{*(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{*(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cos(2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решения  $\psi_{10}(\theta)$  и  $\psi_{20}(\tau)$  находятся стандартными методами из (9).

Решение для потенциальной функции, соответствующее решению (22), определяется выражением:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \left[ (A_0 + C_0 \psi_{20}(\tau)) \theta + \right. \\ &+ \left. \int B_0 \psi_{10}(\theta) d\theta \right] + \\ &+ \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \right. \\ &\cdot \int \sin k\theta d\theta + \left. \left[ B_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \int \cos k\theta d\theta \right\} + \\ &+ \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \cdot \right. \\ &\cdot \int \sin(2k-1)\theta d\theta + \left. \left[ B_k^{*(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{*(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \right. \\ &\cdot \left. \int \cos(2k-1)\theta d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Сформулируем теперь граничную задачу растекания бурного потока в физической плоскости течения потока (рисунок).



План растекания потока

В силу симметрии потока рассматриваем только его верхнюю часть относительно оси симметрии  $OX$ .

Необходимо определить в плане течения потока  $G$  его параметры:

$$h = h(x; y), V = V(x; y), \theta = \theta(x; y) \quad (24)$$

и неизвестную границу растекания  $y = f(x)$  при следующих условиях:

$$x = 0; \quad y(0) = b/2;$$

$$V(0; y) = V_0, h(0; y) = h_0, \theta(0; y) = 0$$

$$\text{при } 0 \leq y \leq b/2; \quad (25)$$

$y'_x = f'_x = \operatorname{tg} \theta$  – вдоль произвольной линии тока

при  $x \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, V \rightarrow V_{\max}$ .

На оси симметрии потока  $\theta(x; 0) \equiv 0$ .

Границу  $y = f(x)$  полагаем гладкой, монотонно возрастающей функцией аргумента  $x$ . При этом функции (24) должны удовлетворять системе (4). В рамках модели, описываемой системой дифференциальных уравнений (4), что вдоль граничной линии тока функция  $h$  изменяется монотонно от значения  $h_0$  до нуля, функция  $V$  изменяется от  $V_0$  до значения  $V_{\max} = \sqrt{2gH_0}$ , угол  $\theta$  – от нуля до  $\theta_{\max}$ . Обоснуем это следующим образом.

Известно, что бурный поток, растекаясь (без учета сил сопротивления потоку), будет неограниченно расширяться [2]. Выделим в потоке элементарную струйку шириной  $b$ , тогда расход этой элементарной струйки

$$\Delta Q = Vhb = \operatorname{const}. \quad (26)$$

Беря логарифмическую производную этого выражения, получаем:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dh}{h} + \frac{db}{b} = 0. \quad (27)$$

Из уравнения Бернулли дополнительно следует:

$$dh + \frac{VdV}{g} = 0. \quad (28)$$

Исключая из соотношений (27), (28) глубину  $h$ , получаем:

$$\frac{db}{b} = (Fr - 1) \frac{dV}{V}.$$

Для бурных потоков число Фруда  $Fr > 1$ , или

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{Fr - 1} \frac{db}{b}. \quad (29)$$

Устанавливаем закономерность

изменения глубины, учитывая, что

$$\frac{dh}{h} = -\frac{V}{hg} dV = -Fr \frac{dV}{V}, \quad (30)$$

следовательно,

$$\frac{dh}{h} = -\frac{Fr}{Fr - 1} \frac{db}{b}. \quad (31)$$

Из уравнений (29), (31) следует, что вдоль расширяющейся струйки ( $db > 0$ ) бурного потока ( $Fr > 1$ ) скорости возрастают ( $dV > 0$ ), а глубины уменьшаются ( $dh < 0$ ).

Из уравнения (29) видно, что при свободном растекании поток расширяется, глубины падают, а скорости возрастают. Переходя далее от элементарной струйки к потоку в целом, можно утверждать, что характер растекания всего потока описывается зависимостями (29)...(31) и этот характер растекания справедлив вдоль произвольной линии тока, как на границе, так и внутри потока.

Перейдем теперь к постановке задачи в плоскости годографа скорости. Для этого выясним свойства функций  $\Psi(\tau; \theta)$  и  $\Phi(\tau; \theta)$ .

В плоскости годографа скорости для потоков, имеющих ось симметрии, функция тока вдоль оси должна быть равна нулю:

$$\Psi(\tau; 0) = 0, \quad (32)$$

так как эта линия тока отсекает от оси нулевой расход потока. Исходя из вида функции  $\Psi(\tau; \theta)$  в выражении (22), условие (32) будет выполняться в случае, если  $A_0 = 0; B_0 = 0; C_0 = 0;$

$$B_k^{(1)} = B_k^{(2)} = B_k^{*(1)} = B_k^{*(2)} = 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, для определения функции тока достаточно выбрать следующее решение:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \left[ A_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin(2k-1)\theta \right\}. \quad (33)$$

Заметим, что выражение (33) для выполнения условия

$$\Psi(\tau_0; 0) = \frac{V_0 b}{2} \quad \text{необходимо дополнить слагаемым} \\ M \sin \theta (\tau - \tau_0)^{-1/2} (1 - \tau)^\gamma, \quad (34)$$

где  $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} (\tau - \tau_0)^{-1/2} \sin \theta = 1$  – условие вдоль линии тока в окрестности точки  $(\tau = \tau_0; \theta = 0)$ ;  $M, \gamma$  – постоянные, подлежащие определению в процессе решения задачи.

Таким образом, исходное выражение для функции тока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi &= M \sin \theta (\tau - \tau_0)^{-1/2} (1 - \tau)^\gamma + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \right. \\ &\left. + \left[ A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Запишем соответствующее общее решение для потенциальной функции:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k^{(1)} \frac{d\psi_{1k}^{(1)}}{d\tau} + A_k^{(2)} \frac{d\psi_{1k}^{(2)}}{d\tau} \right] \cdot \\ &\cdot \int \sin k\theta d\theta + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k^{*(1)} \frac{d\psi_{1k}^{*(1)}}{d\tau} + \right. \\ &\left. + A_k^{*(2)} \frac{d\psi_{1k}^{*(2)}}{d\tau} \right] \cdot \int \sin (2k-1)\theta d\theta + \\ &+ \frac{2h_0 M}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(1-\tau)^\gamma}{(\tau - \tau_0)^{1/2}} \right] \cdot \int \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Из условия  $\theta = \theta_{\max}$  вдоль граничной линии тока на бесконечности, т.е. при  $\tau = 1$  следует:

$$\begin{aligned} \frac{V_0 b}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta_{\max} + \right. \\ &\left. + \left[ A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta_{\max} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, задачей свободного растекания потока в плоскости годографа скорости является определение постоянных  $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}$  в выражениях (35), (36) для потенциальной функции и

функции тока:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi \left( \tau; \theta; A_k^{(1)}; A_k^{(2)}; A_k^{*(1)}; A_k^{*(2)} \right); \\ \varphi &= \varphi \left( \tau; \theta; A_k^{(1)}; A_k^{(2)}; A_k^{*(1)}; A_k^{*(2)} \right). \end{aligned}$$

**Выводы**

Автором сформулированы основные свойства бурных потоков при свободном растекании.

Описаны краевые условия двумерной плановой задачи.

Получено общее решение двумерной плановой задачи.

1. 1. Шеренков И. А. О плановой задаче растекания струи бурного потока несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 1. – С. 72–78.

2. Справочник по гидравлике / Под ред. В. А. Большакова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев: Вища школа, 1984. – 343 с.

3. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.

4. Ширяев В. В., Мицик М. Ф., Дуванская Е. В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков: монография / Под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров – М.: Наука, 1970. – 720 с.

Материал поступил в редакцию 30.01.12.

*Дуванская Елена Викторовна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Сервис»*

*Тел. 8-903-43-177-26*

*Email: delvik2004@list.ru*