

УДК 502/504:551.482.215

**М. В. ЗЕМЛЯНИКОВА**Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный университет природообустройства»**В. А. ФАРТУКОВ**

Закрытое акционерное общество «Бюро сервиса и эксплуатации»

**ЛОКАЛЬНАЯ НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ  
В ОТКРЫТОМ ВОДНОМ ПОТОКЕ**

*Рассмотрен случай установившегося режима течения открытого водного потока, при котором имеет место неустановившийся колебательный режим. В процессе решения нелинейного уравнения установлено, что в рассмотренной системе незатухающие колебания могут существовать при наличии некоторого источника энергии, который компенсирует ее расход, возникающий за счет присутствия диссипативных сил.*

*Структура открытого водного потока, установившийся режим, нестационарность, автоколебательный процесс.*

*In this paper we consider a case of the steady regime of the open water flow with an unsteady self-oscillating regime taking place in it. When solving a nonlinear equation it is found that in the considered system continuous oscillations can exist in the presence of some energy source which compensates its consumption arising due to the availability of dissipative forces.*

*The structure of the open water flow, steady regime, nonstationarity, self-oscillating process.*

В публикациях целого ряда исследователей отмечено, что и для случая установившегося режима поступления расхода воды в открытый поток имеет место неустановившийся колебательный режим течения. Этот режим течения воды в зоне сопряжения сопровождается волнами с характерной амплитудой и длиной. Такие волны могут достигать значительных величин.

Система дифференциальных уравнений позволяет описать этот режим течения воды:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial (v_c \cdot \Omega)}{\partial t} + \frac{q_2^2}{g h_2} - \frac{q_1^2}{g h_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = q_1 - q_2,$$

где  $h_1, h_2$  – соответственно величина первой и второй сопряженных глубин;  $q_1, q_2$  – соответственно величины удельного расхода в зонах первой и второй сопряженных глубин;  $v_c$  – скорость центра массы объема;  $\Omega$  – площадь боковой поверхности гидравлического прыжка при аппроксимации продольного профиля в виде квадратичной параболы.

В случае увеличения периода временного сглаживания до значения, при кото-

ром производные  $\partial(v_c \Omega)/\partial t$  и  $\partial \Omega/\partial t$  обратятся в нуль, будет иметь место уравнение сопряженных глубин Беланже–Бресса. Как известно, система уравнений Сен-Венана является следствием уравнений Рейнольдса. При этом сглаживание турбулентных пульсаций нормального уровня, т. е. тех пульсаций, которые порождены трением на границе «жидкость – омываемая твердая поверхность», а не турбулентных пульсаций, возникающих в зонах отрывных течений, возможно при усреднении значений уравнений Навье–Стокса.

В зоне гидравлического прыжка, как и во всех других случаях отрывных течений, образуется макротурбулентность. Эта макротурбулентность имеет характерный временной масштаб  $T_m$ , который существенно больше временного масштаба  $T_n$ , отвечающего обычному уравнению турбулентности без отрывных течений с зависимыми от времени  $t$  ( $T_m > t > T_n$ ) характеристиками прыжкового потока.

Уравнение сопряженных глубин может быть применено только в случае увеличения периода временного сглаживания. Используя систему дифференциальных уравнений (1), описывающих нестационар-

ный режим течения водного потока, в зоне прыжкового сопряжения, предварительно произведя необходимые подстановки, получим нелинейное уравнение локальной нестационарности:

$$\frac{l^2}{3gh_2} \cdot \frac{d}{dt} \left( h_2 \left( \frac{d}{dt} h_2 \right) \right) + \frac{q_2^2}{gh_2} - \frac{q_1^2}{gh_1} + (h_2^2 - h_1^2) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{2l}{3} \cdot \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2,$$

где  $l$  – длина прыжка.

Произведя необходимые подстановки и замены в уравнении (2), приведем его к безразмерному виду путем нормирования на длину прыжка  $l$  и  $\sqrt{(l/g)}$ :

$$\left[ \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \mu^2 \left[ \frac{4\zeta \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2}{9} - \frac{5\zeta^2}{36} + \frac{\zeta}{18} - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu^2 \left[ \frac{4h_{кр}^3}{3d\zeta} + \mu \left[ \frac{\zeta}{3} + \frac{4d\zeta}{dt} \right] \right] \right] = 0,$$

где  $\zeta$  – разница между второй сопряженной величиной и ее актуальным значением;  $\mu = 1/h_2$  – малый параметр;  $h_{кр} = (q^2/g)^{1/3}$  – критическое значение глубины.

Полученное нелинейное уравнение показывает, что энергия рассеивается при больших амплитудах и генерируется при малых. Одновременно данное уравнение отображает наличие предельных циклов, которые колеблются около такого состояния, при котором приток и диссипация энергии сбалансированы [1–4]. Таким образом, можно отметить наличие бифуркаций векторных полей течения воды в зоне прыжкового сопряжения.

Решение данного уравнения будем искать асимптотическими методами [5–8]. Обоснованность применения асимптотических методов заключается в получении результата аналитическим способом и исключении накопления ошибок вычислений в случае применения численных методов решения. Основное содержание этого метода заключается в применении такой замены искомых переменных, которая (замена) позволит отделить «быстрые» переменные от «медленных». Такая замена переменных позволит

представить решение уравнения в виде асимптотического ряда:

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots;$$

$$k_0 = k^2 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2 + \dots,$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – неизвестные постоянные;  $k = 1/h_2$  – частота искомого процесса;  $\mu$  – малый параметр;  $k_0$  – собственная частота линеаризованной системы.

Полученная система уравнений (в безразмерном виде) представляет собой асимптотическое решение уравнения стационарных нелинейных колебаний прыжкового сопряжения бьефов:

$$y_0' + \frac{q_1^2}{3h_2} - 4q_1 \frac{y_0'}{3} + 4h_2 \frac{y_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{6} +$$

$$+ \frac{y_0}{3} - \frac{q_1^2}{3h_2 h_1} = 0;$$

$$y_1'' - 4q_1 \frac{y_1'}{3} + 8h_2 y_0' \frac{y_1'}{3} - y_0^2 \frac{\gamma_1}{6h_0^2} +$$

$$+ y_0 y_1 + \frac{y_1}{3} = 0;$$

$$y_2'' - 4q_1 \frac{y_2'}{3} + 4h_2 \frac{y_2^2}{3} + 8h_2 y_0' \frac{y_2'}{3} - y_0^2 \frac{\gamma_1^2}{12h_0^4} -$$

$$- y_0 y_1 \frac{\gamma_1}{3h_0^2} - \frac{y_1^2}{6} + \frac{y_2}{3} = 0.$$

В рассмотренной колебательной системе незатухающие колебания могут существовать при наличии некоторого источника энергии, который компенсирует расход энергии, возникший из-за диссипативных сил. Данный источник, оказывая воздействие на колебательную систему, играет роль «отрицательного» трения. Это «отрицательное» трение компенсирует обычное «положительное» трение, которое вносится диссипативными силами. В нашем случае это член системы уравнений, стоящий при первой производной  $4/3q_1 y_1'$

Возникшие таким образом колебания являются автоколебательными. В автоколебательных системах положение равновесия нарушается и возникает режим стационарного периодического колебания, совершающегося с постоянной амплитудой и фазой. Существование такого режима возможно при наличии трех составляющих: самой колебательной системы, источника энергии, управляемого колебательной системой, которая создает положение равновесия неустойчивым, а колебания нарастающими, ограничителя, переводящего нарастание колебания в стационарное состояние. Итак, в зоне прыжкового сопряжения присутствует автоколебательный режим с постоянной

амплитудой и фазой.

К автоколебательным системам относятся динамические системы, где определяется один и тот же периодический режим, образующийся при любых начальных условиях из некоторого множества этих начальных условий. Кроме того, автоколебания возникают и в нелинейных неконсервативных автономных системах [9, 10]. Существование таких автоколебаний (период, амплитуда и форма) определяется конструкцией установки (в нашем случае конструкцией нижнего бьефа), ее параметрами, но не начальными условиями.

Большой интерес представляют сочетания различных типов колебаний: а) воздействие периодической внешней силы; б) колебания во взаимосвязанных автоколебательных системах (например, работа двух и более водобоев на одном основании); в) непосредственное воздействие на автоколебательную систему периодических внешних сил с одновременным периодическим изменением параметров самой системы; г) изменение по периодическому закону одного или нескольких параметров в самой автоколебательной системе; д) воздействие периодических внешних сил на автоколебательную систему с переменными параметрами.

Решения уравнения стационарных нелинейных колебаний прыжкового сопряжения бьефов при различных сочетаниях типов колебаний сложны и многообразны. С целью получения количественной картины процесса рассмотрим математическую модель динамической системы, которая основана на понятии состояния, описывающего систему в некоторый момент времени, а также на понятии оператора, определяющего изменение этого состояния во времени:

$$y_1'' - 4q_1 \frac{y_1'}{3} + 8h_2 y_0' \frac{y_1'}{3} - y_0^2 \frac{\gamma_1}{6h_0^2} + y_0 y_1 + \frac{y_1}{3} = 0;$$

$$y_2'' - 4q_1 y_2' + 4h_2 \frac{y_2^2}{3} + 8h_2 y_0' \frac{y_2'}{3} - y_0^2 \frac{\gamma_2}{6h_0^2} + y_0^2 \frac{\gamma_2^2}{12h_0^4} - y_0 y_1 \frac{\gamma_1}{3h_0^2} - \frac{y_1^2}{6} + \frac{y_2}{3} = 0,$$

где  $h_2$  – осредненная вторая сопряженная глубина;  $h$  – ее актуальное значение;  $q_1$  – удельный расход сечения.

Состояние самой системы можно рассматривать как точку некоторого пространства, называемого фазовым пространством системы. Изменению состояния системы в фазовом пространстве отвечает движение соответствующей точки, называемой изображающей. Движение изображающей точки, описывающей

кривую, есть фазовая траектория. На рисунках 1, 2 представлена графическая интерпретация решения данной математической модели динамической системы – график решения динамической системы и фазовый портрет с зависимыми от времени  $t$  ( $T_m > t > T_n$ ) характеристиками прыжкового характера сопряжения потока.

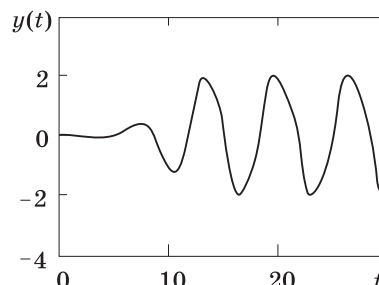


Рис. 1. График решения ( $t = 0, \dots, 30$ )

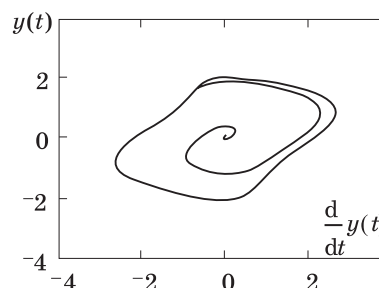


Рис. 2. Фазовый портрет

### Вывод

Макротурбулентность с характерным временным масштабом  $T_m$ , большим временного масштаба  $T_n$ , является источником генерации автоколебательного режима.

1. Земляникова М. В., Фартуков В. А. Обобщенные нелинейные уравнения локальной нестационарности: Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении: сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2003. – С. 136–137.

2. Земляникова М. В., Фартуков В. А. Уравнения локальной нестационарности при прыжковых сопряжениях: Экологическая устойчивость природных систем и роль природообустройства в ее обеспечении: сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2003. – С. 137–138.

3. Земляникова М. В., Фартуков В. А. Нелинейные уравнения локальной нестационарности в безразмерных переменных в зоне прыжкового сопряжения:

Проблемы научного обеспечения развития эколого-экономического потенциала России: сб. науч. трудов. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2004. – С. 196–199.

4. Земляникова М. В., Фартуков В. А. Качественная оценка динамической системы нелинейных колебаний прыжкового сопряжения бьефов: Роль природообустройств в обеспечении устойчивого функционирования и развития экосистем: материалы Международной научно-практической конференции. – М.: ФГОУ ВПО МГУП, 2006. – Ч. 1. – С. 398–401.

5. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 380 с.

6. Кузьмина Р. П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 336 с.

7. Марсен Дж. Э. Математические

основы механики жидкости. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 197 с.

8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.

9. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний: учебное пособие. – Красноярск: изд-во Красноярского университета, 1995. – 110 с.

10. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 210 с.

Материал поступил в редакцию 18.04.11.

*Земляникова Марина Владимировна, кандидат технических наук, доцент  
Тел. 8 (499) 976-22-27*

*Фартуков Василий Александрович, кандидат технических наук, доцент  
Тел. 8-916-653-17-59*

*E-mail: vasfar@mail.ru*

УДК 502/504:626.83

### Д. Ш. АПРЕСЯН

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ПУСКОМ НАСОСОВ ПРИ ПОДАЧЕ ВОДЫ В ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННЫЕ ВОДОВОДЫ

*Представлена методика расчета переходных процессов, возникающих вследствие пуска насосного агрегата при подаче воды в полностью заполненные водоводы. Предусмотрен расчет вращательного движения рабочего колеса насосного агрегата.*

*Напорная система водоподачи, насосная станция, насос, напорный трубопровод, обратный клапан, переходные процессы, рабочее колесо насоса, электродвигатель.*

*There is given a calculation method of transients occurring as a result of the pump aggregate startup under water supply to the conduits completely filled water. Calculation of the rotary movement of the pump aggregate wheel is provided.*

*Pressure system of water supply, pumping station, pump, pressure pipeline, back-pressure valve, transients, pump wheel, electric engine.*

Пуск насосов на полностью заполненные водоводы происходит тогда, когда на напорных линиях или в начале водовода установлены обратные клапаны. В этих случаях, пока развиваемый насосом напор будет меньше статического ( $H_n < H_{ст}$ ), дви-

жения воды в водоводе не происходит и динамика вращательного движения ротора насосного агрегата (частота вращения, развиваемый напор и потребляемый момент) будет определяться только характеристиками насоса и двигателя.