

К. Н. АНАХАЕВ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Высокогорный геофизический институт»

О РАЗВИТИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ФИЛЬТРАЦИИ

Работа посвящена развитию аналитических методов расчета фильтрации в гидросооружениях. Предложены упрощенные (до 1...2 %) зависимости для выражения эллиптических интегралов первого и второго рода элементарными функциями, что открывает новые возможности для решения усложненных задач фильтрации аналитическими методами. Получена новая формула для определения длины эллипса. Приведен перечень задач, в которых используются рассматриваемые эллиптические интегралы.

Аналитические методы расчета, фильтрация, противofiltrационные и дренажные устройства, эллиптические интегралы, суффозионные процессы.

This work is devoted to the development of analytical methods of filtration calculation in hydraulic structures. There are proposed simplified (up to 1...2 %) dependencies for the expression of elliptic integrals of the first and second genus by elementary functions that opens new possibilities for solution of complicated problems of filtration by analytical methods. The new formula is received for determination of the ellipse length. There is given a list of tasks where the considered elliptic integrals are used.

Analytical methods of calculation, filtration, antifiltration and drainage devices, elliptic integrals, suffusion processes.

Выявление закономерностей движения фильтрационных потоков, возникающих в области строительства водохозяйственных гидроузлов, имеет большое значение для прогнозирования гидрогеологического режима прилегающей территории и таких негативных явлений, как подтопление, заболачивание, вторичное засоление земель. На основе результатов фильтрационных исследований оценивают возможность возникновения в грунтах тела и основания гидротехнических сооружений опасных суффозионных процессов, а также эффективность работы противofiltrационных и дренажных устройств.

В последние десятилетия наибольшее развитие получили численные методы расчета фильтрации, позволяющие определять необходимые параметры фильтрационных потоков с учетом влияния множества различных факторов. Однако с помощью таких методов трудно учитывать особенности гидроузлов в принятой области моделирования. Точность расчетов оценивают, как правило, путем сравнения с данными аналитических решений тестовых задач. Тестовые задачи позволяют выявлять внутренние взаимо-

связи физических (используемых) параметров и степень их влияния на конечные результаты. В практике проектирования водохозяйственных объектов нередко возникает необходимость фильтрационных расчетов, связанных с использованием эллиптических интегралов первого и второго родов (рисунок):

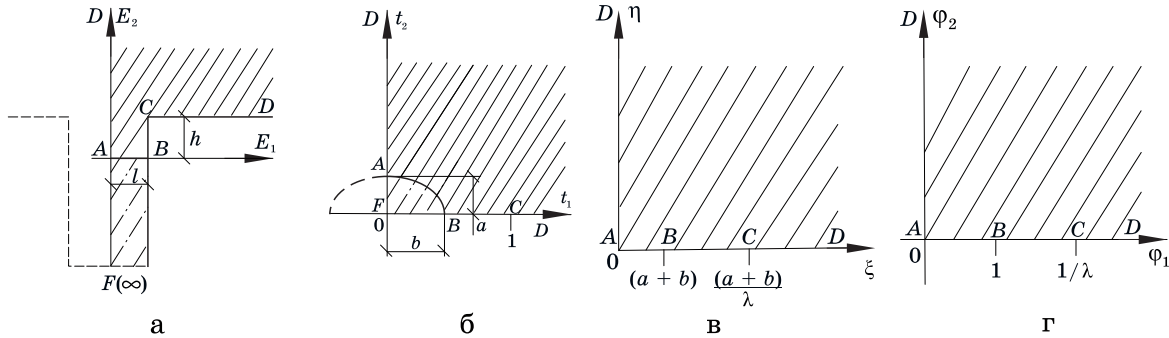
полных интегралов $K(\lambda) = K$; $K'(\lambda') = K'$ и $E(\lambda) = E$; $E'(\lambda') = E'$, определяемых при модуле интеграла $\lambda = \sin \alpha$ и дополнительном модуле $\lambda = \sqrt{1 - \lambda^2}$, где α – модулярный угол;

неполных интегралов $F(\varphi, \lambda)$ и $E(\varphi, \lambda)$, зависящих от модуля λ и комплексной амплитуды $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – координаты комплексной полуплоскости.

Рассматриваемые интегралы представляют собой трудоемкую задачу, связанную с итерационными подсчетами по методам понижающего преобразования Ландена, арифметико-геометрического среднего и др. [1]. На практике для этого используют специальные графики и таблицы, вычисления по которым требуют нелинейной интерполяции данных по разным направлениям. При этом их область определения охватывает только

единичный интервал вещественной оси $0 \leq \varphi \leq 1$ (при $\varphi_2 = 0$) и не позволяет находить значения указанных интегралов во всей комплексной полуплоскости $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Изложенное ограничивает

возможности выявления взаимосвязей физических параметров, используемых в рассматриваемых задачах, а также возможности оценки их влияния на итоговые результаты решения.



Конформное отображение четырехугольника ABCD области $E(\varphi, \lambda) = E_1 + iE_2$ на первый квадрант области $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$: а – четырехугольник ABCD комплексной области $E(\varphi, \lambda) = E_1 + iE_2$; б – комплексная область $t = t_1 + it_2$ с вырезанной эллиптической частью ABF; в, г – соответственно комплексные области $\zeta = \xi + i\eta$ и $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

Для неполного эллиптического интеграла 1-го рода $F(\varphi, \lambda)$ аналитическое решение для всей комплексной полуплоскости $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ получено автором [2].

Для интеграла 2-го рода $E(\varphi, \lambda)$ аналитическое решение получено по следующему алгоритму.

В четырехугольнике ABCD, который отображается на область первого квадранта комплексной амплитуды $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ неполным эллиптическим интегралом 2-го рода $E(\varphi, \lambda)$, заданную область продолжим по линиям DA и CB вниз до «бесконечности» (точка F) [3]. Полученный треугольник FCD конформно отобразим на комплексную область $t = t_1 + it_2$ с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца [4] следующей функцией (см. рисунок а):

$$E(t) = \frac{2l}{\pi} \left(\sqrt{t^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{t} \right) + ih, \quad (1)$$

где величины h и l определяются по формулам $h = K' - E'$ и $l = E$ [3].

В результате указанного отображения горизонтальный участок AB получает очертание, близкое к эллиптическому, с полюсами на мнимой и вещественной осях a и b , значения которых найдем из условий расположения точек A и B в областях $E(\varphi, \lambda) = E_1 + iE_2$ и $t = t_1 + it_2$ в виде соотношений (см. рисунок а):

$$\begin{aligned} a &= sh^{-1} \left[\frac{\pi(K' - E')}{2E} + \sqrt{1 + a^2} \right]; \\ b &= ch^{-1} \left[\frac{\pi(K' - E')}{2E} + \sqrt{1 - b^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Область $t = t_1 + it_2$ с вырезанной четвертью эллипса ABF (линия AB принята эллиптической) конформно отобразим на область комплексной амплитуды $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ с использованием вспомогательной комплексной области $\zeta = \xi + i\eta$ функциями [5] (см. рисунок г, в):

$$\begin{aligned} t &= (a + b)^{-1} \cdot \left[b\zeta + a\sqrt{\zeta^2 - (a + b)^2} \right]; \\ \zeta &= \varphi(a + b). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив величины t и ζ из (3) в (1) с учетом значений h, l и разделив вещественную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} E(\varphi_1 + i\varphi_2, \lambda) &= E_1 + iE_2 = \\ &= \frac{2E}{\pi} \left(A_1 + \arcsin \frac{2A_2}{M} \right) + \\ &+ i \left[(K' - E') + \frac{2E}{\pi} \left(B_1 - \text{Arch} \frac{M}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $M = \sqrt{(1 + A_2)^2 + B_2^2} + \sqrt{(1 - A_2)^2 + B_2^2}$ (если $B_2 = 0$, то при $A_2 > 1$ $M = 2 \leq A_2$, а при $A_2 \leq 1$ $M = 2$);

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} + A_3}{2}}; & B_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} - A_3}{2}}; \\ A_2 &= \frac{t_1}{t_1^2 + t_2^2}; & B_2 &= \frac{t_2}{t_1^2 + t_2^2}; & A_3 &= t_1^2 - t_2^2 - 1; & B_3 &= 2t_1 t_2; \\ t_1 &= \frac{aA_4 + b\xi}{a + b}; & t_2 &= \frac{aB_4 + b\eta}{a + b}; \\ A_4 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{A_5^2 + B_5^2} + A_5}{2}}; & B_4 &= \sqrt{\frac{\sqrt{A_5^2 + B_5^2} - A_5}{2}}; \\ A_5 &= \xi^2 - \eta^2 - (a + b)^2; & B_5 &= 2\xi\eta; \\ \xi &= \varphi_1 \cdot (a + b); & \eta &= \varphi_2 \cdot (a + b). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(при определении A_1 и A_4 : знаки при $\varphi_1 \geq 0$; минус при $\varphi_1 < 0$).

Полученное решение позволяет

выразить значения неполного эллиптического интеграла 2-го рода $E(\varphi, \lambda)$ элементарными функциями не только на единичном интервале вещественной оси, но и на всей числовой оси и верхней комплексной полуплоскости $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ в зависимости от трех переменных, причем для отрицательных значений $\varphi_1 < 0$ решение получается симметричным.

Для полного аналитического представления интеграла $E(\varphi, \lambda)$ и упрощения вычислений по формулам (4) и (5) значения полных эллиптических интегралов первого и второго родов K, K' и E, E' в (4) можно также находить (с погрешностью до 1...2 %) по известным зависимостям [2, 6]:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \sqrt{1-\lambda^2}}{\ln [0,35 \cdot (1-0,2\sqrt{1-\lambda^2})]}; \\ K' &= \frac{2K}{\pi} \cdot \text{Arch} \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}; \quad K' = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln \lambda}{\ln 0,35(1-0,2\lambda)}; \\ (\text{при } \lambda > 0,45) \quad (\text{при } \lambda \leq 0,45) \\ E &= \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)\lambda^2}; \quad E' = \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)(1-\lambda)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а для определения значений полуосей a и b использовать формулы, полученные из (2) и непосредственно зависящие от модуля λ :
 $a = 0,667 [1 - \sqrt{1 - \lambda^{(1-0,7\lambda)}}]$;

$$b = 0,92 \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda}). \quad (7)$$

Используя величину E для заданных значений горизонтальной и вертикальной полуосей ($a \geq b$) и модуля $\lambda = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, получим также новую формулу для длины эллипса L_φ в элементарных функциях (с погрешностью менее 1 %) [6]

$$L_\varphi = 4a \ln \sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)(1 - b^2/a^2)}, \quad (8)$$

которая для частных случаев окружности ($a = b$) и пластины ($b = 0$) дает точные значения их длин, равные соответственно $2\pi a$ и $4a$.

Для единичного же интервала вещественной оси ($\varphi_2 = 0$; $0 \leq \varphi_1 \leq 1$) значения неполного эллиптического интеграла 2-го рода $E(\varphi/\alpha)$, выраженного через модулярный угол $\alpha = \arcsin \lambda$, могут быть также определены по следующим формулам [6]:

$$\text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi^*, \text{ где } \varphi^* = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{\alpha}{65^\circ} \right),$$

$$E(\varphi/\alpha) = \varphi - (\varphi - \sin \varphi) \cdot \frac{\alpha}{90^\circ}; \quad (9)$$

$$\text{при } \varphi^* \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$E(\varphi/\alpha) = \varphi - (\varphi - \sin \varphi) \cdot \frac{\alpha}{90^\circ} - \frac{\varphi - \varphi^*}{\pi - 2\varphi^*} \left[\pi - (\pi - 2) \frac{\alpha}{90^\circ} - 2E \right], \quad (10)$$

где E находится по зависимостям (6).

Для частных случаев модулярного угла $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ формулы (9) и (10) совпадают с точными значениями, соответственно равными $E(\varphi/0) = \varphi$ и $E(\varphi/90^\circ) = \sin \varphi$ [1, с. 407]

Сравнение значений эллиптических интегралов, полученных по формулам (4)... (10), с базовыми данными показало приемлемое для практики совпадение результатов (до 1...2 %) [1, 3]. Предложенные зависимости позволяют определять такие значения эллиптических интегралов, которые невозможно получить интерполяцией табличных данных. Например, значение $E(\lambda)$ при $\lambda = \sqrt{80/81}$, подсчитанное по формуле (6), согласуется с его точным значением 1,01910 (погрешность - 0,6 %) [1, с. 416].

Предлагаемая методика представления эллиптических интегралов комбинацией элементарных функций может послужить основой для дальнейшего развития фундаментальных приближенно-гидромеханических методов расчета фильтрации. Ниже приведены примеры расчетных схем фильтрационных потоков (безнапорных, полунапорных, напорных, плановых) в гидросооружениях, расположенных на проницаемых основаниях различной мощности T , решения которых выражаются через эллиптические интегралы первого и второго родов:

фильтрация через однородные грунтовые плотины на непроницаемом и проницаемом основаниях ($T \leq \infty$) с горизонтальным дренажем или дренажной призмой [5, 7, 8];

фильтрация из водотоков к горизонтальному дренажу ($T = \infty$) [5, 8, 9];

фильтрация в вертикальную траншею при наличии в основании сильнопроницаемого слоя грунта с напорным потоком [7];

фильтрация с затопленной поверхности земли к вертикальной или трубчатой дрене ($T < \infty$) [9];

полунапорная фильтрация под плоским флютбетом, в том числе со шпунтом и дренажем (или без дренажа) ($T < \infty$) [10];

фильтрация под флютбетами простых и сложных форм при горизонтальном или наклонном залегании водоупора ($T \leq \infty$) [5, 7, 8, 10-12, 15];

фильтрация под разными флютбетами со шпунтами различного расположения ($T \leq \infty$) [7, 8, 10, 12, 13];

фильтрация под плоским флютбетом с отверстиями ($T = \infty$) [13];

плановая фильтрация к совершенному

котловану эллиптической формы [7];

профильная фильтрация из водотока полуэллиптического очертания [14] и др.

Заключение

При проектировании водохозяйственных гидроузлов одной из главных задач является правильное прогнозирование ожидаемого фильтрационного режима в самих гидросооружениях и на прилегающей территории, а также выбор рациональных конструкций их противофильтрационных и дренажных устройств.

Хотя в наиболее полной мере (для окончательно выбранных вариантов) эти задачи решаются численными методами моделирования, на предварительных стадиях проектирования определяющее значение имеют аналитические методы расчета фильтрации. Они же необходимы и для оценки точности (тестирования) численных методов расчета. Следует отметить, что большое число фильтрационных задач решается через эллиптические интегралы с весьма трудоемкими вычислениями. Указанное существенно сдерживает развитие аналитических методов исследования фильтрационных потоков, затрудняет выявление роли отдельных факторов в структуре общего решения для широкого круга задач различной направленности.

Предложенные упрощенные (до 1...2 %) расчетные зависимости по определению эллиптических интегралов первого и второго родов открывают широкие возможности для совершенствования существующих и развития новых методов аналитических исследований более сложных задач фильтрационных потоков. При этом области определения указанных интегралов впервые расширены от единичного интервала вещественной оси на всю числовую ось и верхнюю комплексную полуплоскость, для частных же случаев предложенные зависимости совпадают с точными значениями.

1. Милн-Томпсон Л. Эллиптические интегралы: справочник по специальным функциям (пер. с англ.) – М.: Наука, 1979. – С. 401–441.

2. Анахаев К. Н. О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков: Инженерные системы–2009: труды Междунар. научно-практ. конф. – М.: РУДН,

2009. – Т. 2. – С. 588–595.

3. Волковинский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975. – 319 с.

4. Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. – Киев: Наукова думка, 1970. – 252 с.

5. Лаврик В. И., Фильчакова В. П., Яшин А. А. Конформные отображения физико-топологических моделей. – Киев: Наукова думка, 1990. – 374 с.

6. Анахаев К. Н. О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. – 2008. – № 8. – С. 7–9.

7. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 616 с.

8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

9. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее приложение в области ирригации и дренажа. – М.-Л.: Госстройиздат, 1939. – 248 с.

10. Гидротехнические сооружения: справочник проектировщика / Г. В. Железняков [и др.]; под ред. В. П. Недриги. – М.: Стройиздат, 1983. – 543 с.

11. Анахаев К. Н. Определение параметров механики потенциальных потоков // ДАН (Дагестанская академия наук). – 2005. – Т. 401. – № 3. – С. 337–341.

12. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод / Собр. соч. – М.-Л.: АН СССР, 1956. – Т. 2. – 711 с.

13. Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений: Расчеты фильтрации под гидротехническими сооружениями. – Л.-М.: ГИСЛ, ВНИИГ, 1941.

14. Белов В. А. Противофильтрационные мероприятия на малых водоемах. – Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ, 2000. – 191 с.

Материал поступил в редакцию 24.04.13.

Анахаев Кошкинбай Назирович, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по селевой проблематике

Тел. 8 (8662) 40-10-34

E-mail: anahal3@mail.ru