Установлен характер изменения высоты и длины образующихся гряд в процессе их развития.

Определена скорость перемещения гряд и степень ее снижения по мере развития гряд.

Предложены аналитические зависимости, характеризующие исследованные процессы.

1. **Знаменская Н. С.** Донные наносы и русловые процессы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 192 с.

2. **Волынов М. А.** Пропускная способность саморегулирующихся речных русел // Природообустройство. – 2011. – № 5. – С. 66–71.

3. **Kennedy J. F.** The formation of sediment ripples, dunes and antidunes // Annual revive of fluid mech. – 1969. – Vol. 1. – P. 147–168.

4. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

5. **Волынов М. А.** Внутрирусловые грядовые образования на речных излучинах // Научное обозрение. – 2012. – № 3. – С. 60–71.

6. **Михайлова Н. А.** Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1966. – 232 с.

7. **Fudjiko Isaya.** An experimental study dune development and its effect on s8. ediment suspension // Environm. Res. Center Univ. of Tsukuba. – 1984. – № 5.

8. **Волынов М. А.** О плоскости раздела радиальных осредненных скоростей в поперечном сечении речного потока на излучине: Мелиорация и окружающая среда: сб. трудов ВНИИГиМ. – М.: ВНИИГиМ, 2004. – Т. 2. – С. 99–101.

Материал поступил в редакцию 26.09.12.

Волынов Михаил Анатольевич*, кандидат технических наук, доцент*
Тел. 8 (499) 153-21-33
E-mail: v1532133@yandex.ru

УДК 502/504 : 556.16

Г. Х. ИСМАЙЫЛОВ, И. В. ПРОШЛЯКОВ, А. В. ПЕРМИНОВ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет природообустройства»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ ТРАНСГРАНИЧНЫХ РЕК*

Предлагается методика построения двухуровневой модели управления водными ресурсами трансграничных рек на основе использования оптимизационных и имитационных систем. Для решения задачи распределения водных ресурсов между суверенными государствами с учетом интересов природных комплексов используется принцип декомпозиции.

Трансграничные реки, водные ресурсы, водноресурсная система, двухуровневая модель, имитационная модель, каскад водохранилищ.

There is proposed a methodology of building a two-level model of water resources management of transboundary rivers on the basis of optimization and simulation systems. For the problem decision of distribution of water resources between sovereign states in view of interests of natural complexes the principle of decomposition is used.

Transboundary rivers, water resources, water resource system, two-level model, simulation model, cascade of water reservoirs.

Процессы глобализации и образования новых государств, в том числе в результате распада СССР, заставляют по-новому рассматривать и оценивать проблемы, связанные с использованием водных ресурсов трансграничных рек (ВРТР), текущих в естественных руслах и питающихся за счет поверхностного и

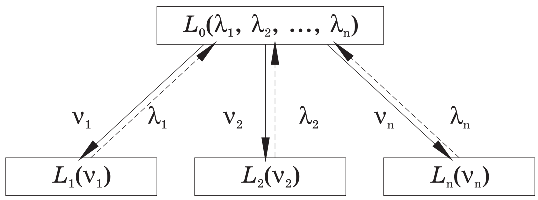
* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12 – 05 – 00193а.

подземного стоков бассейнов рек, пересекающих территории двух или более государств или проходящих через их границы. Государства, располагающие такими водными ресурсами, должны эксплуатировать их на двух- или многосторонней основе с учетом конкретных физико-географических и эколого-экономических условий данного речного бассейна.

В мире насчитывается около 250 крупнейших трансграничных рек, воды которых используются нескольким государствами. Это Дунай, Нил, Нигер, Меконг и др. Россия, располагающая богатейшими водными ресурсами, также имеет около 70 полноводных трансграничных рек. Так, по Вуоксе проходит граница с Финляндией, по Неману – с Литвой, по Днепру – с Белоруссией и Украиной, по Западной Двине – с Белоруссией и Латвией, по Самуру – с Азербайджаном, по Волге, Уралу, Иртышу – с Казахстаном, по Селенге – с Монголией, по Амуру – с КНР, по Туманной – с КНР и КНДР.

Рациональное распределение, использование и охрана водных ресурсов трансграничных рек – актуальная задача современности, требующая решения.

Для решения поставленной задачи авторы предлагают двухуровневую систему математических моделей. На верхнем уровне создается некоторый так называемый Центр, формулирующий глобальные задачи распределения, использования и охраны водных ресурсов всего бассейна, на нижнем – подсистемы, отражающие интересы соседних государств, где формулируются аналогичные задачи, решаемые на этом уровне. Центр является координирующим органом, который включает в себя представителей всех государств и стремится распределить имеющиеся водные ресурсы между государствами (подсистемами) с учетом особенностей окружающей среды. В реальных условиях Центр располагает общей картиной на всей территории речного бассейна, но не обладает информацией об эколого-экономических процессах, которые хорошо известны отдельным подсистемам (государствам). Именно в такой постановке задача управления водными ресурсами требует использования системы математических моделей, работающих в оптимизационно-имитационном режиме. При этом если оптимизационные модели позволяют осуществлять поиск оптимальных стратегических (проектных) параметров подсистем, то модели, работающие в имитационном режиме, позволяют корректировать тактические (режимные) параметры функционирования водно-ресурсной системы бассейна трансграничных рек. Очевидно, что система таких моделей должна быть построена и взаимно увязана по принципу двухуровневой системы управления водными ресурсами с ярко выраженными вертикальными связями (рисунок).



Общая схема двухуровневой системы управления водными ресурсами речного бассейна

Как видно из рисунка, первый тип взаимосвязей – координирующие воздействия ν_i, поступающие от вышестоящей к нижестоящим управляющим системам. Под влиянием координирующих воздействий ν_i системы нижнего уровня вырабатывают локальные плановые решения x_i и сигналы обратной связи λ_i. Передача наверх этих сигналов порождает второй тип взаимосвязей между управляющими системами. В двухуровневой системе управления управляющее решение x вырабатывается композицией локальных решений $x=\left\{x_i\right\}$ $(i=\overline{1,n})$ отдельных суверенных государств или субъектов этих государств, расположенных в бассейне реки. Вышестоящая система непосредственно не участвует в разработке решения x_i, она влияет на него с помощью координирующих воздействий ν_i. Таким образом, в рассматриваемых двухуровневых системах нахождение планов использования водных ресурсов x_i и сигналов обратной связи λ_i каждой нижестоящей локальной системой производится с помощью решения некоторой оптимизационной задачи $L_i\left(\nu_i\right)$, которую будем называть локальной оптимизационной задачей. Условимся также, что для выработки координирующих воздействий $\nu=\left(\nu_i\right)$ используется координирующая модель

$L_0(\lambda)$. Следовательно, для управлении водными ресурсами трансграничных рек двухуровневая система моделей строится с целью расчленения сложной глобальной оптимизационной задачи на ряд локальных подзадач, увязку которых осуществляет координационная модель [2].

Математическая постановка задачи. Хотя водные ресурсы могут быть использованы для различных целей, в данной постановке рассматривается использование водных ресурсов преимущественно в сельском хозяйстве. Интересы других водопотребителей, особенно населения, задаются в виде ограничений, т. е. удовлетворяются полностью. Задача оптимального распределения водных ресурсов между сельскохозяйственными участниками водохозяйственной системы речного бассейна в матричной записи формулируется так:

прямая задача – двойственная задача –

$$\begin{array}{ll} (C,X)\to\max; & (Y,b)\to\min; \\ AX\le b; & \\ DX\ge B; & YA\ge C'; \\ X\ge 0; & Y\ge 0, \end{array} \qquad (1)$$

где $X=(x_1,...,x_n)$ – n – мерный вектор-столбец (переменная прямой задачи: либо площадь всех категорий орошаемых и богарных земель, либо объем воды, подаваемой j-му сельскохозяйственному участнику с j-го створа реки); $C=(c_1,...,c_n)$ – n – мерный вектор-строка (эффективность); A – матрица условий (удельные затраты всех видов производственных и природных ресурсов) размерности $m\times n$; $b-m$ – мерный вектор-столбец (производственные и природные ресурсы, необходимые для ведения сельскохозяйственного производства); $Y=(y_1,...,y_m)$– m – мерный вектор-столбец (переменная двойственной задачи – система расчетных цен, т. е. оценка производственных и природных ресурсов); D – матрица интенсивности (урожайности) производства, размерностью $m_D\times n$; $b-m_D$ – мерный вектор-столбец (объем необходимой сельскохозяйственной продукции, который предприятие получит за год).

В дальнейшем задачу (1) будем называть полной информационной (ПИ) задачей координирующего центра, сокращенно – ПИ-задачей (задача верхнего уровня).

Пусть Ω – множество допустимых ПИ-планов; Ω^* – множество оптимальных ПИ-планов; Ψ^* – множество допустимых ПИ-систем расчетных цен; Ψ^* – множество оптимальных ПИ-систем расчетных цен. Тогда задача (1) приводится к следующему виду:

$$\Omega=\{x\,/\,AX\le b, x\ge 0\};$$

$$\Omega^*=\left\{x^*\,/\,x^*\in\Omega^*,(c,x^*)=\max_{x\in\Omega}(c,x)\right\}; \qquad (2)$$

$$\Psi=\{y\,/\,YA\ge C', y\ge 0\};$$

$$\Psi^*=\left\{y^*\,/\,y^*\in\Psi,(y^*,b)=\min_{y\in\Psi}(y,b)\right\}. \qquad (3)$$

Предположим, что ПИ-задача разрешима, т. е. оптимальный ПИ-план существует, $\Omega\ne\{\varnothing\}$ ($\{\varnothing\}$ – пустое множество). Известно, что в этом случае также существуют оптимальные ПИ-системы расчетных цен $\Psi^*\ne\{\varnothing\}$. Более того, согласно первой теореме двойственности, максимальная величина целевой функции прямой задачи и минимальная величина целевой функции двойственной задачи равны и их общая величина есть оптимум F ПИ-задачи:

$$\mathrm{F}=\max_{x\in\Omega}(c,x)=\min_{y\in\Psi}(y,b)=$$

$$=(c,x^*)=(y^*,b),(x^*\in\Omega^*;y^*\in\Psi^*). \qquad (4)$$

Разобьем матрицу A на подматрицы $A_1,...,A_j,...,A_J$, где при каждом $j\in J$ матрица A_j имеет размерность $m\times n_j$. Речь идет о делении бассейна реки на отдельные подсистемы, каждая из которых является относительно самостоятельной; в то же время она взаимосвязана с некоторыми общими ресурсами, прежде всего с водными. Соответственно разбиваются: матрица $D=(D_1,...,D_j,...,D_J)$, векторы $C=(C_1,...,C_j,...,C_J)$ и $X=(X_1,...,X_j,...,X_J)$, причем размерность C_j, X_j для $j\in J$ равняется n_j [2]. Тогда ПИ-задача преобразуется к следующему виду:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^J (C_j,X_j)\to\max \\ \sum_1^J A_jX_j\le b \\ \sum_1^J D_jX_j\ge B \\ X_j\ge 0, j\in[1,J] \end{array}\right\} \text{ и } \left\{\begin{array}{l} (Y_j,b_j)\to\min \\ Y_1A_1\ge C_1 \\ \dots\dots\dots \\ Y_jA_j\ge C_j \\ Y_JA_J\ge C_J \\ Y_j\ge 0, j\in[1,J]. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Вводим m-мерный вектор-столбец u_j, $j\in[1,J]$, удовлетворяющий условию

$$\sum_1^J u_j\le b. \qquad (6)$$

Скомпонованный план называется

ПИ-планом (центральным планом). Вектор u_j есть план j-го подсистемного компонента центрального плана U. В дальнейшем задачи (4) и (5) с ограничением (6) сводятся к задаче, для решения которой можно использовать теоретико-игровую модель [3]. Для численного решения рассматриваемых задач используется симплексный алгоритм линейного программирования.

Решение двухуровневой модели (1)...(6) позволяет получить оптимальные планы распределения водных ресурсов между участниками водно-ресурсных систем (ВРС), однако при этом не учитывается внутригодовое распределение стока, которому свойственны межгодовые и внутригодовые колебания. Поэтому необходимо корректировать полученные на первом этапе решения с помощью постановки задач (1)...(6) и распределить водные ресурсы между участниками водно-ресурсных систем с учетом динамики водных ресурсов, согласовав их с требованиями водопотребителей. С этой целью используется имитационная модель функционирования водно-ресурсных систем совместно с водохранилищами.

Имитационная модель функционирования ВРС. Общая постановка задачи функционирования водно-ресурсной системы с водохранилищами формулируется следующим образом [1].

Рассмотрим водно-ресурсную систему, состоящую из каскада N водохранилищ (с гидроэлектростанциями), расположенных на главной и боковых притоках реки. Каждое водохранилище имеет участников. В качестве участников принимаются следующие отрасли водопотребления: ирригация, гидроэнергетика, промышленное и коммунальное водоснабжение. При этом учитываются санитарные попуски и требования природных комплексов. Период регулирования разбивается на n равных (или неравных) отрезков времени. Выбор расчетного отрезка времени зависит от вида регулирования речного стока в пределах одного водохозяйственного года с увязкой его со следующим годом, а продолжительность расчетного интервала полагается равной одному месяцу, декаде или пентаде. С учетом значимости водоснабжения населения, а также малой доли промышленного водоснабжения (не более 5 % от общего водопотребления) предусмотрено полное обеспечение этих потребителей, а в модель их требования включены в виде ограничений.

Предположим, что все потребители воды, расположенные вдоль реки, формируют загрязненные сбросные и возвратные воды. Сброс этих вод в русло реки снижает показатели качества речной воды, ухудшает почвенно-мелиоративные условия в ирригационных системах региона и, как следствие, делает сельскохозяйственные земли менее продуктивными.

Допустим, что каждая ирригационная система на выходе имеет накопители (искусственные или естественные), позволяющие в зависимости от аккумулирующей способности реки перераспределять во времени и в пространстве сток возвратных вод и тем самым сохранять нормативы показателей качества речной воды. Основным требованием к накопителям является максимальное их опорожнение в конце водохозяйственного года (в зависимости от водности года) при сохранении в контрольных створах водотока и концентрации загрязняющих веществ в речной воде, не превышающей предельно допустимой.

Математическая постановка рассматриваемой задачи такова: требуется минимизировать функционал –

$$\Phi(\vec{V},\vec{U},t) = \min M\left[\sum_{t=0}^{T}\left\|\frac{\vec{U}_t - \vec{U}_{opt}}{\vec{U}_{opt}}\right\|\right]; \qquad (7)$$

$$\vec{V} = A\vec{W} + B\vec{U}; \qquad (8)$$

$$\underline{\vec{V}} \le \vec{V} \le \bar{\bar{\vec{V}}}; \qquad (9)$$

$\vec{U} \ge 0$ при $t = 0$, $\vec{V} = \vec{V}_0$,

где $\vec{V}$ – вектор наполнения; $\vec{U}$ – вектор попусков из водохранилищ; $\vec{U}_{opt}$ – оптимальное значение попусков; $\vec{W}$ – вектор водных ресурсов; t – текущее время; A и B – матрицы системных условий.

Решение задачи управления каскадом водохранилищ в постановке (7)...(10) требует использования прямых методов стохастического программирования. Учитывая неполноту вероятностной характеристики исходной информации, исключительную трудоемкость расчетов (особенно при динамической постановке задачи), для решения поставленной задачи построили имитационную модель функционирования каскада водохранилищ многоцелевого назначения. Ограничения (9) и (10) применительно к ВРС с N взаимосвязанными водохранилищами и накопителями высокоминерализованного стока возвратных вод описывают:

динамику воды в водохранилище в момент времени t

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - Q_i(t) + \rho_i(t) + U_i\ (t) + r_i(t) =$$

$$= 0, V_i(t_0) = V_i^0;\ i = \overline{1, N} \qquad (11)$$

$$V_i = V_i(Q_i, H_i), \quad i = \overline{1, N}$$

где t – время; $V_i(t)$ – объем воды в i-м водохранилище в момент t; $Q_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}(t)$ – объем главных и боковых притоков к водохранилищу, включая сток возвратных вод из накопителей в момент t; $\rho_i(t)$, $U(t)$, $r(t)$ – соответственно водопотребление, попуск из водохранилища, потеря воды на испарение, фильтрацию и ледообразование из водохранилища в момент t; V_i^0 – начальный объем водохранилища в момент t_0; H – глубина водохранилища;

кинетику процессов смешения солей в водохранилище в момент времени t:

$$\frac{dM_i(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}(t)C_{ij}(t) - m_{дн}(t) + \rho_i(t)C_i(t) +$$

$$U_i(t)C_i(t) + \alpha_i V_i C_i(t) = 0; \quad M_i(t_0) = M_i^0, i = \overline{1, N} \qquad (12)$$

где $M_i(t) = C_i(t) \cdot V_i(t)$ – масса солей в i-м водохранилище в момент t; C_{ij} – минерализация притока; C_i – минерализация воды, вытекающей из водохранилища; $m_{dn}(t)$ – количество солей, поступающих в момент времени в водохранилище с подземным стоком через донные отложения; α – параметр, учитывающий самоочищение; M_0 – масса солей в водохранилище в момент t_0;

динамику воды в накопителе в момент t можно описать следующим дифференциальным балансовым уравнением –

$$\frac{dV_i^c(t)}{dt} - q_i^c(t) + U_i^c(t) + r_i^c(t) =$$

$$0, V_i^c(t_0) = V_i^{c_0}; \qquad (13)$$

$$i = \overline{1, N}, \ V_i^c = V_i^c(q_i^c, H_i^c),$$

$$i = \overline{1, N}$$

где $V_i^c(t)$ – объем воды в i-м накопителе в момент t; $q_i^c(t)$ – объем возвратных вод, поступающих в накопитель в момент t; $U_i^c(t), r_i^c(t)$ – соответственно попуск и потери воды на испарение и фильтрацию из накопителя в момент t; H_i^c – глубина накопителя; $V_i^{c_0}$ – начальный объем накопителя в момент t_0.

Уравнения (11)...(13) записываются в конечно-разностном виде.

С учетом изложенных гидролого-водохозяйственных особенностей речного бассейна задача управления объемом и минерализацией речной воды формулируется следующим образом. При заданной структуре русловой части водно-ресурсной системы и орошаемой агроэкосистемы требуется найти такие объемы и режимы речного и ирригационно-возвратного стока, при которых обеспечиваются надежное снабжение водой пользователей и надлежащая минерализация речной (≤ 1 г/л), оросительной ($\leq 1{,}5$ г/л) и хозяйственно-питьевой (≤ 1 г/л) воды при соблюдении специальных попусков (санитарных, экологических, энергетических) по всей длине реки.

Заключение

Использование предложенной авторами концепции и прикладного аппарата – математического моделирования позволяет провести более углубленное гидролого-водохозяйственное обоснование рационального распределения, использования и охраны водных ресурсов бассейнов трансграничных рек.

1. **Воропаев Г. В., Исмайылов Г. Х., Федоров В. М.** Проблемы управления водными ресурсами Арало-Каспийского региона. – М.: Наука, 2003. – 427 с.

2. **Волконский В. А.** Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принципы декомпозиции) // Экономика и математические методы. – 1956. – Т. 1. – № 2. – С. 195–219.

3. **Робинсон Дж.** Итеративный метод решения игр // Матричные игры. – 1961. – С. 110–117.

Материал поступил в редакцию 03.05.12.

Исмайылов Габил Худуш оглы, *профессор, доктор технических наук, зав. кафедрой «Гидрология, метеорология и регулирование стока».*
Тел. 8 (499) 976-23-68
E-mail: gabil-1937@mail.ru
Прошляков Игорь Валентинович, *кандидат технических наук, профессор кафедры «Гидрология, метеорология и регулирование стока»*
Тел. 8 (499) 976-17-45
E-mail: iprosh@mail.ru
Перминов Алексей Васильевич, *кандидат технических наук, доцент кафедры «Гидрология, метеорология и регулирование стока»*
Тел. 8 (499) 976-17-45
E-mail: alexperminov@gmail.com